HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

ANNE'E MDCCXLIX.

A BERLIN.

CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Academie Royale.
MDCCLI.

Permis d'imprimer.

P. L. Moreau de Maupertuis
Préſident.

MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPERIMENTALE.

* *
*

RECHERCHES

SUR LA

FERTILITÉ DE LA TERRE

EN GÉNÉRAL,

PAR *Mr. ELLER.*

C'eſt principalement dans le Siecle préſent que les gens de lettres, & ſurtout ceux qui ſe mêlent de Phyſique, ont commencé un peu à s'informer de la culture de la terre. On a regardé ſans doute cette étude comme trop abjecte & indigne de l'application des ſavans ; de là eſt venu, qu'elle a été abandonnée entièrement au petit peuple & aux payſans. Cette négligence, ce me ſemble, mérite d'autant plus d'etre blâmée, que les anciens Grecs & Romains avoient déjà ſi bien frayé ce chemin. Les Magiſtrats du premier ordre, les Favoris des Empereurs, les Philoſophes mêmes, n'avoient pas honte d'exercer l'Agriculture, & d'en compoſer des Traittés ; un *Varron*, un *Columella*, un *Virgile* &c. en ſont les témoins. Ces gens d'un mérite ſi diſtingué, pour ſe délaſſer des occupations ſérieuſes, ſe retiroient de tems en tems à la campagne, & ne montroient pas moins d'application à cultiver la terre qu'à gouverner l'Etat.

Mais cette recherche ſeroit reſtée peut-être plus longtems parmi nous dans l'obſcurité, ou même dans un oubli entier, ſi l'etenduë du Commerce de nos jours dans les pays les plus eloignés n'avoit pas fourni l'occaſion aux Curieux d'apporter des arbres, ou des plantes, qui donnoient des fruits exquis, ou qui montroient des fleurs d'une beauté extraordinaire ; leſquels, pour les faire venir & multiplier dans nos climats, demandoient plus d'attention à cultiver les jardins, qu'on n'en avoit eu jusqu'alors. On remarqua bientôt qu'il n'etoit pas égal de donner la même terre à toutes ſortes de plantes, apportées de Climats plus chauds ou plus froids. Les fleurs ſurtout que tant de perſonnes aiment jusqu'à la folie, demandoient une toute autre préparation du terroir, pour leur procurer & conſerver cet éclat magnifique, que celles que nos forêts & nos prairies nous fourniſſent. J'oſe même avancer, ſans me tromper beaucoup, que cette application à mieux cultiver les jardins a donné l'occaſion aux gens de lettres de refléchir ſur la culture de nos champs. Ce que le payſan avoit appris par l'expérience, le phyſicien tàcha de le prouver par des démonſtrations. L'amour du gain porta le phyſicien propriétaire de quelques terres, pour augmenter ſes revenus, à faire de nouvelles épreuves & de nouvelles expériences, qui réüſſirent bien ou mal ſelon la valeur où le défaut de la theorie qu'il s'etoit formée. De là vient, que nous ſommes accablés depuis quelques années d'une foule de livres & de feuïlles periodiques qui traittent cette matiere ; leurs Auteurs promettant tous d'augmenter conſiderablement les revenus de ceux qui poſſedent des terres. L'un nous apprend une nouvelle methode d'engraiſſer un terrein ; un autre promet de corriger un terroir ſterile par un Nitre aërien dont il cherche encore l'attraction ; quelques uns enſeignent à préparer les grains avant que de les ſemer, pour les rendre plus prolifiques ; dans cette vuë ils les trempent dans les ſolutions de diverſes ſortes de ſels, ou dans les leſſives faites de différens *Alcalis* ; d'autres prétendent d'avoir trouvé le myſtere dans la nouvelle methode de labourer la terre en doublant les ſillons ; d'autres encore conſeillent de

plan-

planter les grains à diſtances meſurées, au lieu de les ſemer, &c. Je ne veux point entreprendre icy l'examen de ces methodes differentes, & de pluſieurs autres ſemblables, dont la pluspart ſont des raiſonnemens ſpéculatifs deſtitués d'expériences ; mon unique but eſt à préſent, d'examiner la nature & les propriétés de cette ſurface de la terre qui ſert de matrice aux ſemences des Vegetaux, pour les aider à pouſſer, à croitre, & à porter des fruits : recherche, que je juge d'une grande importance, puisqu'elle développe la veritable cauſe de la fertilité auſſi bien que de la ſterilité d'un terroir ; & je ſuis ſurpris qu'on ait négligé presque entièrement cette conſideration.

Les Phyſiciens modernes ſont d'accord que notre globe terreſtre ne contribüe autre choſe à la végétation, que de recevoir la ſemence dans ſon ſein, d'arrêter l'eau à l'entour pour la fournir au développement des germes, & d'affermir les racines, qui ſortent ſucceſſivement de ces germes, & qui attirent cette humidité dans la ſuite pour l'accroiſſement de la plante. La Végétation qu'on produit hors de la terre dans les phioles remplies d'eau & dans la mouſſe arroſée, confirme tout ce que je viens de dire.

Quand on ſe donne le loiſir d'examiner attentivement cette ſuperficie qu'on a trouvée propre à la végétation, on y rencontre un aſſemblage de pluſieurs petits corps, ou une matiere terreſtre confonduë, dont la nature & les proprietés ſont trés differentes les uns des autres. Je me perdrois icy dans un labyrinthe, ſi j'entreprenois de vouloir donner un dénombrement exact de toutes ces matieres infiniment différentes qui font de notre globe un compoſé immenſe ; je m'arrêterai ſeulement à cette portion ſuperficielle que les racines des Végétaux pénétrent ou touchent, & que la Providence a deſtinée à procurer la Végétation. Mais cette portion, quoique ſuperficielle, ne laiſſe pas de nous offrir encore un mêlange de matières bien differentes, compriſes ſous le nom général de terre. Lorsqu'on a l'adreſſe de partager ce compôſé terreſtre dans ſes differentes molécules homogenes, on remarque bien qu'elles ſe convertiſſent toutes dans une

eſpece de bouë coulante, quand on les délaye avec l'eau; mais lorsqu'on les deſſéche aprés, il y en a quelques unes qui tombent en pouſſiere, & d'autres qui s'endurciſſent plus ou moins par le deſſéchement. Quand on les examine par les diſſolvans acides, on rencontre une partie qui refuſe la ſolution, pendant que les autres ſont englouties dans les diſſolvans. D'un autre coté, quand on les éprouve par le feu, on trouve que cet élément, appliqué avec dexterité, les ſépare par ſon action en trois Claſſes, fort diſtinctes chacune par ſon caractere ſpecifique. Quand on met la premiere ſorte de ces terres dans un feu de fuſion, elle réſiſte entierement aux degrés les plus forts de cet élément; & ſe durcit tellement, qu'elle jette des étincelles par le choc avec l'acier. Cette Claſſe comprend les *terres argilleuſes*, ou à potier, les *terres graſſes jaunâtres*, dont les Briquetiers ſe ſervent, *les terres bolaires*, *les terres ſigillées*, *le lait de lune*, *la moëlle de pierre* &c.

Une autre ſorte de ces matieres terreſtres ou pierreuſes, traittée de la même façon par le feu le plus fort, commence à ſe fondre, & aidée d'un peu *d'Alcali*, montre une eſpece de vitrification: c'eſt pourquoi on les nomme *Terres vitreſcentes*. Cette ſeconde Claſſe comprend toutes ſortes de *ſables*, les *graviers*, & les *petits cailloux*. La troiſième Claſſe s'approprie les terres, ou plûtot les pierres, qui par le degré du feu le plus fort commencent à ſe déſunir, tombent enfin en pouſſiere, & ſouffrent ce qu'on nomme une calcination. Une branche de cette Claſſe fournit une eſpece de chaux vive, & l'autre une eſpece de plâtre, qui ne laiſſent pas d'etre fort differentes entre elles, quand on les ſoumet à un examen chymique ulterieur. Celles qui dans cette troiſième Claſſe meritent nótre attention, ſont *la Craye*, *la Marne*, *le Spath* & *les cendres des végétaux & des animaux*. On les nomme ordinairement *terres alcalines*, à cauſe qu'elles montrent un combat, ou effervéſcence, & même une ſolution entiere, ou en quelques parties, avec les eſprits acides. D'un autre côté les terres graſſes & argilleuſes pures, les terres vitreſcentes, & celles qui tombent en plâtre par la calcination, refuſent toute diſſolution dans ces diſſolvans. C'eſt l'habileté

leté reconnuë & l'application infatigable de Mr. *Pott*, qui a trouvé & mis dans un grand jour par une infinité d'expériences, ces propriétés differentes qu'il a ſi bien décrites & prouvées dans ſa *Lithogeneſie*.

J'ai jugé à propos de faire ces remarques préliminaires, pour faciliter la connoiſſance de ces ſortes de terres, placées par la Providence à la ſurface de notre globe, pour nous procurer la végétation. Nous voyons d'abord, que les champs qui permettent la culture, ſoit dans nos contrées, ſoit dans les pays plus éloignés, ne montrent pas le même mélange des terres, dont je viens de parler. Les couches en ſont bien differentes; dans les vallons, proche des rivieres & au deſſus des ſources cachées, on les rencontre tout autres que ſur les montagnes & dans un terroir éloigné des fleuves. Les endroits marécageux & les prairies abbreuvées par des eaux croupiſſantes, nous font voir un aſſemblage de matieres terreſtres tout oppoſé à celui d'un terroir élevé. Mais le mélange le plus ordinaire du terroir de la ſuperficie feconde de notre globe, nous montre un compoſé où nous rencontrons (1) du *Sable*, ou du *gravier*, (2) de la *terre graſſe jaunâtre*, (3) de *l'Argille*, & (4) de la *terre étrangere*, que j'appelle icy *adoptive*. Les terres alcalines que j'ai indiquées plus haut, n'entrent guerres dans ce mélange, ſi ce n'eſt par artifice, lorsqu'on les ajoute quelquefois pour augmenter la fertilité, ce qu'elles font par l'attraction de l'humidité de l'air. La Marne, les cendres des végétaux & des animaux, le tan &c. ſont employés dans cette vuë.

Le ſable & le gravier, qu'on rencontre en trés grande abondance dans les couches ſupérieures de notre terre, ne different entre eux que par raport à leur figure; le premier eſt extrémement menu, d'une figure ſphérique, quand on le voit par la loupe; le gravier eſt plus gros, & montre par la loupe toutes ſortes des figures irrégulieres, qui ne ſont, à proprement parler, qu'une infinité de petits cailloux, mêlés avec les autres ſortes de terres que nous allons examiner. Le ſable & le gravier tiennent le premier rang parmy les *terres vitreſcibles*; ils font déjà voir dans leur ſubſtance presque tranſparente une vitrification

cation naturelle; ce qui les défend auſſi contre toute attaque des diſſolvans connus jusqu'icy. Le feu même le plus vif ne les altere, que par le moyen d'un Alcali qu'on ajoute; & alors la vitrification naturelle du ſable ſe change en vitrification artificielle, & offre en quelque maniere la baſe de la production des differentes ſortes de verres, ou de glaces. Outre cela l'uſage du ſable étant d'une trés grande etenduë dans la vie civile, la Providence nous en a bien pourvû par tout; mais le ſervice qu'il rend à la végétation & à la fertilité de nos champs, & quelque conjecture touchant ſon origine, ſeront tantot le ſujet d'une recherche ulterieure.

La terre graſſe jaunâtre, (*Leem* en Allemend) lorsqu'elle eſt mêlée encore avec du ſable, ou avec du gravier, ſert à mouler & à cuire les tuiles & les briques; mais quand on la ſépare de ſa matiere ſablonneuſe par la lotion avec l'eau commune, on la trouve, étant ſéchee, aſſez fine & presqu'impalpable, d'une couleur qui tire ſur le jaune, laquelle lui eſt ſurvenuë par quelque mêlange de la *mine de fer* qu'on rencontre presque partout dans les couches ſuperieures de nôtre globe. Pour me convaincre de cecy, je mis dans une petite phiole, une portion de cette terre graſſe bien purifiée, & je verſai ſucceſſivement, à cauſe de l'efferveſcence, de *l'eau regale* deſſus; & l'ayant mis dans une digeſtion forte pour la diſſoudre, je trouvai, que *l'eau regale* aprés avoir tiré & diſſous les molécules du fer, laiſſa au fonds du vaiſſeau la terre graſſe fort blanche; laquelle étant lavée & nettoyée de ſon diſſolvant acide, étoit tout à fait reſſemblante *à l'Argille blanche*, bien purifiée, ou au *bol blanc de Boheme*; & je fus convaincu par cette expérience, que *la terre graſſe jaunâtre* des Briquetiers n'etoit autre choſe qu'une *argille*, ou *terre bolaire*, mêlée avec beaucoup de ſable & avec une petite portion de *mine de fer*.

L'Argille, qu'on rencontre auſſi dans les couches ſupérieures de notre terre, & quelquefois en pluſieurs endroits en trop grande abondance, mérite à preſent une conſideration ſpéciale, d'autant plus, que la terre graſſe dont je viens de parler, en eſt une branche. Cette

te terre argilleuſe n'eſt pas partout d'une même couleur; la blanche eſt en effet la plus pure & la plus recherchée par les potiers, les autres eſpeces ſont à l'ordinaire griſâtres ou bleuâtres; il y en a qui tirent ſur le jaune, ou même ſur le rouge, &c. Cette difference leur vient de quelques terres metalliques, ou *alcalines*, qui s'y mêlent quelquefois, mais la pluspart de ces eſpeces reſtent rougeâtres, après qu'on les a fait rougir dans le feu, & montrent par là un mélange de la mine de fer; laquelle étant ſéparée par l'eau régale, l'argille devient blanche & pure, ſoutenant le feu le plus fort, ſans qu'elle ſouffre une calcination, & moins encore une vitrification. Et ſi quelques Chimiſtes ont remarqué dans leurs experiences ces derniers effets, cela eſt venu de ce qu'ils ont employé une argille ſurchargée, ou de ſable, ou de terres metalliques, ou *alcalines*: & c'eſt par rapport à ces corps étrangers que leur argille a ſouffert une eſpece de vitrification.

Pour découvrir mieux les parties conſtituantes de l'argille & des terres graſſes, j'ai pris une argille bien purifiée par l'extraction & par les lotions, & comme j'avois éprouvé qu'elle n'entretient aucun commerce avec les eſprits acides dans ſon etat de pureté, je la fis bouïllir dans l'eau diſtillée bien longtems, mais n'ayant remarqué aucun changement ſenſible, j'ai ſéparé l'eau, & l'ayant diſſipée par l'évaporation, il reſtoit une trés petite portion d'une pouſſiere blanchâtre qui me parut tant ſoit peu picquante au gout. Je fis digérer & bouïllir une autre portion de cette terre graſſe purifiée dans l'eſprit de vin le mieux déſlegmé; mais cette tentative réuſſit encore moins que celle avec l'eau diſtillée.

Etant ainſi convaincu que la terre argilleuſe refuſoit abſolument l'entrée aux diſſolvans que je viens de nommer, je tentai la ſéparation de cette colle, ou matiere viſqueuſe qui la tient, & la diſtingue ſi fort des autres terres, par un *diſſolvant alcalin*. Je préparai pour cet effet une leſſive alcaline trés forte, j'en verſai une quantité ſuffiſante ſur une portion d'argille pure & nettoyée, & par une digeſtion & décoction convenable, j'en tirai une teinture rougeâtre aſſez faoulée. Ayant

répeté avec de nouveaux diſſolvans alcalins cette opération, jusqu'à ce qu'ils ne fuſſent plus colorés, j'ai trouvé à la fin ma terre argilleuſe bien changée; elle n'étoit plus reſſemblante à ce qu'elle avoit été, ſa tenacité visqueuſe etoit tellement diminuée, qu'etant bien ſéchée par le feu, je la pouvois mettre en pouſſiere par le frottement entre les doigts.

La Teinture jaune tirant ſur le rouge que j'en avois ſéparée, étoit alors l'objet de mes recherches; je diſſipai l'eau du diſſolvant *alcalin* par l'évaporation, & le ſel fixe au fond garda la teinture, & en fut fort coloré. Etant perſuadé au reſte, que cette colle, ou matiere visqueuſe, ſéparée de l'argille, & envelopée par *l'alcali*, devoit tirer ſon origine d'une matiere *phlogiſtique*, ou inflammable, j'en ai tenté la ſéparation par l'eſprit de vin le mieux déflegmé; il s'en chargea un peu par une digeſtion trés forte, mais ayant remarqué qu'il en reſtoit encore beaucoup auprès de *l'alcali*, je ſéparai l'eſprit foiblement teint de ce ſel, & je le mis à diſtiller dans un alembic; mais il n'y eut que la moitié environ qui ſortit en forme d'eſprit de vin, le reſte étoit changé en flegme d'une odeur fort *empyreumatique:* ce qui m'apprit, que cette matiere viſqueuſe de la terre graſſe étoit du nombre des matieres inflammables. Je fus encore confirmé de cette verité par une autre experience; j'avois mis ce qui reſtoit dans l'alembic, dans une petite retorte, & par la violence du feu je fis ſortir quelques gouttes qui exhaloient l'odeur du ſavon; marque de la liaiſon étroite de l'alcali avec une matiere graſſe inflammable. Je fus curieux enſuite de ſéparer entierement cet inflammable de l'envelope alcaline & de l'éprouver encore ſéparément; dans cette vüe je pris la ſolution alcaline telle que je l'avois retirée de l'extraction de la terre graſſe; j'ajoutai par repriſe, jusqu'à une ſaturation parfaite, l'acide vitriolique, pour en faire un *ſel moyen*, & cela par la *cryſtalliſation*, à meſure qu'on fait évaporer l'humidité ſuperfluë; après que par cette voye, toute matiere ſaline fut convertie en *Tartre Vitriolé*, il reſta au fond du vaiſſeau une matiere viſcide d'un brun obſcur, qui montroit bientôt ſa nature *phlogiſtique*

giſtique par la déflagration qu'elle ſubit avec du ſalpetre, & par la réduction de la chaux métallique de plomb. On obtient encore cette même matiere inflammable, quand on méle un bon vinaigre diſtillé avec l'extraction *alcaline* ſusdite, au lieu de l'*acide vitriolique*. Je me ſuis arrêté un peu trop à l'analyſe des terres graſſes & argilleuſes; ce que j'ai jugé néantmoins être néceſſaire pour découvrir la nature & les proprietés de ce lien, ou de cette colle, qui pénétre ſi avant dans les molecules terreſtres, & qui par là fait le caractére ſpécifique de ces ſortes de terres, qui ſont ſi néceſſaires pour augmenter la fertilité de nos champs. Et qui eſt-ce qui ignore leur grand uſage mecanique?

Parmis les differentes ſortes de terres, qui forment les couches ſupérieures de notre globe, j'ai placé encore en dernier lieu la terre étrangere, ou adoptive; je la nomme ainſi, à cauſe qu'elle n'en eſt pas tout à fait originaire; c'eſt un accroiſſement qui vient de dehors, car nous voyons tous les jours dans nos forêts que les feuïlles & les branches des arbres tombent, que les herbes de nos prairies ſechent vers la fin d'Octobre. Nous voyons auſſi nos Laboureurs occupés à déraciner & à renverſer, dans les champs qu'ils cultivent, les chaumes & les herbes ſteriles. Nous voyons encore les mêmes Laboureurs répandre du fumier ſur les terres qu'ils veulent rendre fertiles. Nous ſavons enfin par l'experience journaliere, que tout ce qui tire ſon origine des végétaux, commence peu à peu à ſe corrompre lorsque le mouvement végétatif ceſſe; les parties qui avoient formé la végétation, ſe diſpoſent à la ſéparation; la colle qui les lioit enſemble, ſe retire: joignez à cela, que l'altération cauſée alternativement, tantôt par la pluye, tantôt par la chaleur du Soleil, avance encore cette déſunion, de ſorte que ces parties végétales tombent enfin en pouſſiere, & montrent une eſpece de terre noirâtre, viſqueuſe, graſſe, ſi recherchée par les Campagnards pour augmenter la fertilité de leur terroir.

Mon deſſein n'eſt point à preſent d'entrer ici dans le détail, pour examiner ſi cette deſtruction ſe fait par la putrèfaction, ou par une

eſpece de fermentation, ou ſi ces deux puiſſances deſtructives agiſſent enſemble pour déſunir les parties qui compoſent les végétaux; mon but eſt ſeulement de conſidérer cette matiere végétative dans ſa décompoſition, lorsque la corruption la réduite en puſſiere, ou en terre. Pour ſéparer donc cette terre de ſes ſemblables, les autres terres graſſes, & du ſable, on n'a qu'à les délayer enſemble dans une quantité ſuffiſante d'eau; les ayant bien remuées avec un bâton, on voit que le ſable tombe le premier, & réſide au fond du vaſe, la terre graſſe repoſe après, s'il y en a, & cette terre tirée des vegetaux, occupe la place ſupérieure, & ſe diſtingue par une couche legère, noirâtre, & aſſez déliée. J'en ai examiné une portion par la loupe, & j'ai remarqué parmi la pouſſiere fort irréguliere des morceaux cylindriques, qui montroient encore quelques débris des fibres de leur premiere deſtination. Une petite quantité d'un ſable extrememement menu tient ſi fort à cette terre qu'on ne le ſauroit entierement ſéparer. Ayant infuſé & remué cette terre dans de l'eau fraiche pendant quelques jours, l'eau ſembloit être chargée d'une couleur blanchâtre moins transparente; mais étant ſéparée & miſe à évaporer, il m'eſt reſté une pouſſiere un peu griſâtre, qui cauſoit une legère impreſſion d'un gout *ſalin* à la langue. Une autre portion de cette terre ſéchée auparavant, fut miſe dans une retorte; & après que j'eus donné le feu par dégré, je remarquai qu'il en ſortit un liquide en forme d'*eſprit*; ce qui ſe fit voir par l'humidité qui filoit le long du récipient, & par les nuages blanchâtres dont ce vaiſſeau fut rempli: à la fin il monta une matiere huileuſe d'un beau rouge obſcur, qui ſe trainoit le long du col de la retorte, au fond de laquelle je trouvai encore une terre griſâtre, obſcure, plus foncée que la cendre ordinaire de bois. Ayant examiné enſuite le liquide qui s'etoit amaſſé dans le récipient, je rencontrai un eſprit volatil *empyreumatique*, d'une odeur forte à peu pres comme l'*eſprit de Tartre*; ſa quantité étoit aſſez conſiderable par raport à la terre de laquelle il avoit été ſéparé. Aprés qu'on l'avoit purifié de ſon huile *empyreumatique* par la diſtillation, il n'etoit ni urineux, ni acide, car il ne montroit point,

point d'embaras, lorsque je le mélois ſéparément avec ces deux ennemis, qui ſe détruiſent l'un l'autre.

Cet eſprit empyreumatique huileux dont cette terre eſt ſi bien pourvüe, fait voir l'abondance de ſa matiere inflamable, laquelle n'eſt autre choſe que ce lien, ou cette colle, qui joint ſi étroitement toute matiere terreſtre dans le régne végétal, & qui réſide encore dans la terre aprés leur corruption. Lorsque cette terre eſt trop expoſée à la chaleur du Soleil, la matiere inflammable s'exhale peu à peu, & ſe retire envelopée des vapeurs aqueuſes dans l'air, laiſſant une cendre presque ſterile; mais quand elle attrappe un terrein humide, abbruvé par de petites ſources cachées, ou voiſin de quelques rivieres qui ont peu de pente, elle ne perd rien, au contraire elle augmente par la corruption continuelle, qui arrive aux racines & aux plantes dont quelques eſpeces croiſſent en abondance dans les endroits humides. Et c'eſt là l'origine des lieux marécageux, où nous rencontrons un amas de cette terre végétative noire, presque ſuffoquée dans les eaux croupiſſantes, aſſez connuë ſous le nom de *Moor - Erde* en Allemand; c'eſt auſſi celle des *cespites bituminoſi*, ou de la *tourbe* des Hollandois, & comme elle contient une grande quantité de notre matiere inflammable, elle ſert à procurer la fertilité aux champs ſteriles.

Lorsque ce principe inflammable ſe joint intimément avec cette terre qui tire ſon origine de la deſtruction des végétaux, elle prend avec le tems la forme d'une terre graſſe, ou argilleuſe. Ce qui me confirme dans cette penſée, ce ſont les experiences que j'ai faites dans cette vuë, avec les cendres de bois purifiées de l'alcali qu'elles avoient contracté dans le feu. Je me ſuis donné la peine d'introduire de nouveau dans cette terre ſimple & homogene une matiere visqueuſe & inflammable par differens eſſais, en ajoutant auſſi quelquefois un *principe ſalin*, & je ne me ſuis point trompé dans mon attente, ayant obtenu à la fin une maſſe un peu gluante, & propre en quelque maniere à faire quelques ouvrages de l'otier, & que le feu même ne pouvoit pas bien défunir. Du moins il paroit par ces experiences, que la pro-

duction de la terre graſſe & argilleuſe eſt un ouvrage de la Nature, laquelle ſe ſert de cette terre que la corruption des végétaux fournit, & qui prend un accroiſſement de la matiere inflamable par la pluye & par les rayons du Soleil; & par ces mêmes moteurs ce *principe phlogiſtique* s'unit, après bien des années, ſi étroitement avec cette terre, que le degré du feu le plus fort n'eſt pas capable de les ſéparer, ou de les détruire.

Les bornes que je me ſuis preſcrites dans ce Mémoire, ne me permettent pas d'eplucher pluſieurs autres couches de terre graſſe, qu'on rencontre plus avant dans la terre, & qui ſemblent rendre cette hypotheſe douteuſe; mais tout ce que je puis ajouter ici, c'eſt que je donne à penſer, qu'on ne déterminera jamais les changemens differens que notre globe a ſouffert depuis des ſiecles, peut-être innombrables, par tant de déluges, ou inondations, où les couches de ces terres differentes ont ête remuées pêle-mêle, & ſe ſont baiſſées aprés d'une maniere tout à fait indéterminable. Par la même raiſon, je n'oſe pas toucher le problême: Si la terre graſſe ſe peut changer avec le tems en veritable caillou, ou en quelque autre ſorte de pierres? L'experience de Mr. *Baſin* à Strasbourg, dont il a communiqué le précis à l'Academie Royale de France, (Voy. les *Mémoires* de 1739.) ſembleroit le perſuader.

Aprés cet examen des trois ou quatre ſortes de terres aſſez differentes les unes des autres, que nous rencontrons le plus ſouvent dans les couches ſupérieures de notre globe, il eſt fort facile de déterminer à préſent ce que chaque ſorte contribuë à la fertilité. Nous comprenons facilement, que ſi la couche ſupérieure de notre terre étoit toute ſabloneuſe, ou un ſimple amas de gravier & de ſable, un terroir de cette nature doit abſolument reſter ſterile, vû que la pluye paſſeroit d'abord comme par un crible, le reſte de l'humidité ſeroit deſſeché par l'ardeur du ſoleil, & le vent renverſeroit auſſi-tôt dans ce ſable mouvant le tendre germe, avant le dévelopement même des racines d'une plante. La terre graſſe jaunâtre martiale, auſſi bien que celle

celle à potier, ou l'argille, quand elles ſe trouveroient privées de tout gravier, ou de ſable, feroient voir en peu de jours une cohéſion ſi extraordinaire, que les germes des grains, & même les racines tendres des plantes, y ſeroient indubitablement ſuffoquées; d'autant plus que nous voyons par l'experience, que la pluye la plus abondante, & fréquente, découle d'abord de ces ſortes des terres graſſes, & y pénétre ſi peu que rien, la chaleur du Soleil rendant la ſuperficie de cette terre plus compacte, à meſure qu'elle eſt arroſée plus ſouvent. On voit par là que le mélange de cette terre avec du gravier eſt indiſpenſablement néceſſaire pour la rendre fertile. La terre que la deſtruction des végétaux neus prépare, & que nous avons éprouvée la plus propre pour avancer la végétation, à cauſe de l'abondance de la matiere inflammable dont elle eſt pourvüe, perd bientôt cet avantage, ſi elle reſte ſeule; car l'expérience m'a fait voir que cette terre purifiée de tout gravier & de toute terre graſſe, donne trop de priſe aux rayons du Soleil, de ſorte qu'en très peu de tems l'humidité phlogiſtique eſt entierement enlevée, & il ne reſte alors qu'une pouſſiere legère & ſtérile, que le moindre ſouffle de vent peut emporter.

Ainſi nous ſommes, à ce que j'eſpere, convaincus de la néceſſité d'un mélange de ces ſortes de terres, tel que la Providence l'a établi, pour la végétation en général. Les differentes proportions que telle ou telle eſpece de graines, ou de plantes, demandent, pourroient donner occaſion à de nouvelles experiences, auſſi bien qu'à de nouvelles découvertes, qui ſeroient fort utiles au public.

NOUVELLE MANIERE
DE RENDRE L'ARGENT TRÉS FIN PAR L'ACIDE
DU SEL COMMUN, OU MOYEN DE FAIRE LA RÉDUCTION DE L'ARGENT CORNU SANS PERTE,

PAR M. MARGGRAF.

Traduit du Latin.

I.

Entre bien des manieres connües de raffiner l'argent, il ne s'en trouve ſans doute point de meilleure que celle de coupeller l'argent impur, aprés l'avoir mélé de plomb ſuivant ſa fineſſe & pureté. Dans cette opération le plomb ſe vitrifie peu à peu, & mêlé avec les autres métaux imparfaits, il remplit les pores de la coupelle. Au contraire l'argent y reſte très fin, & purifié des autres metaux. C'eſt ce qu'on appelle argent *raffiné*, ou *coupellé;* & on le regarde ordinairement comme le plus fin.

II. En effet l'argent raffiné de la façon ſusdite eſt fin & pur; cependant il ne laiſſe pas d'y demeurer toujours quelques parties de cuivre, & l'on peut s'en apppercevoir trés facilement, en refondant ce méme argent avec du ſalpetre ſeul, ou avec du ſalpetre & du borax, qui trahiſſent le cuivre par les ſcories vertes qui paroiſſent. Or comme il y a diverſes opérations, (ſurtout dans la Chymie, où la derniere préciſion eſt requiſe,) qui demandent un argent beaucoup plus fin, on peut aiſément juger que l'opération ſusdite ne ſuffit point pour rendre l'argent parfaitement fin.

III.

III. Quoiqu'on connoiſſe bien des methodes pour cela, il n'y en a pourtant point de plus ſûre que celle de précipiter l'argent de ſa ſolution dans l'acide du ſalpetre, par l'acide du ſel commun, ou par une ſolution de ſel commun, de bien édulcorer ce précipité, le bien ſecher, & d'en faire la reduction; car de cette façon on parvient aſſurément à l'argent le plus fin & le mieux dégagé du cuivre. Ainſi je laiſſe toutes les autres methodes à l'ecart, pour me borner à celle de faire la reduction de l'argent cornu.

IV. Pour faire de bon argent cornu, il faut avoir un acide de nitre bien pur; & ſi l'on n'en a point, il n'y a qu'à s'en faire ſoi-même de vitriol calciné & de nitre bien purifié, ou de l'huile de vitriol & de nitre purifié, ſelon la maniere ordinaire. Ou bien, ſuppoſé qu'on eût de bonne eau forte, il faut qu'elle ſoit bien précipitée par une ſolution d'argent dans l'eau forte, (ce qui s'apelle en Allemand *fällen.*) Cette précipitation ſe fait avec tout le ſuccés poſſible de la maniere ſuivante. On prend de l'argent bien coupellé, on le diſſout dans la quantité d'eau forte néceſſaire; puis on filtre cette ſolution, & on en laiſſe tomber peu à peu quelques gouttes dans une autre quantité d'eau forte, jusqu'à ce qu'il n'en tombe plus de chaux blanche. Pour empêcher qu'on n'y verſe trop de ſolution d'argent, d'où il réſulteroit que l'eau forte contiendroit de l'argent, il en faut filtrer une petite quantité, & l'eſſayer avec la ſolution d'argent; car, dés qu'on s'apperçoit qu'il ne ſe précipite plus rien, en y verſant la ſolution d'argent, il n'en faut plus ajouter, mais laiſſer repoſer le précipité, & le tirer au clair, ou filtrer.

V. Pour préparer l'argent cornu, on prend, par exemple, deux onces d'argent le mieux coupellé, laminé, ou limé, qu'on met dans une cucurbite, en y ajoutant cinq onces d'eau forte préparée. Alors, en le poſant dans un endroit chaud, l'argent ſe diſſoudra tout clair; s'il a contenu de l'or, on le trouvera au fonds de la cucurbite, & aprés en avoir tiré la ſolution d'argent, on y peut verſer un peu d'eau diſtillée, pour en ôter toute la ſolution d'argent, qu'on peut ajouter à la premiere, & ſecher la chaux d'or pour la garder. Cette ſolution d'ar-

gent purifiée doit être verſée dans un verre bien net, en y ajoutant deux meſures, ou un peu plus, d'eau diſtillée, & une petite quantité de ſolution de ſel commun, (faite de deux ou trois parties d'eau, & d'une partie de ſel commun, & bien filtrée,) ce que l'on continue tant qu'il en tombe un précipité blanc, & jusqu'à ce que les deux ſolutions ceſſent de ſe troubler. Il faut après cela laiſſer repoſer ce mixte pendant une nuit, en tirer le lendemain l'eau claire, changée préſentement en eau régale, & renfermant les parties de cuivre, qui étoient mêlées auparavant avec l'argent; édulcorer le précipité, premiérement avec de l'eau froide, puis cinq ou ſix fois avec de l'eau chaude, le filtrer pour ſéparer l'eau reſtante, & le ſécher au mieux ſur un trés petit feu. De cette façon on aura un précipité d'argent beau & blanc, de la peſanteur de deux onces, cinq dragmes, & quatre grains; laquelle peſanteur n'eſt augmentée que par l'acide du ſel commun attaché aux parties d'argent. Ainſi une once d'argent cornu contient à peu prés la quatrieme partie d'acide du ſel commun; & par conſéquent dans une telle once il ſe trouve ſix dragmes & quelques grains d'argent trés fin.

VI. Si l'opération dont on vient de rendre compte, ſe fait avec un argent, qui ne ſoit point d'auſſi bon aloi que le coupellé, il eſt facile à comprendre que le précipité doit être moins peſant, parce qu'il ne ſe précipite autre choſe ici que l'argent, & le cuivre reſte dans la liqueur; le peu qui pourroit s'en attacher au précipité, comme cuivre diſſous, étant nettoyé par la quantité d'eau qui ſert à l'edulcoration. C'eſt pour cela qu'il ne faut point épargner l'eau en edulcorant; tout au contraire on doit l'employer en grande quantité, & je conſeille ſurtout de prendre pour la premiere fois de l'eau diſtillée pour édulcorer, parce que l'eau ordinaire de puits n'eſt gueres ſans quelques parties de chaux, qui précipiteroient facilement un peu de cuivre.

VII. Ce précipité préparé de la maniere précedente, & qui ne contient abſolument autre choſe que l'acide du ſel concentré & de l'argent, ſe fond non ſeulement trés vîte à un feu découvert, mais il eſt auſſi

auſſi trés volatil, de façon que ſi l'on en vouloit chaſſer l'acide du ſel, en le poſant dans un creuſet ouvert, il pénétreroit le creuſet, & même il ſe diſſiperoit en bonne partie en fumée. Cette réduction n'eſt donc pas auſſi aiſée qu'elle le paroit, ſurtout lors qu'on ſe propoſe de la faire ſans perte.

VIII. Car, quoiqu'il ſoit aſſez manifeſte qu'on a beſoin d'en ſéparer l'acide du ſel, & par conſéquent de le mêler avec un corps auquel cet acide puiſſe s'attacher, en quittant l'argent; quoique de plus on ſache bien des manieres de s'y prendre, il y a pourtant bien des difficultés partout. *Kunckel* cenſeille, par exemple, (*) de mêler l'argent cornu avec trois parties de plomb granulé, de fondre ce mixte dans une cornüe, d'en ſéparer la partie ſuperieure, & de coupeller celle de deſſous, diſant que c'eſt le moyen de recouvrer la quantité d'argent. Ce procedé en ſoi-même eſt bien pratiquable; mais comme le plomb contient ſouvent quelques parties de cuivre, je doute que ce ſoit là la façon la plus nette.

IX. La réduction de l'argent cornu ſe fait auſſi par d'autres metaux, par exemple, par l'etain, par le régule d'antimoine, & par le fer. Ces opérations par l'etain & par le régule, ſont auſſi aſſez propres, quand on a trouvé la bonne proportion, ſurtout celle du régule; néanmoins elles tirent en longueur, & ſont ſales, ſans comptet que ces metaux mêmes ne ſont pas des plus purifiés, comme l'a remarqué le ſavant M. *Stahl.* (**)

X. M. *Gellert* fait auſſi mention dans l'Edition de la *Docimaſie* du Sr. *Kramer* qu'il a traduite en 1746. (***) d'une réduction de l'argent cornu avec du cinnabre, qui ne me plait pourtant point, tant parce que l'argent s'y mineraliſe, que parce qu'il n'y marque point le poids du cinnabre néceſſaire. Je ne ſaurois néanmoins paſſer ſous ſilence, qu'une bonne partie de l'argent ſe ſublime

 dans

(*) *Laborat. Chym* p. 311.

(**) Dans ſon *Traité des Sels*, p. 266. 267.

(***) Part. II. p. 412.

dans cette opération, & que la réduction de l'argent mineralisé, qu'il faut faire, soit en le grillant, soit ou en employant le fer ou le plomb, ne valent rien toutes les deux, à cause de leurs parties cuivreuses, & demandent absolument qu'on le passe par la coupelle.

VI. La maniere la plus sure & la plus nette pour faire la réduction de l'argent cornu, a été jusqu'ici celle de se servir d'un sel alcali végétal; aussi *Kunckel* la recommande, (*) & conseille de placer le sel alcali au creuset, de façon que l'argent ne touche point le creuset, en se servant pour cet effet de suif; d'autres disent de graisser le creuset, avec du savon, d'y mettre l'argent cornû, le couvrir de la moitié de sel alcali bien séché, de presser le tout bien ensemble, d'y verser quelque peu d'huile, ou de suif, & de le fondre premiérement à un petit feu, & ensuite au plus violent. (**) Mais personne n'a remarqué la perte, qui est pourtant toujours trés considerable; & quant au savon dont on se sert pour cette opération, ma propre experience m'a appris que, si l'on prend du savon qui ait été fait dans un chaudron de cuivre, l'argent est gâté par les parties de ce métal.

VII. Si quelcun vouloit cependant se servir de cette façon par le sel de tartre, qui est assez bonne, je lui conseille de prendre au moins deux parties de sel de tartre contre une partie d'argent cornu, d'en mêler le quart, ou la moitié, & un peu d'huile, avec l'argent cornu, de jetter une partie du sel de tartre au fonds du creuset, & de l'en entourer, aprés l'avoir bien frotté avec du suif purifié, d'y mettre le mixte d'argent cornu, de sel de tartre, & d'huile, de le couvrir avec le reste du sel de tartre, & de fondre le tout peu à peu. Si l'on veut, on peut vitrifier auparavant le creuset avec un peu de borax, ou quelque autre mélange propre à cet effet: mais tout cela n'empêche pourtant point qu'il ne se faise une perte d'argent, qui arrivera à tous ceux qui feront l'opération susdite.

XIII.

(*) *Labor. Chym.* p 310.
(**) *Kramer. Docim.* P. II. p. 81.

XIII. Par le borax ſeul on parviendra également à la réduction de l'argent cornu, comme en ſont foi mes propres experiences que je vais rapporter. Prenez un creuſet proportionné & bien net, mettez y deux dragmes de borax calciné qui ſe broye comme un alun brulé, & frottez en bien le creuſet par tout, afin que cela s'y attache comme une poudre. Mélez enſuite deux dragmes d'argent cornu avec une dragme du borax ſusdit, jettez ce mixte dans le creuſet que vous couvrirez bien, & en fondant le tout vous trouverez vôtre argent réduit, qui peſera une demi-dragme & quelque peu de plus; la ſcorie en ſera de la couleur des fleurs de pêcher, & la perte de l'argent ſera conſidérable. Cependant elle le ſera moins, quand aprés avoir frotté le creuſet avec un tant ſoit peu de borax, vous mélerez ſix dragmes de borax calciné avec deux dragmes d'argent cornu, qui, en les fondant à la maniere ſusdite, rendront deux ſcrupules & huit ou dix grains: ce qui eſt bien éloigné du compte, car il faudroit en tirer au moins une dragme & demie.

XIV. Quoiqu'il fut facile de trouver une bonne methode pour faire la réduction de l'argent cornu au creuſet ſans perte, je ne m'y attache néanmoins point, & je vais parler d'une nouvelle façon, qui, à ce qu'il me ſemble, ſera la meilleure & la plus conſidérable, pour faire la réduction de l'argent cornu. Elle ne conſiſte que dans une eſpece de précipitation par un corps métallique.

XV. Le mercure cru eſt, comme je l'ai remarqué, le corps le plus propre à la réduction de l'argent cornu: cependant il ne fait point cet effet par lui-même, ce n'eſt que par le ſecours du ſel alcali volatil. J'avois déjà obſervé, il y a quelques années, (*) qu'un eſprit bien fort préparé du ſel ammoniac & du plomb calciné, (ou *minium*,) diſſolvoit l'argent cornu à l'air froid; & cela me fit penſer a méler l'argent cornu avec un eſprit de ſel ammoniac préparé avec de l'eau, fait de deux livres de ſel alcali fixe, d'une livre de ſel ammoniac, & de trois livres d'eau.

(*) Voy. *Miſcell. Berolin.* Tom. VI. p. 328. § 9.

Je vis le même effet, car quatre onces de ce bon eſprit de ſel ammoniac, verſées ſur une demi-dragme d'argent cornu pulveriſé, la diſſolurent toute entiere par une digeſtion trés médiocre; & il ſe forma dans cette ſolution réfroidie de petits cryſtaux, qui prirent une couleur bleuâtre à l'air. En jettant dans une pareille ſolution ſix parties de mercure contre une partie d'argent cornu, & la laiſſant repoſer, je trouvai le lendemain un bel Arbre de Diane, lequel lavé & broyé dans un mortier de verre, étoit un amalgame parfait, dont je ſéparai le mercure par la diſtillation, & en tirai l'argent le plus fin.

XVI. Pour faire la meilleure réduction de l'argent cornu, & avec le moins de perte, il faut executer l'operation de la maniere ſuivante: Revivifiez du mercure d'un cinnabre beau & bon par la chaux vive à la maniere ordinaire, & lavez-le jusqu'à ce qu'il jette une lueur brillante; alors vôtre mercure ſera purifié de toutes les parties heterogenes, & vous pourrez le garder pour vous en ſervir. En ſecond lieu, préparez un ſel ammoniac volatil ſec, que vous compoſerez d'une partie de ſel ammoniac, & de deux parties de cendre gravelée ordinaire, en y ajoutant quelque peu d'eſprit de vin le mieux rectifié, & gardez-le pareillement dans un verre bien bouché.

XVII. Prenez en troiſieme lieu une demi-once d'argent trés fin & pur, (de peur que ce qu'il y a de cuivre ne brouïlle le calcul,) diſſolvez-la dans une trés bonne eau forte, préparée ſuivant ce que nous avons dit §. IV. & V. précipitez avec la ſolution de ſel commun, & ſuivez en tout la maniere d'edulcorer mentionnée au même endroit. Alors vôtre argent cornu bien ſéché peſera cinq dragmes & ſeize grains, & vous aurez ſur cette demi-once ſoixante & ſeize grains d'augmentation au poids. Mélez à cette heure ces cinq dragmes & ſeize grains avec une once & demie du ſel ammoniac volatil ſec, indiqué au §. XVI. dans un mortier de verre proportionné & bien net, broyez le tout au mieux enſemble, & ajoutez-y un peu d'eau pour donner au mixte la conſiſtance d'une bouïllie; vous remarquerez ici que ce mixte s'enfle avec une eſpece d'efferveſcence, & aprés l'avoir bien

bien broyé enſemble pendant un gros quart d'heure, ajoutez-y trois onces de mercure purifié & preparé conformément au §. XVI. avec un peu d'eau, & en continuant à broyer, ce mixte prendra au bout d'une demi-heure une couleur griſatre, & l'argent s'amalgamera avec le mercure. Vous y ajouterez auſſi, ſi vous le jugez à propos, à peu prés une demi-dragme de ſel volatil à cauſe de ſa volatiliſation, & vous le broyerez pendant quelques heures, (car plus on broye, & mieux c'eſt,) & vers la fin vous augmenterez la quantité d'eau; ce qui vous fera avoir un bel amalgame d'argent, qui doit être bien lavé. C'eſt pour cela que vous verſerez encore plus d'eau deſſus, & continuerez à broyer, vous tirerez l'eau trouble & la verſerez dans un autre verre, vous remettrez de l'eau ſur l'amalgame, & le laverez de cette façon, jusqu'à ce que l'eau en ſorte auſſi claire que vous l'y aurez verſée, & que vous n'apperceviez plus de pouſſiere blanche. Cela fait, ſechez l'amalgame & peſez-le, vous trouverez trois onces & une demi-dragme d'un bel amalgame d'argent, & aſſurément trés tendre; & en ramaſſant la pouſſiere blanche lavée, vous en tirerez par la filtration & l'edulcoration, aprés l'avoir ſechée, cinq dragmes d'une poudre blanche & bien peſante.

XVIII. Il s'agit à préſent de délivrer l'amalgame d'argent dont je viens de parler du mercure ſuperflu; & pour y parvenir, mettez-le dans une retorte de verre trés nette, poſez-la au bain de ſable, appliquez y le récipient rempli de l'eau néceſſaire, & diſtillez par degré jusqu'a l'incandescence. Le mercure paſſé au recipient peut être lavé, ſeché, & conſervé, pour s'en ſervir à d'autres opérations; il peſera à peu prés deux onces, deux dragmes & demie, & quinze grains. Au fonds de la retorte ſera l'argent le plus fin & le plus purifié, qui fondu ſans aucune addition aura juſtement le poids d'une demi-once, moins quatre grains; perte ſans contredit moins grande que celle qui arrive en ſuivant les autres methodes.

XIX. Les quatre grains qui manquent ici, ne doivent pas être regardés comme perdus, car ils ſe trouvent dans la poudre blanche mentionnée

tionnée au §. XVII. qui ſublimée par degrés dans une retorte de verre, laiſſe au fonds de la cornuë une partie d'une poudre, qui rend encore deux & demi jusqu'à trois grains d'argent, ſi vous la fondez avec du ſuif & un peu de borax. Le ſublimé, qui monte au col de la retorte, eſt presque un mercure doux, qui peut être ſublimé de nouveau, quand vous l'aurez broyé, & encore édulcoré quelquefois avec de l'eau chaude, & à la fin de l'opération, vous trouverez encore quelque peu d'argent au fonds de la retorte, que vous ramaſſerez & fondrez également: alors le ſublimé peſera deux dragmes & quarante grains, qui ſont presque tout entiers un mercure doux bien pur. Au reſte je me crois obligé de remarquer ici, que ſi l'on vouloit par hazard laiſſer la poudre blanche ſusdite parmi l'amalgame, & l'en ſéparer en même tems avec le mercure par la diſtillation, tout le travail échoueroit; car alors la réduction de l'argent ne ſe fait point, & il reſte au contraire au fonds de la retorte comme de l'argent cornu, parce que l'acide du ſel commun changé avec le mercure en mercure doux, ſe combine avec l'argent, & en fait de nouveau un argent cornu.

XX. Si l'on veut faire cette opération en grand, & empêcher la perte du ſel alcali volatil ſec, on peut ſe ſervir au lieu de mortier d'une retorte avec un récipient appliqué, mêler l'argent cornu, avec le ſel volatil ammoniac ſuivant la proportion donnée au §. XVII. le mettre dans une retorte, y ajouter une bonne quantité d'eau avec le mercure néceſſaire, & aprés avoir adapté le récipient, & bien fermé les jointures, diſtiller le mixte au feu de ſable, jusqu'à ce que tout le ſel volatil ſuperflu ſoit paſſé dans le récipient, (& ce ſel, quoique fluide, peut fort bien ſervir une autre fois.) Le mixte d'argent & de mercure reſté au fonds de la rétorte, & actuellement changé en amalgame, doit être bien broyé dans un mortier de verre, aprés quoi on lave bien la poudre blanche, ou mercure doux, & l'on ſépare le mercure de l'argent par la retorte: alors on recouvrera également ſon argent, ſans perdre le ſel ammoniac. Dans cette opération la diſtillation

lation fait le même effet que le broyement ; car les parties d'argent qui ſont dans l'argent cornu, ſe combinent également avec le mercure de leur ſolution dans le ſel alcali volatil ſuivant le §. XV. & compoſent un amalgame, & un mercure doux, presque auſſi bon que le premier du §. XIX. puiſqu'on n'a beſoin de ſublimer autre choſe que la poudre lavée.

XXI. Pour être perſuadé que la réduction de l'argent cornu ne ſe fait pas par le ſeul volatil ſeul, on n'a qu'à examiner les petits cryſtaux qui ſe forment dans la ſolution de l'argent cornu par l'eſprit de ſel ammoniac, ſans y ajouter du mercure, comme nous l'avons vû au §. XV. on trouvera que l'argent ne ſe réduit point par l'alcali volatil ſeul. On pourra également s'en convaincre, en mêlant une partie d'argent cornu avec deux parties de ſel ammoniac volatil ſec, & en diſtillant jusqu'à l'incandeſcence.

XXII. J'ai eſſayé en même tems de faire la réduction de l'argent cornu, en le mettant en digeſtion avec une ſolution de ſel de tartre, & en broyant un pareil mixte avec de l'eau & du mercure, mais j'ai travaillé en vain. La même choſe m'eſt arrivée en mêlant une partie d'argent cornu avec trois ou quatre parties d'un mercure précipité de ſa ſolution dans l'eau forte par une ſolution de ſel de tartre bien edulcoré & ſéché, & en le diſtillant jusqu'à l'incandeſcence ; plus en mêlant une partie d'argent cornu avec quatre parties d'un mercure précipité de ſa ſolution dans l'eau forte par un eſprit de ſel ammoniac édulcoré & ſeché, & en le traittant de la même façon. Au reſte je ne doute point qu'on pourroit réüſſir à combiner l'acide du ſel commun avec le mercure en cherchant les proportions néceſſaires, & les methodes de le faire par le ſecours de ces précipités, & qu'on réſoudroit par là le problême que M. *Stahl* a propoſé dans ſon Traitté des Sels. (*)

(*) pag 425.

EXPERIENCE

CONCERNANT LA GÉNÉRATION DES CHAMPIGNONS,

PAR M. GLEDITSCH.

Traduit du Latin.

Le quatorzieme du mois de Décembre de l'année derniere, (1748) par un vent de Midi fort doux & tirant à la pluye, j'expoſai à la chaleur modérée d'un fourneau dix vaſes cylindriques bien nets, & de diverſe longueur & largeur. Les ayant enſuite numerotés je les remplis jusqu'à la moitié, pendant qu'ils étoient encore chauds de petits morceaux de Melon de Surinam mûr & tout frais, & les ayant exactement couverts avec de la mouſſeline, je les plaçai dans des lieux ſéparés.

Je mis le vaſe No. I. dans un endroit de mon Jardin où il y a de l'ombre, & qui regarde l'Occident, & je répandis deſſus une quantité de feuïlles pourries de Tilleul, de Sureau, de Vigne, &c. Je poſai le No. II. environ à trente huit pieds du premier, du coté oppoſé au Midi, dans une chambre où l'air n'entre point pendant presque toute l'Automne.

A dix pieds environ du No. I. je mis le No. III. dans du fumier de cheval pourri, & déjà rempli d'une abondance trés grande de pieces de champignons: & cela dans une Ecurie ouverte vis à vis de l'Orient.

Et

Et à cent pieds de là je portai le No. IV. dans une Cave aſſez humide, & extrémement pleine de vapeurs.

A cent vint ſix pas du No. I. étoit le No. V. ſous un ſceau de bois dans l'etage inferieur de la maiſon, dans une chambre qui avoit été fermée pendant quelque tems, & où il y avoit beaucoup de vapeurs.

Le No. VI. fut porté au plus haut étage de la Maiſon, & poſé à la hauteur de dixhuit pieds dans une cuiſine, dont la cheminée étoit ouverte; tandis que le No. VII. etoit dans une chambre oppoſée qui regardoit l'Orient, auprés de la fenêtre.

Le No. VIII. eut pour ſéjour une chambre de l'etage ſupérieur, qu'on tient fermée toute l'année, & y fut poſé à la hauteur de vint quatre pieds: & enfin dans l'endroit le plus élevé de la Maiſon, & qui eſt tout prés du comble, je ſuſpendis avec un fil à la hauteur de trente pieds les No. IX. & X. afin que l'air y eut un plus libre accés.

Dés le dix-huit de Decembre, on remarquoit que le Melon avoit ſouffert dans la plûpart des verres un changement qui ſe manifeſtoit tant à la couleur qu'à l'odeur, à l'exception des No. IX. & X. où les morceaux de Melon étoient demeurés dans leur parfaite integrité. Le vint & un ſuivant, la ſolution du Melon en pourriture étoit tout a fait ſenſible dans les No. I. II. III. & V. & à la ſurface de la ſubſtance pourrie on voyoit par ci par là des efflorescences de *Byſſus* en forme arrondie, & compactes. Le dégré de corruption étoit moins manifeſte dans les No. IV. VI. VII. & VIII. & il n'y paroiſſoit aucune efflorescence fongueuſe. Pour les No. IX. & X. tout y étoit encore demeuré ſans la moindre altération.

Le tems étant toujours fort doux avec un Ciel ſerain, le vint quatre Decembre, les taches obſervées dans les No. I. II. III. & V. s'etendirent, devinrent plus nombreuſes & plus veluës, & couvrirent toute la ſurface du Melon. Mais dans un des morceaux, ſous ce duvet blanc comme la neige & trés fin, on voyoit d'autres parties arrondies, qui s'etendoient, & dont la couleur étoit verdâtre, cendrée ou noirâtre. Elles avoient de la reſſemblance avec les premieres

taches, mais le velu de leur ſurface échapoit par ſa petiteſſe à l'oeil même armé.

Tous les phenomenes qui arrivoient aux petits morceaux de Melon renfermés dans les differens verres, s'accordoient exactement, & jour par jour, avec ceux qu'éprouvoient des morceaux d'une grandeur conſidérable que j'avois mis en dehors à coté de chaque verre.

Le vint-huitième jour de Decembre, qui étoit le quatorzieme de l'Experience, il arriva un changement extraordinaire aux taches, & les N. I. &. V. fournirent un ſpectacle des plus agréables. Ce duvet fin & blanc dont nous avons parlé, s'étoit augmenté au point de remplir presque toute la capacité du verre; & cet amas comprimé & confus de filamens qui, quatre jours auparavant, ne pouvoit être apperçu par les meilleurs microſcopes, au bout de ce tems-là jettoit une quantité exceſſive de filets trés minces & plus que capillaires. Ces filets étoient les uns plus courts, & garnis d'eminences, comme des bouquets de plume; les autres plus longs, & terminés par de petites têtes.

Dans les principaux filets & les plus longs, les petites têtes étoient en ovale arrondi, tranſparentes, & aſſez polies, droites, ou courbées; dans les filets plus petits & plus gros, qu'on pourroit appeller monſtrueux, les petites têtes étoient le double plus grandes, & de chacune d'elle ſortoit un autre filet, ou petiole, ſurmonté aſſez ſouvent d'une trés petite tête, d'où ſortoit un ſecond filet; & cela alloit quelquefois jusqu'au troiſième.

Le même jour j'apperçus auſſi des filets dans les N. II. & III. mais beaucoup moindres & plus rares: le reſte de la ſubſtance n'etoit pas encore dévelopé. Le V. avoit aſſurément les plus petits de tous, & l'oeil nud avoit bien de la peine à les diſcerner.

Les No. VI. & VIII. avoient du duvet, qui tapiſſoit bien toute la cavité, mais qui n'etoit pas auſſi fourni que celui des précedens. Dans le No. VII. les filets etoient tout à fait dégarnis.

Le

Le jour susdit, 28. du Mois, & 14. de l'Experience, on commença pour la première fois à remarquer la pourriture du Melon avec l'eruption des taches veluës dans les No. IX. & X.

Le premier de Janvier de cette année (1749.) les petites têtes des seconds filets, ou *petioles*, dans les No. I. & V. etoient plus épaisses & gonflées d'une pouffiere trés subtile. Dans les No. II. & III. les filets étoient plus allongés avec de petites têtes épaisses & tirant sur le brun. Le duvet des No. VII. & VIII. avoit déja jetté des filets de coté & d'autre, & dans les No. IX. &. X. où le duvet étoit le plus mince de tous, il s'etoit un peu élevé.

Sous ce duvet sortoient de la substance pourrie du melon des efflorescences, ou taches bleuâtres, tirant sur le brun, ou noirâtres, la plupart d'une texture visqueuse, & ressemblante à de la cire, ou à du cuir.

Le 6. Janvier la rigueur de la saison arréta la végétation des Champignons, & je portai tous mes verres dans une chambre plus tempérée, afin d'y continuer mes Observations.

Le 8. j'examinai avec un bon Microcope de M. *Lieberkühn* les plantes contenuës dans le No.I. & je vis distinctement, que des semences trés déliées de trois especes, qui voltigent en l'air pendant l'Automne, s'etoient insinuées dans les verres à travers la mousseline, y avoient jetté des racines dans les petits morceaux pourris de melon, & avoient produit de petites plantes, chargées en partie de fleurs & de semences.

La premiere Plante, qui occupoit le plus d'espace dans le verre, étoit celle qu'on nomme en Allemand, *grauer gemeiner Schimmel*; Moisissure grise ordinaire; *Mucor vulgaris, capitulo lucido, per maturitatem nigro, pediculo griseo.* Mich. N. P C. G. 215. Tab. XCV. Fig. 1.

La seconde étoit cette jolie espece de *Byssus* delié, qu'on définit: *Botrytis comata, grisea, caule simplici, crassiore, seminibus rotundis.* Mich. N. PC. G. Tab. XCI. Fig. 1. en Allemand, *grauer*

haar ſchimmel. Elle eſt beaucoup plus baſſe que la précedente, & le plus ſouvent couverte. Ses filets, avant le tems de la fructification, ſe diviſent en pluſieurs branches, ſont tranſparens, excepté le centre qui eſt opaque, & ſont garnis de tubercules ſuivant leur longueur, épars ou diſpoſés par rangs, comme dans la plupart des eſpeces du *Byſſus*. Mais dans celle-ci ces tubercules ſont de vrais germes, qui ſe dévelopent enſuite en filets, ou branches à fruit.

La troiſieme ſorte de Plante, qui n'occupoit que de petits eſpaces au fonds, & que les deux précedentes couvroient entierement, étoit celle qu'on nomme *Tremella ſphærica, ſeſſilis, gregaria, nigra.*

Parmi ces petites Plantes ſi déliées étoient encore répandus d'autres corpuſcules arrondis, renverſés, velus, & monſtrueux, qui n'acqueroient leur détermination que trés lentement, mais qui à la fin ſe dévelopoient dans l'eſpece ſusdite de *Byſſus*.

J'obſervai dans le No. II. que l'eſpece de moiſiſſure dont j'ai parlé, s'etoit tellement accruë en grandeur, qu'une partie de ſes filets traverſoit la mouſſeline, & dépoſoient dans ſes petits poils leurs ſemences mures.

Le No. III. renfermoit l'eſpece de *Byſſus* dont j'ai déjà ſouvent parlé, entremêlée d'un trés petit nombre de Plantes de moiſiſſure. Cependant ce *Byſſus* avoit l'air tout à fait étranger, & ne reſſembloit point à celui qui eſt repreſenté dans *Michelius*, Tab. XCV. Fig. 1. & qui a auſſi crû dans le verre. Car les filets, qui autrement doivent porter leurs fruits au ſommet, ou prés du ſommet, avoient leurs petits paquets de ſemence, ou au milieu, ou vers le bas; ou bien les germes étoient répandus tout autour ſuivant la longeur, ce qui rendoit ces filets annelés, ou comme couverts de verruës. De plus ces filets partant d'une tige plus forte, étoient plus parfaits dans cette eſpece que dans les autres; ils paroiſſoient gris à l'oeil nud, mais à l'oeil armé ils étoient d'un blanc de neige, & aprés la fructification tout à fait noirs.

Il y

Il y avoit dans le No. IV. du *Byſſus*, & deſſous une membrane visqueuſe, ridée & ſans forme, fort ſemblable à la *Tremelle;* & trés peu de Moiſiſſures à *petioles*, embarraſſées dans le *Byſſus.*

On ne trouvoit dans le No. V. comme dans le III. que du *Byſſus* ſeul, avec une maſſe visqueuſe ſemblable, qui étoit en partie ſphérique, en partie ridée, déployée ou membraneuſe.

J'ai rencontré dans les No. VI. VII. & VIII. le *Byſſus* chargé de fruits, mélé avec pluſieurs Plantes imparfaites; & pour le IX. &. X. qui étoient plus élevés de trente pieds que tous les autres, il y avoit pareillement du *Byſſus*, & de la *Tremelle.*

Toutes ces Obſervations ne permettent pas de douter, que les ſemences, peut-être à cauſe de leur peſanteur ſpecifique, différent ſuivant les lieux; que dans les plus humides & les plus bas la Moiſiſſure a ſurpaſſé le *Byſſus* & la *Tremelle;* au lieu que dans les plus éléves & les plus ſecs, ce ſont le *Byſſus* & la *Tremelle* qui l'emportent ſur la Moiſiſſure, dont je n'ai pû même trouver aucun veſtige dans quelques uns.

Les ſemences du *Byſſus* ne ſe préſentent jamais à l'oeil nud, que fort copieuſement raſſemblées en une pouſſiere griſe, ou ſurnageant à l'eau ſous la forme d'une cuticule poudreuſe; mais au moindre mouvement elles s'elevent comme des vapeurs trés ſubtiles, & ſe dérobent d'abord à l'oeil nud. J'ai raſſemblé quelquefois la fumée de cette pouſſiere ſeminale dans un verre mouïllé & ſuſpendu au deſſus des petites plantes de *Byſſus*, chargées de leurs ſemences mûres, que la plus legère preſſion du doit faiſoit envoler, & monter dans la cavité du verre.

Les ſemences de *Byſſus* qui flottent dans l'air avec de petits oeufs d'inſectes, & des vapeurs de differente eſpece, ſont tantôt plus legères, tantot plus peſantes, ſuivant les divers changemens de l'air; & par conſéquent en ſe deſſéchant dans un air plus rare elles montent, & en s'appeſantiſſant dans un air humide & abondant en vapeurs elles deſcendent.

Au

Au mois de Fevrier, dans un poële chaud, à cauſe de la raréfaction & de l'expanſion de l'air, les ſemences parvenuës à leur plus grande hauteur, ſe portoient contre les vîtres des fenêtres qui avoient quelque humidité, s'y attachoient ſous la forme d'une pouſſiere trés mince, & les obſcurciſſoient. Elles végéterent enſuite tant dans les plombs des vitres que ſur les vitres mêmes, & y firent des taches de *Byſſus* très abondantes, en forme arrondie, dont une partie fleurit, comme elles l'avoient fait dans les No. I. II. III. IV. &c. & l'autre partie périt, lorsque la chaleur du Soleil ſurvint au mois de Mars.

Quelle étonnante petiteſſe, & quelle prodigieuſe quantité de Corpuſcules parfaitement organiſés, dont cent mille égalent à peine la quatrieme partie d'un grain! Et cependant les genres & les eſpeces en ſont déterminés avec toute l'exactitude poſſible; ces petites Plantes vivent à l'air, elles échapent aux yeux, elles s'attachent de toutes parts aux Animaux & aux Plantes tant vivantes que mortes, nous les reſpirons avec l'air par le nés & par la bouche ſans nous en appercevoir, tous nos alimens, toutes nos boiſſons en fourmillent, & nous les engloutiſſons en mangeant & en bûvant.

MANIE-

MANIERE DE CONSTRUIRE UNE ECHELLE DE BAROMETRE, QUI INDIQUE DIRECTEMENT LA VERITABLE PRESSION DE L'AIR, ET QUI CORRIGE LES DÉFAUTS CAUSÉS PAR LES ALTERATIONS QUE LA CHALEUR DE L'AIR FAIT ÉPROUVER AU MERCURE,

PAR M. C. F. LUDOLFF.

Traduit du Latin.

Quoique les Phyſiciens ayent ſouvent employé leur génie & leur application à faire des Barometres, qui montraſſent exactement la peſanteur & la preſſion de l'Atmoſphere, ils ne me paroiſſent pas y avoir encore réüſſi. Les Obſervations d'*Otton de Guericke* ayant appris que le vif-argent renfermé dans un tuyau de verre, & demeurant dans la même partie de la ſurface de la terre, n'y conſervoit par toujours la même hauteur, mais qu'elle varioit journellement dans l'eſpace de certaines limites; la plûpart de ceux qui ont voulu tirer parti de cette découverte, n'ayant eu pour but que d'augmenter l'etenduë de l'Echelle, ont inventé des Inſtrumens, ou trop difficiles à conſtruire, ou ſujets à divers accidens qui les détruiſent bientôt, ou enfin défectueux à pluſieurs égards. Je doute pourtant beaucoup qu'aucune Echelle plus grande, & plus diſtincte

que celle qui montre la hauteur du Mercure dans le tube de Toricelli en pouces & en lignes, puiſſe être d'une utilité plus réelle, ſoit qu'on veuille connoître la denſité & l'etat de l'air, pour déterminer, par exemple, la réfraction de la lumiere, la propagation du ſon, la hauteur du lieu, &c. ſoit qu'on ait deſſein de prédire les differentes températures de l'air, fondées ſur l'inſpection du Barometre. De toutes les corrections du Barometre employées pour cette fin, je n'en connois point qui vaille à beaucoup prés celle de M. *Amontons*, qui ſans penſer à donner plus d'etenduë à l'échelle, ne s'eſt attaché qu'aux moyens de la rendre plus exacte. Car ayant découvert que les variations ordinaires & déterminées de la chaleur dans les differentes ſaiſons, faiſoient ſouffrir au Mercure des changemens dans ſon poids ſpécifique & dans ſon volume, qui alloient à la cent quinzieme partie de ce volume, il conſtruiſit des Tables, ſuivant leſquelles chaque hauteur obſervée du Mercure doit être corrigée par le moyen du Thermometre. En effet il eſt évident que le même poids de l'air, qui dans le froid de l'Hyver éleve le Mercure à une certaine hauteur, par exemple, de 27 pouces Rh. & 2 lignes, en Eté fait monter néceſſairement le même Mercure plus haut dans le tube de Toricelli, ſi par la chaleur ſon volume eſt accru d'une cent quinzieme partie, qui peut faire environ trois lignes.

La même raiſon qui me porteroit à ſouhaiter qu'on fit des Barometres, qui indiquaſſent directement, infailliblement, & par un même acte, la preſſion veritable de l'air; cette même raiſon, dis-je, me rend encore ſenſible à deux inconvéniens. Le premier, c'eſt que toutes les fois que je conſulte le Barometre, il faille recourir aux Tables d'*Amontons*, pour ſa correction; le ſecond, que l'indication du Barometre eſt ſelon moi imparfaite, puiſqu'elle ne montre que la hauteur du Mercure, & qu'il faut faire un calcul, avant que de pouvoir déterminer la preſſion actuelle de l'air. Je vais donc propoſer les régles qu'il convient de ſuivre, pour conſtruire une Echelle qui remédie à ces défauts, & j'y joindrai la figure, qui repréſente cette conſtruction.

D'abord

D'abord déterminons que l'Echelle montre la preſſion de l'Atmoſphere au deſſus d'un pouce quarré. Comme la peſanteur ſpecifique du vif argent eſt à celle de l'eau dans la proportion de $13\frac{1}{2}$ à 1. & qu'un pied cubique d'eau peſe 64 livres 7 onces & 2 dragmes, (la livre étant de 16 onces, l'once de 8 dragmes, & la dragme de 60. grains,) ce qui fait 495000 grains, c'eſt à dire, 870 livres, une once & ſept dragmes; & un pouce cubique de Mercure, (c'eſt à dire, la 1728. partie d'un pied,) peſera 3867 grains. De plus, la plus grande hauteur du Barometre que fourniſſent à Berlin les Obſervations Metéorologiques étant de 29 pouces & 7 lignes, montre que la preſſion de l'air au deſſus d'un pouce quarré, eſt alors de 14 livres, 14. onces, 3 dragmes & 38 grains; & le moindre hauteur obſervée à Berlin etant de $27''\ 2'''$, le pouce quarré eſt alors preſſé du poids de 13 livres, 10 onces, 6 dragmes & 53 grains.

Mais au lieu des colomnes du poids indiqué, ſuppoſons en deux autres, l'une de 14 livres & 15 onces, & l'autre du poids préciſement de 13 livres & 11 onces; la hauteur de la premiere ſera de $29''\ 7'''\ 5''''$, celle de la ſeconde de $27''\ 2'''\ 2''''$, & les differences des hauteurs de ces colomnes ſeront $2''\ 5'''\ 3''''$, les differences de leurs poids étant de 20 onces. Si l'on diviſe donc l'eſpace $2''\ 5'''\ 3''''$ en 20 parties égales, on aura dans nôtre Echelle les differences des preſſions de l'Atmoſphere d'une once à l'autre.

Outre cela, il eſt conſtant que le Mercure, dont nous avons poſé la peſanteur ſpecifique à celle de l'eau comme $13\frac{1}{2}$ à 1, étant préciſément à $27''\ 2'''\ 3''''$ au deſſus du pouce qnarré, preſſe avec une force égale à 13 livres & 11 onces. Mais il faut conſidérer que, lorsqu'on a recherché les peſanteurs ſpecifiques de l'eau & du mercure, les experiences ont été faites ſur l'eau & ſur le mercure qui étoient déja environ au 31. degré de la chaleur du Thermometre de M. *de Réaumur*; car il eſt naturel de faire de ſemblables experiences, quand l'Atmoſphere eſt à ce degré de chaleur; ou même ces matieres le conçoivent, lorsquelles ſont maniées, & par la proximité de celui

qui fait l'expérience. Si donc on tire le Mercure de cet état, ſoit en le dilatant par une augmentation de chaleur de 9 degrés, ſoit en le condenſant, par une diminution de la chaleur jusqu'au 14 dégré de froid; il eſt aiſé de concevoir que le Mercure demeurant renfermé dans le même tuyau, parcourt par ſa ſurface ſuperieure un 115. de ſa hauteur; ſçavoir, dans le cas que nous indiquons, ſi l'on diviſe $27''\ 2'''\ 2''''$ par 115. un eſpace de $2'''\ 8''''$ ſcrupules, (c'eſt à dire, dixiemes de ligne,) & comme l'intervalle du 13 au 22 degré de chaleur dans le Thermometre de M. *de Réaumur*, fait le quart de toute l'Echelle par rapport à nos faiſons; il faut poſer pareillement le quart de ces deux lignes, & huit ſcrupules, c'eſt à dire, 7 ſcrupules au deſſus de $27''\ 2'''\ 2''''$, & 21 ſcrupules au deſſus du même point. D'où il paroit auſſi que le même poids de l'air, ſçavoir 13 livres & 11 onces, tiennent en Eté le Mercure dans le Barometre à la hauteur de $27''\ 0'''\ 1''''$.

Voyez la Figure.

Il ſera bien aiſé préſentement de conſtruire l'Echelle deſirée. Qu'à la baſe du rectangle de metal FI. on prenne la ligne de 3 à 4. pouces AB diviſée en 36 parties égales; & que l'on compte & marque ces parties comme dans l'Echelle du Thermometre de M. *de Réaumur*, depuis ſon 22 degré de chaleur jusqu'au 14 de froid. Qu'au deſſus des points A & B on eleve des perpendiculaires; qu'on faſſe AD $2'''\ 8''''$, DC $2''\ 5'''\ 3''''$ & qu'on rende CE égal à DC. Qu'on diviſe CD & BE en 20 parties égales; qu'on tire les lignes DB & CE, & entr'elles les autres paralleles ſuivant les diviſions. Qu'au premier point depuis B on écrive 13 livres 12 onces; quatre points au deſſus 14 livres, & ainſi de ſuite. Enfin, qu'à coté de la ligne AC on marque la meſure Rhinlandique, en ſorte que le commencement du 28 pouce ſoit un ſcrupule au deſſus de la baſe AB.

La planche de bois du Barometre, qui doit être de bouleau, ou de ſapin, parce que ces eſpeces de bois ſont celles qui ſouffrent le moins de changement par la chaleur dans la longueur de leurs fibres; cette planche, dis-je, étant donc ajuſtée & travaillée, de maniere

que

que le rectangle de metal placé à la diſtance de 27/// 1//// de la ſurface du Mercure, qui repoſe ſur le fonds de la boule d'embas, puiſſe être avancé à volonté à droite & à gauche; alors, toutes les fois que le degré de l'Echelle du Thermometre AB, qui eſt indiqué par le Thermometre qu'on place dans ce moment à coté, eſt mis immediatement dérriere le tuyau du Barometre, la veritable preſſion de l'air au deſſus d'un pouce quarré, ſe trouve auſſitot indiquée par livres & onces, à côté de la ligne BE.

Enfin rien ne manquera à la perfection de cet Inſtrument, ſi vous mettez une vis au deſſus de la boule inferieure du tuyau, à l'aide de laquelle on puiſſe un peu le faire monter ou deſcendre, afin que la ſurface du Mercure, qui repoſe ſur le fonds de la boule, demeure toujours vis à vis de la ligne, qui marque le commencement de la hauteur.

Peut-être que ceux qui ſe ſerviront d'une ſemblable Echelle pour les Obſervations Metéorologiques, appercevront mieux la liaiſon de ces Obſervations avec les variations du Ciel, en comparant immediatement la peſanteur de l'air avec les Phenomenes de ſa température.

OBSERVATIONS

SUR L'HUILE QU'ON PEUT EXPRIMER DES FOURMIS,

AVEC QUELQUES ESSAIS SUR L'ACIDE DES MEMES INSECTES,

PAR M. MARGGRAF.

Traduit du Latin.

I.

L'Huile exprimée eſt une graiſſe fluïde, qu'on tire des ſujets où elle ſe trouve, ſans addition d'aucunes autres graiſſes, & par la ſimple opération de l'expreſſion. Cette huile dans cet état refuſe de ſe mêler avec l'eau ; elle ne ſouffre point de ſolution dans l'eſprit de vin le mieux rectifié, & ne s'unit point à lui : lorsqu'on entreprend de la diſtiller avec de l'eau elle ne veut point paſſer par l'alembic ; quand on y joint du ſel alcali fixe, elle reſſemble à du ſavon ; ſeule elle prend feu difficilement, mais dés qu'on y met une mêche, elle brûle ſans peine ; de plus dans la coction elle réſout & imbibe le ſoufre, auſſi bien que les autres corps huileux, ou réſineux : avec la chaux de plomb elle prend une conſiſtance d'emplâtre, & elle laiſſe ſur le papier une tache huileuſe.

II. C'eſt une choſe aſſez reconnüe & conſtante, que le régne végétal fournit une quantité conſiderable de ces huiles exprimées, qu'on tire de diverſes ſemences, noyaux & fruits ; telles ſont les huiles de pavót,

pavôt, de rave, de lin, de chanvre, & celles d'amendes & d'olives. Mais on connoit d'autant moins de pareilles huiles qu'on puiſſe tirer du régne animal, & ſéparer des parties des animaux, à moins qu'on ne veuïlle mettre dans ce rang de legères graiſſes de certains poiſſons & de quelques autres animaux. A cela prés il n'y a rien de connu dans tout le régne animal, à quoi le nom d'huile exprimée convienne, que celle qu'on tire des jaunes d'oeufs, en faiſant durcir des oeufs, les dépouïllant enſuite du blanc, faiſant rôtir le jaune à un petit feu, & exprimant avec une preſſe chauffée ce qui en ſort dans une quantité aſſez conſiderable.

III. N'y ayant donc encore d'autre huile exprimée connuë qui provienne du régne animal que celle dont je viens de parler, il m'eſt arrivé de découvrir quelque choſe de ſemblable dans un petit inſecte; & la choſe m'a paru ſi ſinguliere que je n'ai pu m'empêcher de rapporter ſans délai cette découverte, & de publier en même tems la maniere de ſéparer cette huile du ſujet en queſtion.

IV. L'inſecte dont je veux parler eſt la Fourmi, qui ſe trouve dans *Linnæus* (*) ſous la déſignation de *Formica* 2. & dans *Ray* (**) ſous celle de *Formica media rubra*. Pendant les mois de Mai & de Juin de cette année, je fis ramaſſer une quantité de ces petits animaux vivans; & cela dans le deſſein d'en tirer non ſeulement l'huile eſſentielle qui s'y trouve, mais encore l'acide qu'ils renferment. Pour cet effet je les mis dans une ample retorte de verre, je verſai de l'eau deſſus, je plaçai cette retorte dans une coupelle pleine de ſable, j'y adaptai un récipient proportionné, & aprés avoir luté les jointures, j'entrepris la diſtillation, augmentant inſenſiblement le feu, & le donnant à la fin ſi violent que l'eau bouïlloit. Je verſai environ la moitié de cette eau, & enſuite, les vaiſſeaux étant réfroidis, je trouvai dans le récipient une eau qui avoit quelque acidité, avec l'huile eſſentielle de Fourmis qui ſurnageoit. Je ſéparai cette huile de l'eau, comme on le fait ordinairement, avec du coton, & je la conſervai à part.

V. Je

(*) *Animal. Succ.* 85. f. (**) *Hiſtor.* 69.

V. Je ne placerai ici qu'un petit nombre de remarques ſur cette huile eſſentielle de fourmis, ſavoir ;

1. Qu'aucun Eſprit de vin ordinaire le plus rectifié ne ſauroit en produire la ſolution ; mais qu'elle s'opere parfaitement par le moyen de l'eſprit de vin, que le ſel alcali fixe a delivré de ſon eau ſuperfluë, & qui a été de nouveau diſtillé ;
2. Que cette huile réſout entierement le phoſphore ſolide, mais ſans qu'il ſoit rendu lumineux par la ;
3. Que, bien que je ſoupçonne cette huile de renfermer quelque léger acide, il ne ſe manifeſte cependant point, & ne montre aucune réaction, lorsqu'on le mêle avec une portion de ſel de tartre & de limaille de fer, & qu'on l'expoſe à la digeſtion.
4. Qu'il n'imprime aucune ſaveur brûlante à la langue, & enfin,
5. Qu'il frappe les narines d'une odeur toute particuliere.

VI. Ce mixte, que nous avons dit §. IV. reſter aprés la diſtillation dans la retorte, je l'ai mis dans un petit ſac de toile net, afin que le ſuc acide qui paroiſſoit déja hors des fourmis, en découlât dans un vaſe bien nettoyé. Cela fait j'ai encore mis mes fourmis reſtantes dans le petit ſac de toile ſous une preſſe d'etain nette ; & j'ai preſſé de toute ma force, afin d'en tirer entierement tout l'acide. C'eſt alors qu'au bout d'un court eſpace de tems j'ai remarqué avec une extreme admiration une certaine graiſſe, qui aprés un autre eſpace de tems s'eſt montrée encore en plus grande abondance. Je l'ai enlevée avec une cueillere, & l'ai miſe dans un verre bien net, je l'ai entierement dégagée du ſuc acide aqueux qui y etoit encore attaché, & je l'ai conſervée ainſi à part.

VII. Quoiqu'aprés la fin de cette Experience je fuſſe pleinement convaincu que les Fourmis contenoient une huile qui peut en être exprimée, comme il me reſtoit pourtant encore quelques doutes à cet égard, j'ai réïteré le même travail une ſeconde, & une troiſieme fois, en prenant les fourmis les plus nettes, & en me ſervant de nouveaux vaiſſeaux le plus exactement nettoyés ; & j'ai éprouvé le plus ſenſible

plaiſir,

plaiſir, en voyant que tout s'accordoit parfaitement avec la prémiere opération. Bien que je n'aye pas exactement peſé les fourmis que j'ai employées, je puis pourtant aſſurer qu'elles rendent une quantité d'huile qui n'eſt pas des moindres. Car en rempliſſant de fourmis un verre qui contient environ ſix meſures d'eau, on peut compter d'en tirer par la voye ſusdite au moins une once & demie, & même jusqu'à deux onces d'huile.

VIII. Cette huile exprimée des fourmis poſſede, & fait voir tous les caracteres, toutes les proprietés des autres huiles exprimées. Elle ſent en quelque ſorte les fourmis ; ſa couleur eſt d'un brun rougeâtre, ſi on l'expoſe à l'air ordinaire, elle paroit tranſparente ; une mediocre gelée l'epaiſſit, & par conſéquent diminuë ſa tranſparence ; elle imprime au papier une tache huileuſe ; elle nàge au deſſus de l'eau, & refuſe de s'y mêler ; elle n'eſt point imbibée par l'eſprit de vin le plus rectifié ; en la diſtillant avec de l'eau, elle ne s'eleve, ni ne paſſe par l'alembic ; elle brûle, comme toute autre huile, par le moyen de la mèche ; dans la coction elle diſſout le ſouffre, & ſe change avec lui en foye huileux de ſouffre. En la mêlant avec d'autres graiſſes & corps huileux, elle s'y unit, & en procure la ſolution. Cuite avec la chaux de plomb, par exemple, ou le *Minium*, elle conſtituë une maſſe de la forme ordinaire des emplâtres, & avec le ſel alcali fixe, ſurtout le cauſtique, elle fournit un ſavon ordinaire & bien lié.

IX. Ayant ainſi ſuffiſamment démontré, à ce que j'eſpere, que cette huile qu'on tire des fourmis par voye d'expreſſion a tous les caracteres d'une veritable huile ; je dois ajouter que l'inſecte qui s'attache aux racines de la Plante nommée *Polygonus coccifera*, & ſur lequel *Breynius* (*) a dit des choſes qui méritent d'etre luës, que cet inſecte, dis-je, aprés qu'il s'eſt dépouillé de ſon envelope, fournit auſſi une graiſſe expreſſible, qu'on pourroit mieux examiner, ſi l'occaſion ſe préſentoit de raſſembler une grande quantité de ces inſectes. C'eſt cette graiſſe, mêlée à la ſubſtance de ces inſectes, qui empéche

(*) Dans ſon *Hiſt. nat. Cocci radicum ſiniſtri.*

que les eſſais de ceux qui voudroient s'en ſervir pour teindre de la laine & d'autres choſes en couleur de pourpre, n'ayent tout le ſuccés déſiré, quoique cet obſtacle pût-être ſurmonté en uſant de certaines précautions, & de moyens convenables.

X. Je paſſe préſentement à l'examen de l'acide des fourmis. J'ai mis dans une retorte de verre cette liqueur acide, que j'avois ſéparée des Fourmis par la voye indiquée au §. VI. & y ayant appliqué le récipient, je l'ai expoſée à la diſtillation pour en tirer ce qu'il y avoit d'aqueux, dans une coupelle de ſable, & d'abord à petit feu, faiſant une extreme attention au moment où des gouttes fort acides commenceroient à paroitre. Alors j'ai changé le récipient, & j'ai continué la diſtillation, tant qu'il a voulu paſſer quelque choſe qui ne ſentit pas le brulé ; & cela étant fait, j'ai trouvé dans le récipient une liqueur dont le goût & l'odeur avoient une trés forte acidité. Pour la retorte il y eſt demeuré une maſſe épaiſſe tirant ſur le noir, qui, outre les parties gelatineuſes des fourmis, renfermoit encore beaucoup d'acide, qu'on peut en ſéparer parfaitement, ſi on le juge à propos, par la diſtillation au bain Marie.

XI. Cet acide des fourmis entre en effervescence avec l'un & l'autre des ſels alcalis, c'eſt à dire, avec le fixe & le volatil, & forme auſſi avec l'un & l'autre un ſel moyen. Que ſi on le méle jusqu'à le ſaouler avec le ſel alcali fixe, & qu'enſuite on le faſſe évaporer doucement, il ſe réduira à la fin en cryſtaux oblongs, qui étant expoſés à l'air, ſe fondront de nouveau au bout d'un eſpace de tems. Si l'on prend ces cryſtaux, ou plutôt tout ce mixte ſaoulé ſans l'avoir conduit à la cryſtalliſation, & que le diſtillant par degrés dans la retorte, on faſſe premierement ſortir toute l'humidité, qu'enſuite on donne un feu plus fort, & à la fin jusqu'à l'incandeſcence, en le pouſſant tellement que la retorte commence à fondre ; par cette voye on ne trouve d'abord qu'une liqueur trés peu acide, qui prend à peine la plus legere effervescence avec la ſolution de ſel alcali fixe. Il ſe manifeſte enſuite

enſuite un peu de liqueur plus urineuſe, & en partie ammoniacale : pour le reſte c'eſt une maſſe noire fonduë, qui demeure au fonds de la retorte, & qui a la ſaveur de leſſive, ou d'alcali fixe. Si on la fait diſſoudre dans l'eau diſtillée, qu'on la filtre, & qu'on en ſépare l'humide ſuperflu par une évaporation douce; il ſe forme en aſſez grands cryſtaux, ce qui n'a pas coutume d'arriver au ſel alcali fixe ordinaire, & la plupart des ces cryſtaux ſont d'une figure particuliere. Mis ſur du papier qui boit, & expoſés à l'air chaud, ils ſe deſſechent, & demeurent dans cet état ſec. Neanmoins ils entrent en efferveſcence avec les autres acides auſſi bien qu'avec le leur propre, conformément à la nature des ſels alcalis fixes, & outre cela ils ont une ſaveur fort alcaline. En un mot, & pour abréger, ils montrent toutes les proprietés de l'alcali fixe. Il demeure donc encore incertain, ce qu'eſt devenu l'acide, & où il ſe tient caché ? Mais quoiqu'en faiſant diſſoudre ces cryſtaux dans une quantité d'eau, & les diſtillant avec de l'huile de vitriol dans une retorte à tuyau, je n'aye pu en tirer rien d'acide ; cependant une vapeur blanche des plus pénétrantes, qui montoit pendant l'affuſion de l'huile de vitriol, & la facilité de ce ſel à ſe cryſtalliſer, me font ſoupçonner l'exiſtence d'un acide ſubtil, dont je pourrai peut-être dire dans la ſuite quelque choſe de plus circonſtancié.

XI. J'ai dit dans le §. precedent que l'acide des fourmis avec le ſel alcali volatil forme un ſel moyen. Ainſi en laiſſant tomber goutte à goutte ſur cet acide des fourmis un eſprit aqueux de ſel ammoniac, juſqu'à ce qu'il n'y ait plus d'efferveſcence, il en réſulte une liqueur ſaline moyenne ammoniacale. Lorſque j'ai diſtillé ce mixte ſaoulé par degrés dans une retorte de verre à laquelle j'avois adapté le récipient, il a d'abord fourni une liqueur ammoniacale, qui, dés que j'y ai verſé du ſel de Tartre en ſolution, a laiſſé aller de l'urineux, & en continuant le feu, paſſe de toutes parts, ne laiſſant que trés peu de matiere de charbon, & n'offrant pas la moindre trace de ſublimé ſec. Ainſi on peut fort bien comparer cette liqueur à celle qu'on prépare de la même maniere par le mélange du vinaigre & de l'eſprit urineux.

XII. Quant aux autres proprietés de cet acide, une choſe qui eſt encore remarquable, c'eſt ce que cet acide des fourmis ne précipite point la ſolution d'argent, de plomb, & de mercure, dans l'acide du nitre, ni celle de chaux vive dans l'acide du ſel; d'où il eſt aiſé de conclurre que cet acide n'a aucune affinité, ni avec celui de vitriol, ni avec celui de ſel commun.

XIII. Il a les rélations ſuivantes avec les métaux & les demi-metaux :

1. L'argent cru n'eſt point rongé par cet acide. Pour la chaux d'argent, précipitée de ſa ſolution dans l'eſprit de nitre par la ſolution de ſel de tartre, & bien edulcorée, ſi on la foumet avec cet acide à la digeſtion continuée jusqu'à l'ebullition, elle ſe diſſout entierement; & l'on peut précipiter de cette ſolution l'argent qui y eſt contenu par l'acide de ſel, auſſi bien que par le ſel de tartre diſſous, & même par le cuivre.
2. Cet acide n'attaque point par lui-même la chaux de Mercure; mais au contraire, pendant la digeſtion, le Mercure eſt revivifié de cette chaux dans ſa forme brillante. De plus je n'ai pu rien précipiter de ce mixte filtré, ni par l'acide du ſel, ni par le ſel de tartre en ſolution.
3. Le Cuivre eſt fort peu rongé par cet acide. Mais pour le *Crocus Veneris*, ou le cuivre calciné, ſi l'on en met une portion avec cet acide de fourmis à une forte digeſtion, il s'en fait une entiere ſolution. Et cette ſolution filtrée, & diſpoſée par l'evaporation à la cryſtalliſation, donne les plus beaux cryſtaux, verds & compactes.
4. La limaille de fer, quand, en la joignant à cet acide, on la traitte comme le cuivre ſusdit, en eſt trés violemment rongée; & cette ſolution filtrée forme à la fin de petits cryſtaux; ce qui eſt digne de remarque, parce qu'en prenant du vinaigre diſtillé, on ne reçoit point de cryſtaux.
5. Cet acide attaque fort peu la limaille & la chaux d'etain, & de ces ſolutions filtrées, en y ajoutant la ſolution de ſel de tartre, je n'ai pu précipiter que trés peu de choſe, ou plutot presque rien.

6. La

6. La limaille de plomb n'eſt point rongée par cet acide ; mais ſi l'on prend du plomb calciné, la choſe va fort différemment. Car ſi l'on joint cet acide au Minium, qu'on le ſoumette à une forte digeſtion, & qu'enſuite on filtre la ſolution, il en nait de trés beaux cryſtaux, qui reſſemblent beaucoup au ſucre commun de Saturne cryſtallisé.
7. Cet acide diſſout le Zinc avec une extreme force dans la digeſtion, & de cette ſolution filtrée ſe forment de beaux cryſtaux compactes, qui ne reſſemblent point à ceux que produit la ſolution du Zinc dans le vinaigre diſtillé. Cet acide diſſout pareillement la chaux de Zinc, mais ſans réaction ſenſible.
8. Il ne paroit pas que cet acide attaque beaucoup le Bismuth cru, le Régule d'Antimoine, ni leurs chaux. Car ayant verſé l'acide des fourmis ſur ces corps, l'ayant mis en digeſtion, & filtré, en y ajoutant enſuite la ſolution de ſel de tartre, je n'ai remarqué qu'un changement à peine obſervable.

XV. Par rapport aux corps dont la ſubſtance eſt de terre, cet acide diſſout les Coraux avec une grande vehémence, & prend enſuite avec eux une conſiſtance ſalino-cryſtalline, en conſervant toujours une forme ſéche. La même choſe arrive, quand on verſe cet acide ſur de la craye, & cette ſolution donne pareillement de beaux cryſtaux, qui gardent conſtamment la forme ſéche. De plus cet acide diſſout les yeux d'ecreviſſe, les coquilles des teſtacées, la pierre de chaux, la chaux vive, le marbre, les *ſphats* de chaux, les os calcinés, ou autres matieres ſemblables, & cela avec une grande ébullution. A quoi il faut ajouter qu'avec la chaux vive il ſe change auſſi en cryſtaux.

XVI. Ceci pourra ſuffire pour le préſent au ſujet des principales rélations de l'acide des fourmis ; & il ſera aiſé d'en inferer que cet acide a une trés grande affinité avec celui du vinaigre, quoiqu'il ne lui reſſemble pas parfaitement, & n'en ait pas toutes les apparences. Quant à l'Hiſtoire naturelle des fourmis, M. *Gleditſch* m'a aſſuré qu'il communiqueroit dans peu ſur ce ſujet à l'Academie des Obſervations particulieres & intereſſantes.

RÉLATION

CONCERNANT UN ESSAIN PRODIGIEUX DE FOURMIS, QUI RESSEMBLOIT A UNE AURORE BORÉALE,

PAR M. GLEDITSCH.

Traduit du Latin.

L'année derniere 1749. j'ai fait diverſes courſes, en toutes ſortes de tems & de ſaiſons, dans la contrée du *Havel*, qui eſt abondante en productions de la Nature, & où l'on peut faire bien des Obſervations intereſſantes. Errant un jour, au commencement de l'Automne, à travers les herbes & les pierres, je vis s'elever en l'air un ſpectacle, qui eſt à mon avis un des plus rares & des plus ſinguliers. C'eſt de ce ſpectale tout à fait agréable aux yeux, que je n'ai jamais rencontré, ni dans la Marche, ni ailleurs, & dont l'Hiſtoire naturelle du païs ne fait aucune mention, que j'ai deſſein de donner un récit circonſtancié.

Il importe pourtant, ce me ſemble, fort peu, que je ſois le ſeul, ou le premier, qui ait fait attention à cette merveilleuſe ſingularité, ou que d'autres l'ayent fait avant moi. Je ne déciderai donc rien dans ce cas douteux ; & tout ce que je puis aſſurer, c'eſt qu'il n'eſt parvenu à ma connoiſſance aucune rélation, ni Obſervation, qui ſe rapporte à ce ſujet. Pour ne rien déguiſer, il y a actuellement parmi les gens de lettres quelques particularités connuës, mais en trés petit nombre, qui

qui prouvent que les habitans de cette Province ont réellement obſervé ce beau ſpectacle pendant pluſieurs années. La meilleure partie des traditions là deſſus ne fournit que de petites obſervations tout à fait incompletes, qui paſſant de bouche en bouche ſe conſervent religieuſement parmi les païſans, les bouviers, les bergers, les gardeurs de chevaux, d'oyes, &c. Mais parce qu'une choſe eſt commune, faut-il la mépriſer, ſi elle eſt d'ailleurs digne d'etre connuë, & même neceſſaire, comme celle-ci, à l'hiſtoire des Inſectes ? Comme il faut avoir quelque indulgence pour le génie du ſiecle & la coutume, nous ne faiſons pas ici toutes les réfléxions que nous ſerions en droit de faire ſur la négligence qu'on témoigne dans nôtre Patrie pour l'Hiſtoire naturelle; & nous nous hâtons de venir au fait.

Le quatre Septembre de cette année, il faiſoit un jour également chaud & ſerain, avec un vent de Sud-Eſt qui ſouffloit fort doucement. Ce jour même, à cinq heures de l'aprés-midi, étant ſorti du Village de *Wagenitz*, j'arrivai à un grand enclos de pâturage, qu'une haute levée de terre ſépare du canal public, fort renommé dans toute la Province, & vulgairement appellé *der groſſe Graaben.*

Sur cette levée, le long du chemin, régne une allée de Saules, dont la plupart étoient déjà taillés, & qui conduiſit mes pas à un lieu voiſin, fort rempli de tuf, où je découvris une eſpece de terre fort blanche, diſpoſée par couches trés étroites, & dont j'avois ouï dire aux habitans pluſieurs choſes, qui ne s'accordoient point entr'elles. C'eſt pour cela que je voulois prendre moi-même de cette terre pour l'examiner, & au premier aſpect elle avoit l'air d'une eſpece de *Marne* trés déliée, & fort pure. Comme j'etois occupé à en ramaſſer, au milieu de mon travail, je fus détourné tout à coup par la vuë d'un ſpectacle qui paroiſſoit entre l'Orient & le Septentrion, & qui n'etoit pas moins agréable que nouveau. On auroit dit de loin une Aurore Boreale, & je laiſſai là ma terre pour ne m'occuper que de ce que j'appercevois, & découvrir ce que ce pouvoit être.

La

La ſituation du lieu d'où je commençai à obſerver ce Phenomène étoit telle, que j'avois à ma droite le Canal dont j'ai parlé, & à ma gauche les Villages de *Wageniz* & de *Bredekow*. Vis à vis ſe préſentoit un bosquet de ſaules aſſez bas, & au deſſus de ces ſaules dans l'eloignement le ſommet d'une fort belle forêt, qu'on appelle la *Lietſche*. Cette forêt ſemble de loin environner la Campagne voiſine, & la borner en forme de couronne.

L'etat du Ciel favoriſoit beaucoup l'apparence trompeuſe du Phénomene. Il étoit ſerein pour la grande partie, & l'on n'y voyoit que trés peu de nuages lumineux épars çà & là : ſeulement au deſſus de la forêt il etoit un peu obſcurci par des nuées noires.

Quant à l'eſpace qui ſéparoit le lieu où j'etois placé de ces bornes apparentes ; il n'y avoit de l'endroit d'où je commençai à obſerver le lever de ce beau ſpectacle, qu'un intervalle trés court & presqu'egal jusqu'aux bornes à droite & à gauche ; mais par devant cela s'etendoit bien jusqu'à deux mille pas.

Le ſpectacle même s'offroit aux regards de la maniere ſuivante. D'abord s'elevoient des colomnes de fumée, diſperſées de toutes parts en l'air, & diſpoſées du Midi au Septentrion. Ces colomnes un peu obſcures alloient & venoient çà & là avec une viteſſe inexprimable, mais toujours en s'elevant, & leur élévation devint telle, qu'elles parurent s'etendre au deſſus des nuës. Arrivées à ce point, elles ne diſparoiſſoient, ni en tout, ni dans la moindre de leurs parties ; mais au contraire elles ſembloient s'epaiſſir peu a peu,& s'obſcurcir de plus en plus. D'autres plus tardives ſuivoient les premieres, & s'elevoient pareillement, ou en s'elançant pluſieurs à la fois avec une viteſſe égale, ou en montant l'une aprés l'autre.

Quelques unes de ces colomnes avoient ceci de particulier,qu'elles paroiſſoient ſortir de nuées épaiſſes ſituées à l'horizon, au lieu que d'autres montoient en apparence de la forêt même, ou de la terre en l'air. Cette multitude de colomnes qui s'elevoient,& leur accroiſſement, durerent l'eſpace environ d'une demi-heure. Je puis aſſurer

que

que je n'ai jamais rien vû dans ce genre qui m'ait charmé à ce point là. De tous les Phenomenes qui ſe paſſent dans l'air, celui qui a la reſſemblance la plus parfaite avec le fait que je rapporte, c'eſt l'Aurore Boréale, quand du bord de ſa nuë il s'elance par jets pluſieurs colomnes de flamme & de vapeurs, pluſieurs rayons en forme d'eclair qui tendent à ſe réünir.

Tout étant dans cet état, comme j'etois fort en peine de trouver la véritable raiſon de ce prodige, rien ne pût m'empêcher de ſortir au plus vite des lieux comme enfermés par le feuïllage des arbres où j'etois pour me rendre à d'autres plus dégagés & à decouvert. Je ne rapporte point les jugemens de ceux qui ſe trouvoient avec moi, & qui pleins d'admiration faiſoient là deſſus toutes ſortes de raiſonnemens, qui ſeroient déplacés ici.

Plus j'approchois de l'endroit d'où j'avois obſervé peu auparavant que les colomnes partoient, plus leur obſcurité & leur épaiſſeur alloient en augmentant. Ces colomnes mêmes, qui de loin ne paroiſſoient que des fumées, non ſeulement venoient a ma rencontre, mais elles ſembloient auſſi prendre la direction contraire avec un mouvement fort imperceptible, & qui étoit une eſpece de balancement.

Quoique j'euſſe dans le commencement obſervé pluſieurs colomnes, qui pendant une demi-heure ſe ſoutenoient & s'accroiſſoient dans l'air; cependant la ſituation du lieu en fit diſparoitre pluſieurs peu à peu, en ſorte que je n'en pouvois plus compter que XIX. Une choſe qui me parut remarquable, c'eſt que le diametre apparent de chaque colomne, tant au milieu que vers les deux extremités, ſembloit être conſtamment de deux pieds. Les colomnes les plus éloignées diſparoiſſoient ainſi peu à peu, & pluſieurs fragmens inégaux, diſperſés dans l'air, ſe déroboient a la fin aux yeux, jusqu'à ce qu'il ne reſta plus que trois colomnes, qui étoient vis a vis, & tout prés de moi, parfaitement entières depuis le haut jusqu'au bas, que je reconnus être à vint ou trente pas l'une de l'autre, & que je me trouvai à portée de ſoumettre à un examen plus exact.

Chaque colomne qui flottoit dans l'air étoit un peu obſcure, reſſembloit à un réſeau fort délié, & avoit un mouvement inteſtin, comme de trémulation, ou d'ondulation : mais en la conſidérant de plus prés, on reconnoiſſoit une troupe innombrable d'inſectes volans, dont elle étoit compoſée toute entiere. Ces inſectes fort petits, tout à fait noirs, & ailés, conſervoient l'egalité & la forme de la colomne entiere, en montant & deſcendant continuellement avec régularité. C'eſt de là que venoit, à ce que je penſe, l'egalité du diametre apparent par toute la colomne. De plus, quoiqu'il ſe joignit à cela un autre mouvement de la colomne, par lequel l'air emportoit chacune d'elles dans une direction contraire, cela ne changeoit néanmoins & ne troubloit en rien cette égalité des inſectes en montant & en deſcendant.

Des trois dernieres colomnes une ſeule vint droit à moi, & comme je balançois ſi je m'oterois un peu de ſon chemin, je m'y trouvai tout à coup engagé : ce qui la dérangea en quelque ſorte, & parût arrêter le cours de ſa marche. La hauteur de la colomne, que j'avois vuë de loin dans les nuës, ou même au deſſus, étoit déjà diminuée de CC. pieds, & j'apperçus toute la colomne décroitre ſenſiblement de plus en plus. Chaque colomne, ou pour mieux dire, chaque troupe d'inſectes volans, touchoit presque à terre par ſon extremité inferieure ; & elle étoit compoſée de trés petites fourmis noires & ailées, toutes, autant que je pûs le voir, de la même grandeur & de la même forme.

Quelques unes de ces fourmis, en deſcendant d'une extreme hauteur, tomboient ſur les arbres, les buiſſons, les herbes, & même tous mes habits en furent garnis ; je les portai ſur moi comme mortes pendant longtems, & je rentrai au logis avec elles. Les autres volant de bas en haut montoient par pelotons, mais elles ſuivoient une voye ſi droite & ſi étroite, que celles qui montoient, n'embarraſſoient point celles qui deſcendoient, ni celles-ci les premieres ; & il n'arrivoit point comme aux eſſains des autres inſectes que la colomne formât

mât des replis inégaux, ſe courbât, s'arrondit, ou ſe défigurât en quelque autre maniere.

Il n'y a rien de plus commun & de plus connu, que ces eſſains ſi nombreux de couſins, qui paroiſſent au bord des rivieres, ou dans les prairies marécageuſes, qui prennent avec tant de rapidité les formes les plus variées & les plus inconſtantes, & qui repréſentant une ſorte de colomne, s'elevent fort haut, mais un moment aprés deſcendent, & ſe partagent en pluſieurs troupes inégales & à peu prés rondes, pour ſe réünir enſuite de nouveau, puis ſe partager, répetant continuellement ce manége. Les eſſains de fourmis en forme de colomne different de ceux-ci par l'uniformité ſinguliere & conſtante de leur figure, de leur hauteur, & de leur égalité, qui ne ſouffrent quelquefois aucune variation pendant une heure entiere, à ce qu'ont obſervé les gens de la Campagne.

J'ai déjà parlé un peu plus haut de ces colomnes de fourmis qui s'étendent dans les nuës, & au deſſus, & dont chacune m'avoit paru de loin monter en ligne droite, mais en l'obſervant de plus prés, je trouvai que ſa ſituation étoit un peu oblique. Car l'extremité ſuperieure tiroit à l Orient, & l'extremité inférieure à l'Occident. La colomne entiere flottant quelquefois vers l'Occident, paroiſſoit non ſeulement comme legèrement repouſſée, mais même forcée à prendre la ſituation contraire, qu'elle ramenoit pourtant bientôt aprés à la premiere. Je pouvois imprimer tant que je voulois le même changement à la colomne, toutes les fois que j'y entrois, ou que j'en ſortois. Neanmoins elle continua ſon chemin, juſqu'à ce qu'il ſurvint une forte roſée, qui la diſſipa peu à peu.

Par rapport aux fourmis même, dont il a été queſtion juſqu'ici, elles appartiennent à cette petite eſpece noire, fort incommode aux Oeconomes, qu'on nomme en Allemand *Biß-Miere*, & qui conſtruit ſon domicile dans les monceaux de terre des prairies. Dans chaque fourmiliere, parmi les fourmis aîlées, on en apperçoit d'autres plus grandes, qui ont l'air de mouches, & qui diffèrent du reſte, non ſeu-

lement en grandeur, mais auſſi en ſexe, les Obſervations ayant appris qu'elles étoient femelles. (*) Je n'ai point vu de fourmis de cette eſpece mêlées parmi les petites fourmis ailées, dont les colomnes ſont compoſées, leſquelles ſont les mâles. (**)

Les apparences du ſexe ſeroient-elles douteuſes dans les fourmis, lorſqu'elles ſont plus jeunes? N'y auroit-il que des fourmis mâles qui forment des eſſains, & volent en colomnes, ſéparément des femelles? Les femelles, quoique les plus grandes de toutes, en ſe plaçant au haut de la colomne, ne s'éloigneroient-elles point de la vuë, de maniere à ne pouvoir plus être diſtingueés? Où échapent-elles, parce qu'il n'y en a que très peu parmi une foule innombrable d'autres? Y auroit-il des années, & peut-être toutes, où les mâles ſont en plus grande abondance? Des Obſervations réïterées pourront répandre du jour ſur ces Queſtions.

Quant aux autres colomnes de fourmis que j'ai vuës, je ſuis aujourdhui en doute par rapport au ſexe, ſi elles étoient toutes compoſées de mâles & de femelles, ou non? Si toutes les colomnes ne renfermoient que des mâles, je pourrois conjecturer, ſans risque d'erreur, qu'il en eſt des fourmis comme des Abeilles, & conclurre, que les colomnes mâles de fourmis avoient été chaſſées des fourmilieres par les femelles, comme les mâles des Abeilles ſont tous les ans, vers le commencement de Septembre, bannis de la ruche, d'où ils s'envolent promtement, ſe diſſipent enſuite, & périſſent.

Que ſi les colomnes renfermoient des fourmis des deux ſexes, je n'héſiterois point à les regarder comme de vrais & nouveaux eſſains de jeunes fourmis, que les bornes trop étroites de leur domicile obligent à partir pour d'autres lieux, pendant que la ſaiſon les favoriſe, & qui vont ſe conſtruire de nouvelles demeures. De là viendroit ſans doute ce terrible combat entre de grandes & de petites fourmis, qui

(*) Voy. *An Account of Engliſh Ants, By the Rev.* Will. Gould. Lond. 1747.

(**) Voy. Abrot. *Script de Formicis Angliæ.*

qui ſe livrerent bataille autrefois, au deſſus d'un Poirier, dans le territoire de Bologne, en préſence de l'Armée d'*Eugene* IV. & qu'*Eneas Sylvius* rapporte, comme en ayant été témoin. (*)

Or, ſuivant les Obſervations des Auteurs, les fourmis d'une colonie n'en ſouffrent & n'en reçoivent jamais d'etrangéres; mais au contraire elles les chaſſent & les tuënt. Cela pourroit donner lieu à un nouveau doute. Chaque colomne, en s'elevant de la terre dans les nuës, & en groſſiſſant extraorninairement, ne peut le faire que par la réün on de pluſieurs eſſains de fourmis, ſortis d'autant de fourmilieres differentes, dont la concorde dure autant que la ſituation, la figure & la grandeur de la colomne. Que ſi donc les colomnes en queſtion ſont de vrais eſſains de jeunes fourmis, il faudra les regarder comme venant de differens endroits; & leur concorde de courte durée, qui les fait partir enſemble pour chercher de nouvelles demeures, n'aura lieu que tant qu'ils ſeront hors de leur fourmilière, & ceſſera d'elle même dés qu'ils viendront à ſe ſéparer pour prendre poſſeſſion de leurs domiciles.

Aprés avoir ainſi examiné ce qui concerne ce curieux ſpectacle en lui-même, il me reſte peu de choſes à dire ſur les contreés, d'où ces nombreux eſſains de fourmis s'elevent quelquefois dans les airs, & ſur les divers lieux qui ſont en général les plus propres à nourrir & à faire multiplier les fourmis.

Tels ſont dans la Province du Havel certains diſtricts, par exemple, ceux de *Fehrbellin*, *Friſack*, & *Rinow*, (**) dont les paturages ſont gras, marécageux, ont quelque ſalure, & ſont pleins de tourbe, principalement du coté de ces belles terres, qui ſont du domaine Royal, (*die Koenigs-Horſt*,) (***) & jusques dans le voiſinage de la Ville de *Nauen*. Mais le canton le plus remarquable, ce ſont ces prai-

(*) Ces Fourmis font leurs nids dans les creux des arbres, & dans les bois cariés, & elles different des nôtres qui habitent dans la terre.

(**) En Allemand *das Land Fehrbellin, Friſack, und Rinow.*

(***) *Kuh-Horſt, Loh-of-Sund, Hartefeld, &c.*

prairies humides, & en partie couvertes de mouſſe, qui conduiſent des Villages de *Wagenitz* & *Bredekou*, jusqu'à ce beau bois qu'on nomme der *Zozen*, & à la Ville de *Friſack*. (*)

Je n'ai jamais rencontré d'auſſi copieux eſſains de fourmis dans les autres contrées en deçà & en delà de l'Oder, de la Sprée, & de la Schwarte, ni dans aucun des lieux humides qui en dépendent; quoique je ne doute presque point qu'en divers tems d'autres n'y en ayent vû quelquefois, à cauſe de la convenance de ces lieux, mais plus rares, plus épars, & moindres.

Comme la ſituation de ce territoire de *Friſack*, dont j'ai parlé, & de ſes environs, le rend fort ſujet aux inondations, cela fait que dans certaines années on n'y ſauroit faucher de foin, ou que cela ne ſe fait que tard. Quand la chaleur du Soleil ſurvient, ces lieux deſſechés deviennent acceſſibles, & on y voit une grande quantité de monceaux de terre, où habitent ces petites fourmis noires, dont tous les ans de nombreux eſſains montent dans l'air.

Nous apprenons par une obſervation invariable des habitans du lieu que des troupes extraordinaires de fourmis ailées, ſe montrent vers la fin d'Aout & au commencement de Septembre, en tems ſec & chaud, & ſortent alors de leur fourmiliere avec un bruit & un mouvement ſingulier. Les gens dela campagne aſſurent de plus, qu'au bout de trois jours de nouvelles troupes de fourmis ſortent avec une extreme rapidité, de tous, ou de la plupart des monceaux, & vont dans les airs, où elles forment plus ou moins de ces colomnes, dont nous avons parlé. Mais les récits varient quant aux années: il y en a où les eſſains de fourmis partent à plus d'une repriſe, & dans d'autres cela n'arrive point du tout. Quand la ſaiſon a été froide, pluvieuſe, ou orageuſe, & que l'inondation a duré trop longtems, cela arrête la géné-

(*) Communément *das Friſackiſche Lug. Leonard Thurneiſer* en fait déjà mention, & parle d'une eau qui ſe trouve dans cette forêt, d'où s'eleve une vapeur minerale, ſi forte qu'elle cauſe des maladies & ôte entiérement l'appetit. Voyez *Piſon* Part. I. cap. XC... pag. 364.

génération des fourmis, & par conſéquent leur vol. S'il en paroit quelques colomnes, elles ſont trés petites dans toutes leurs dimenſions, & trés diſperſées. Mais quand on voit des eſſains nombreux de fourmis, les païſans regardent cela comme un préſage infaillible d'un tems calme & ſec, tel qu'ils le ſouhaitent pour moiſſonner & faucher.

C'eſt ce qui fait que le ſpectacle qne nous avons décrit, arrive fort rarement dans les contrées Septentrionales, & il ne faut pas s'etonner qu'*Olaus Magnus* raconte * comme une rareté le combat de fourmis obſervé en MDXXI. dans le Jardin Royal de Stockolm & dans celui d'Upſal. * L. XXII.

C'en eſt aſſez pour l'idée que je m'etois propoſé de donner d'un cas, que je crois pouvoir être mis au nombre des plus rares que fourniſſe l'Hiſtoire naturelle de ce pays. Sa grande conformité avec l'Aurore Boreale auroit pu aſſurément en impoſer à quelques Phyſiciens. Tous les jours on apprend quelque choſe.

MÉMOI-

MÉMOIRE CONCERNANT CERTAINES PIERRES, QUI PAR LA STRATIFICATION AVEC LES CHARBONS ET LA CALCINATION, PARVIENNENT A' UN ÉTAT, ET ACQUIERENT UNE FORCE, PAR LAQUELLE ETANT EXPOSÉES UN PEU DE TEMS A' LA LUMIERE, ELLES BRILLENT ENSUITE DANS UN LIEU OBSCUR,

PAR M. MARGGRAF.

Traduit du Latin.

I.

La premiere des pierres qui ſe ſont fait connoitre par cet effet particulier, c'eſt la pierre de Bologne, de la préparation de laquelle il eſt parlé dans *Montalbanus*, *Potterius*, *Licetus*, *Morſigli*, *Mentzel*, *Lemery*, & divers autres Auteurs. Mais comme ils ne ſont pas d'accord entr'eux, j'ai cru qu'il ne ſeroit pas inutile de comparer enſemble les differentes préparations qu'ils ont indiquées, pour choiſir la meilleure, y joindre mes propres Experiences, & démontrer enfin que l'Allemagne poſſede une abondance de pierres de ce genre, qui, ſi elles ne ſurpaſſent pas la pierre de Bologne, ne lui cedent au moins en rien, & ont une extreme reſſemblance avec elles.

II. La pierre de Bologne eſt une pierre peſante, fort friable, & fragile. Quand on la rompt, elle jette de l'eclat. Elle ne produit

duit aucune effervescence avec les acides, soit qu'on l'employe crue, ou qu'on l'ait auparavant calcinée dans un creuset couvert. Aussitot qu'elle est un peu échauffée, elle luit dans les ténébres, avec un peu moins de clarté pourtant que les *Hesperi* communs. Si on la calcine doucement, elle s'affaisse seulement un peu, & elle ne change point sa couleur dans la calcination, à moins qu'elle ne contienne des particules de fer, demeurant constamment assez blanche, & même en quelque sorte brillante. Mais la difference principale qu'il y a entr'elle & les autres pierres, c'est que cette pierre de Bologne, si on la stratifie d'une certaine maniere avec les charbons, & qu'on la calcine, aprés le réfroidissement, attire la lumiere des autres corps lumineux ou illuminés, & ensuite jette dans les ténébres un feu qui ressemble beaucoup à celui des charbons allumés, quoique les couleurs en soient quelquefois differentes. Bologne, Ville d'Italie, est le lieu où l'on a découvert la proprieté lumineuse de ces pierres. Il n'y a qu'à consulter là dessus *Mentzel* (*) & *Lemery*. (**)

III. Les Auteurs que j'ai nommés au commençant, entre lesquels *Mentzel*, *Marsigli* & *Lemery* méritent la préférence, ont expliqué avec assez de netteté, non seulement la nature de cette pierre, mais aussi sa préparation; cependant à l'egard de celle-ci ils ne sont pas parfaitement d'accord entr'eux. *Mentzel* suit pour la grande partie la methode de *Potterius*, conseillant de réduire d'abord ces pierres en une poussiere fort menuë, de les détremper avec de l'eau, de former de cette poussiere humectée des gâteaux plus grands, ou plus petits, & aprés que ces gâteaux sont secs, de les stratifier avec des charbons bien brulés, & de les calciner au fourneau. Mais il ne décrit point exactement le fourneau propre à cette opération; se contentant de dire que ce fourneau, les pierres, les charbons, & tout ce qui est employé dans ce travail, doit être extrémement net: & il

(*) Tr. *de lap. Bon.* Ed. de 1675. pag. 31.

(**) *Cours de Chymie* p. 698.

& il a bien raiſon, la propreté étant une des choſes les plus eſſentielles en Chymie, & à laquelle le Chymiſte ne ſauroit apporter trop d'attention. (*)

IV. M. de *Marſigli*, dans ſa Diſſertation Epiſtolaire ſur le Phoſphore mineral, ou la pierre lumineuſe de Bologne, (**) & *Lemery*, dans ſon Cours de Chymie, (***) donnent la même préparation de cette pierre, & diſent qu'il faut prendre les pierres cruës tout entieres, les bien nettoyer de leur croute exterieure, les humecter d'eſprit de vin, les rouler dans de la pouſſiere de cette pierre de Bologne, les deſſécher enſuite, les ſtratifier avec des charbons, & les calciner. Cependant ces deux Auteurs different entr'eux par rapport au gril & au fourneau dont on doit ſe ſervir. Toutes les methodes indiquées par les trois Auteurs dont j'ai parlé, peuvent donc ſe réduire à ces deux points de diverſité; c'eſt que le premier calcine la pouſſiere de ces pierres réduite en maſſe, au lieu que les deux autres prennent les pierres entieres, & aprés les avoir incruſtées de leur propre pouſſiere, les calcinent avec les charbons. A' cela près ils arrivent au même but, quoiqu'avec un ſuccés inégal.

V. *Lemery* (****) décrit l'ordre de fourneau requis, & marque ſa hauteur & ſa largeur. Mais le fourneau qu'il repréſente eſt trop petit; & quoique l'opération puiſſe y réüſſir, un fourneau plus grand convient pourtant mieux, afin qu'on puiſſe donner au feu un aſſez grand degré de force. Il veut encore que ce fourneau ſoit d'argille, & le gril de leton, dans la penſée qu'un gril de fer feroit un effet auſſi préjudiciable que ſi l'on piloit dans un mortier de fer la pouſſiere qui ſert à incruſter les pierres: il croit même que la pierre calaminaire qui ſe trouve mélée dans le leton, peut aider à rendre ces pierres luiſantes. Cet Auteur deſapprouve auſſi la pulvériſation de cette pierre, qui ſe fait dans le marbre, &dans le porphyre, & déconſeille les grils faits d'argille, ou d'autres terres. Mais pour *Mentzel*

(*) Voy. *Mentzel* ub. ſup. p. 62. 63. (**) p. 37.
(***) p. 696. (****) *ibid.* p. 700.

Mentzel & Marſigli, quoique ſuivant la maniere rapportée ci-deſſus §. III. & IV. le premier réduiſe en poudre notre pierre, ſoit cruë, ſoit calcinée, & la deſſeche: & que le ſecond incruſte cette pierre cruë de ſa propre pouſſière, tous deux cependant s'accommodent de toutes ſortes de fourmeaux, pourvu qu'ils ſoient tels qu'on puiſſe donner aux pierres un degré ſuffiſant de chaleur.

VI. Pour ne pas m'arrêter trop longtems à ce récit, je vais expoſer par ordre la maniere de calciner ces pierres, que je fonde ſur mes propres expériences, & qui réüſſira conſtamment entre les mains de quiconque la ſuivra, pourvu qu'on n'employe que des pierres de Bologne de bonne ſorte, & qui conviennent à cette opération. Je commence par le fourneau. On peut retenir pour modele celui que *Lemery* a propoſé, moyennant qu'on en augmente la grandeur; ce qui peut ſe faire de la maniere ſuivante. La partie inferieure du fourneau, ſur laquelle on poſe le gril, doit être haute d'un demi-pied, ou ſix pouces: les deux portes qu'on y met vis à vis l'une de l'autre, & qui ſervent à donner de l'air, doivent être hautes de quatre pouces, & larges de trois; & la partie moyenne du fourneau, où l'on place les pierres, avec les parties retranchées, doivent faire la hauteur complette d'un pied.

Le toit, ou couvercle de ce fourneau peut être plat, ou, ſi l'on veut, en partie voûté. Le gril, qui eſt néceſſairement requis dans ce fourneau, peut également être de leton, de fer, d'acier, de cuivre, ou d'argille, l'expérience m'ayant convaincu que c'eſt tout à fait la même choſe, & que la ſeule précaution à prendre, c'eſt que le gril ne ſoit pas trop étroit. Pour la matiere du fourneau, ce doit être, ou de l'argille convenable, ou même des lames de fer; & l'on peut le garnir en dedans avec du limon argilleux. En général tout fourneau, qui laiſſe un paſſage libre à l'entrée & à la ſortie de l'air peut ſervir à cette opération. Car le grand point de toute l'opération conſiſte dans le contact des charbons, & dans le degré de feu.

VII. Cependant, comme entre toutes les manieres qui ont été indiquées, j'ai reconnu que celle de *Potterius*, que *Mentzel* a auſſi ſuivie, eſt la meilleure de toutes, je la poſerai ici pour fondement, & je la recommenderai préférablement à toutes les autres; & cela, parce que, ſi l'on ſe borne à prendre nos pierres entieres, & à les incruſter de leur propre pouſſiere, ſuivant la methode de *Lemery* & de M. de *Marſigli*, & qu'enſuite on les calcine, il n'y a que la ſurface exterieure de la pierre, qui acquiere la propriété de recevoir la lumiere, & encore ne la renvoye-t-elle ſouvent que fort foiblement. En effet une pareille pierre ne peut jetter de la lumiere que des endroits où il eſt reſté quelque choſe de la pouſſiere calcinée, dont elle avoit été incruſtée. Pour abréger, cette methode auroit été appliquable à trés peu d'entre les pierres de ce genre que j'ai découvertes en Allemagne, parce que ces pierres, pendant la calcination, éclateroient en petits morceaux, & ſe répandroient comme une pouſſiere parmi les charbons, avant que le travail fut achevé. Toutes ces raiſons m'engagent à déclarer que la methode de calciner ces pierres, fournie par M. *Mentzel*, eſt réellement la meilleure de toutes.

VIII. Qu'on prenne donc autant qu'on le jugera à propos de ces pierres de Bologne bien choiſies; & les meilleures ſont les plus peſantes, celles qui ſe briſent le plus aiſément, & qui ne ſont point rayées en dedans, mais qui paroiſſent plutôt s'effeuiller en les rompant. Qu'on mette ces pierres en excandeſcence dans un creuſet de Heſſe, couvert, ou découvert: aprés cela qu'on les réduiſe en une pouſſiere trés ſubtile, en ſe ſervant pour cet effet d'un mortier de verre, de cryſtal, ou de porphyre; mais qu'on n'en prenne point de leton, comme le veut *Lemery*, car cela nuïroit au ſuccés de l'opération. Qu'on mêle cette pouſſiere de pierre avec une quantité de tragacanthe réduite en bouïllie par le mélange d'une partie de pouſſiere de tragacanthe avec ſept parties d'eau chaude; & qu'on réduiſe le tout en une maſſe, telle qu'elle pourra ſe former. Que de cette maſſe on faſſe des gâteaux, grands ou petits, comme on voudra, mais qui

qui n'ayent que l'epaiſſeur du dos d'un couteau; & qu'enſuite on les deſſeche bien, en y employant à la fin une fort grande chaleur. Tout cela étant fait, qu'on mette quelques charbons ardens dans le fourneau décrit §. V. & au bout d'un petit eſpace de tems qu'on rempliſſe ce fourneau jusqu'aux trois quarts, de charbons éteints d'une médiocre grandeur, à peu prés comme des noix; qu'on poſe deſſus la poudre de pierres deſſechée; qu'alors on acheve de remplir le fourneau, & qu'on y mette le couvercle, afin de faire brûler des charbons par deſſus. Quand tout ſera réfroidi, on trouvera cette maſſe calcinée ſur le gril, & il ſuffira de ſouffler pour en ſéparer la cendre qui repoſe deſſus. Cette pierre de Bologne ainſi calcinée, a une odeur de ſouffre; & ſi, aprés l'avoir expoſée pendant quelques minutes à la lumiere du jour, on la porte dans les ténébres, elle y luit comme un charbon; il s'y mêle auſſi quelquefois de place en place une ſplendeur blanche & bleuë. Si l'on pile de nouveau ces pierres calcinées, qu'on en refaſſe la maſſe ſusdite avec la tragacanthe, qu'on la deſſeche, & qu'on l'expoſe à la même calcination, ces pierres deviendront encore plus propres à recevoir la lumiere. J'ai en particulier remarqué que ce qui donnoit le principal accroiſſement à cette proprieté lumineuſe, c'eſt, lorsqu'aprés la calcination faite par le moyen des charbons, on calcinoit encore fortement ces pierres pendant une demi-heure, ſous la tuile voûtée, qu'on appelle vulgairement *Mouffle*. Pour cet effet on peut poſer chaque petit gâteau de pierre déjà calciné une fois, ſéparément ſur un petit carreau de terre, (en Allemand *treib-ſ. beibett*,) & le couvrir tout à l'entour de charbons ardens, jusqu'à ce qu'au bout d'une demi-heure le feu s'eteigne de lui-même, & le fourneau ſe réfroidiſſe.

IX. La maniere de calcination ſusdite a donc cauſé un changement remarquable dans cette eſpece de pierres. Elles ont perdu leur premiere couleur blanche, & en ont pris de pluſieurs ſortes; par exemple, elles ſont devenuës jaunâtres, rouges, & même de couleurs mélangées. Elles rendent auſſi une odeur de ſouffre; & ſi on les

pile, elles entrent en efferveſcence ſenſible avec les acides: toutes choſes qui n'arrivoient point auparavant. Et pour ce qui regarde le point eſſentiel, elles reçoivent à préſent de la lumiere d'une autre lumiere; d'où s'enſuit qu'il y eſt arrivé un changement ſingulier par le moyen de la partie phlogiſtique des charbons. C'eſt ce que vont encore mieux prouver mes Expériences ſuivantes.

X. J'ai réduit en maſſe une quantité de pierre de Bologne pulveriſée, en la mélant avec la tragacanthe en bouïllie, j'en ai fait de petits gâteaux, comme je l'ai déjà dit §. VIII. je les ai deſſechés, & enſuite j'en ai mis un dans un charbon, auquel j'avois fait un trou; & cela de maniere que la maſſe fut touchée dans toutes les parties de ſa circonference par le charbon, au trou duquel ſa forme quadroit exactement. J'ai adapté au trou du charbon un couvercle de la même matiere, en ſorte que ce couvercle touchoit exactement ma petite maſſe de pierre; j'ai luté la jointure avec de l'argille, & l'ai enſuite fait ſecher: ce qui étant achevé, j'ai mis ce charbon dans un creuſet, que j'ai renfermé dans un autre; & les jointures étant lutées, je l'ai mis dans un fourneau à vent, & je l'ai ſoumis à la calcination pendant deux heures. Aprés le réfroidiſſement j'ai tiré ma maſſe de pierre, je l'ai expoſée à la lumiere, & l'ai portée enſuite dans les ténébres. Mais je n'ai pas pu y obſerver la moindre force lumineuſe, quoique cette maſſe ſentit trés fort le ſouffre; ce qui ſans cela eſt la marque du ſuccés de l'opération. Cela me donnoit lieu de conjecturer avec beaucoup de fondement, qu'il faloit s'en prendre au libre accés de l'air, & par conſéquent au trop de ſubtilité de la partie phlogiſtique des charbons. Car le peu d'alcali de cendres, qui s'engendre dans la calcination ouverte qui ſe fait par le moyen des charbons, n'en peut pas aiſément être la cauſe; puiſque

1. cet alcali des charbons de ſapin, qui ſont les meilleurs pour cette opération, peut être compté presque pour rien:
2. la maſſe de pierre ne touche les charbons que comme en paſſant; &

3. ſi

3. ſi l'on mêle de la pouſſiere de cette pierre avec quelques petites goutes de ſel alcali en ſolution, qu'on la réduiſe en maſſe, & qu'enſuite on la calcine, le produit en ſera moins doüé de la la force lumineuſe, que ſi l'on n'y avoit point mis de ſel alcali.

XI. Je voulus enſuite m'aſſurer, ſi la faute devoit être rejettée ſur la ſeule flamme des charbons, dans laquelle eſt ſans doute contenu le *phlogiſton* le plus ſubtil, ſans compter que les charbons touchoient la maſſe. Pour cet effet je pris une portion de pierre de Bologne pulveriſée, & qui avoit été auparavant calcinée au creuſet; & je la calcinai ouvertement ſous la mouſle pendant l'eſpace de deux heures, en ſorte que la flamme des charbons touchoit continuellement ma poudre de pierre. Cependant l'expérience me fit voir que cette poudre réfroidie ne recevoit aucune lumiere. Cela fait, je pris auſſi une portion de pierre de Bologne pulveriſée, avec deux parties de ſuye de bois de ſapin, miſe en excandeſcence dans une lieu fermé, je les mélai, & les calcinai à un feu ouvert ſous la mouffle pendant deux heures, & tout étant réfroidi, je m'apperçus que cette matiere calcinée recevoit bien quelque lumiere, mais en trés petite quantité. Je mêlai encore deux parties de charbons pulveriſées avec une partie de pierre de Bologne auſſi pulveriſée, & je les calcinai pareillement à découvert ſur un carreau de terre ſous la mouſle pendant deux heures. Aprés l'entier réfroidiſſement, je voyois des taches çà & là, mon mixte ſentoit plus le ſouffre que le précedent, & recevoit auſſi un peu plus de lumiere, quoique ce fut encore fort peu de choſe. Enfin j'ai remis ma pouſſiere calcinée en maſſe avec la tragacanthe, & j'ai recommencé l'opération indiquée §. VIII. aprés quoi je ſuis parvenu à mon but. Car cette maſſe pierreuſe s'eſt trouvée propre à recevoir la lumiere promptement & abondament, ce qui fait voir que le contact des charbons & l'accés de l'air ſont tout à fait néceſſaires pour cette opération.

XII. Le plus grand inconvenient qui ſe rencontre en travaillant ſur la pierre de Bologne, c'eſt qu'elle eſt mélangée de pluſieurs matieres

res differentes; mais comme les Auteurs que j'ai cités, ont déja fait la même remarque, je n'ajóuterai que cette particularité, c'eſt que dans les meilleures de ces pierres ſe trouvent ſouvent mélées des pierres d'autres eſpeces, qui apportent obſtacle à la préparation. Il y en a ſurtout une, qui offre comme des rayons à la vüe, & qui me paroit être du genre des gypſes, laquelle ſe trouve ſouvent entremêlée dans les meilleures pierres de Bologne, de maniere qu'elle ne peut en être ſéparée. Non ſeulement cela empêche l'effet deſiré, mais il eſt fore déſagréable d'employer ſa peine & ſon tems ſur des corps auſſi impurs & mélés de tant de parties heterogenes, ſurtout s'il y a dans la nature d'autres corps plus purs. Je ne ſçaurois pourtant nier qu'il ne ſe rencontre des pierres de Bologne trés pures & ſans aucun mélange: mais dans le nombre de celles que j'ai maniées, je n'en ai jamais pu découvrir aucune qui fut parfaitement pure, mais j'ai reconnu en général que la meilleure de toutes celles que je poſſede en aſſez grande quantité, n'eſt jamais ſi belle, ni aprés la préparation ſi propre à recevoir la lumiere, que les eſpeces de ces pierres que j'ai trouvées en Allemagne. Ceſt pourquoi, n'ayant trouvé d'autre difference entre les pierres étrangeres & les nôtres, ſinon que celles-ci ſont plus pures, & moins mélées de parties heterogenes, je me ſuis mis à travailler ſur les pierres d'Allemagne; & c'eſt d'elles que doit être entendu à l'avenir tout ce que je dirai, à moins que je ne nomme expreſſément la pierre de Bologne.

XIII. M. *Vallerius*, dans ſa Minéralogie, (*) provoquant à l'expérience, aſſure que toutes les eſpeces de marbre, & de pierres de gypſe ou de chaux, ſi on les ſoumet une fois, ou plus ſouvent, au feu, & qu'on les brûle, aprés le réfroidiſſement, jettent de la lumiere dans un lieu obſcur. Aſſurément cet Auteur, puisqu'il parle dans l'endroit en queſtion de la pierre de Bologne, entend par *brûler* cette maniere de calciner, qui eſt néceſſaire pour conduire ces pierres à l'etat dans lequel elles ſont propres à attirer la lumiere, ſçavoir en les calcinant ſtrati-

(*) Obſerv. 2. p. 76. de la Trad. Allem.

ſtratifiées avec des charbons. Je ſerois bien ravi de pouvoir ajouter foi à ſon aſſertion. Mais, bien loin de pouvoir rien dire de la propriété lumineuſe que M. *Vallerius* attribuë dans l'endroit cité à ces eſpeces de pierres, je ſuis au contraire forcé de déclarer que ces pierres ne peuvent être préparées, ni par la calcination ordinaire au creuſet, ni par aucune autre avec les charbons, de maniere à acquerir, ne fut-ce ſeulement qu'en quelque partie, une ſemblable vertu lumineuſe. Par conſéquent ces pierres, telles que la nature les produit, ne ſçauroient abſolument être rangeés dans la claſſe des pierres qui jettent de la lumiere.

XIV. En effet, pour me procurer une pleine certitude à cet égard, j'ai fait avec la tragacanthe des maſſes de ces pierres & terres pulveriſées, ſuivant la methode du §. VIII. & en ai fait la même calcination avec les charbons, mais je n'ai pu y découvrir la moindre faculté de recevoir la lumiere. Ces pierres ſont.

1. La pierre à chaux crüe
2. Du marbre crud, d'un beau blanc.
3. Du *ſpathum calcarium* blanc, telle qu'on le tire en Saxe de la mine qui porte le nom du Duc Auguſte.
4. Du *ſpathum calcarium* blanc, médiocrement tranſparent, de *Clauſthal.*
5. De la pierre de gypſe calcinée, qui ſe trouve *à Spremberg*, prés de *Zoſſen*, & qu'on y employe à cuire le gypſe.
6. De l'albâtre d'un beau blanc, auparavant calciné.
7. Du *Spathum* qui a la forme de gypſe, (vulgairement dit *Spath d'Orfevre*, parce qu'ils s'en ſervent pour leurs formes,) & auparavant calciné.
8. Du *Spathum* fuſible, d'une couleur presque rouſſe, qui ſe trouve dans cette contrée de mines qu'on nomme *Halsbrück*, & ſe tire de la mine appellée *Job.*
9. Du *Spathum* fuſible verd, en Allemand *Smaragd-flus.*
10. Du même *Spathum* bleu, dit *Amethyſt-fluſs.*

11. Du même *Spathum* jaunâtre, dit *Hyacinth-fluſs.*
12. Du *Spathum* fuſible, qu'on trouve dans le lieu appellé vulgairement *Thale*, auprés de *Quedlimbourg.*
13. Un autre *Spathum* de même ſorte, qui ſe rencontre à *Haſſerode* prés de *Wernigerode.*
14. La Pierre ſpeculaire impure, (*glacies Mariæ*) de *Freyenwald.*
15. De la Topaze de Saxe brulée, & pilée dans un mortier de verre net.
16. De l'Opale, tirée de la mine du diſtrict de *Freyberg*, qu'on appelle *Donat.* Il faut remarquer que toutes les matieres ſuſdites avoient été auparavant calcinées.
17. De l'Argille d'un beau blanc.
18. De la Craye ſaoulée d'Eſprit de Vitriol.
19. De la Terre d'Alun brulé, aprés qu'en la cuiſant à un feu violent, elle a été ſeparée de ſa ſalure.
20. De la miniere d'Etain blanche & peſante, dite en Allemand *weiſſe Zinne-graupen.*
21. De la cendre d'Etain belle & pure.

Les eſpeces de terres & de pierres que je viens de rapporter, ſuffiront, à ce que j'eſpere, pour démontrer que la pierre à chaux, le gypſe, & le marbre, tels que la nature les produit, ne ſçauroient proprement être mis au nombre des pierres qui, aprés avoir été préparées, deviennent propres à recevoir la lumiere.

XV. Je paſſe donc préſentement à ces eſpeces de pierres, qui appartiennent proprement & de plein droit au genre de la pierre de Bologne. Le poids ſingulier de cette pierre en comparaiſon des autres, & l'arrangement de ſa texture par feuïlles, quand elle eſt de la meilleure ſorte, m'ont principalement engagé à examiner ma collection de mineraux pierreux d'Allemagne; & à la fin j'ai trouvé ce que je deſirois parmi les veritables & effectifs *Spaths* fuſibles peſans. Ces eſpeces de *Spaths* fuſibles different des autres qui portent le même

me nom en ceci, c'eſt qu'ils ſont beaucoup plus peſans, plus facilement friables, & par conſéquent beaucoup plus mous; le plus ſouvent auſſi leur texture eſt plus diſpoſée par feuillets; quand on les échauffe juſqu'à l'excandeſcence, ils jettent bien quelque lumiere, mais fort foible en comparaiſon tant des autres *Spaths*, que des pierres dites *Heſperi*, & des *Spatha calcaria*: enfin étant embraſés ils éclatent en particules beaucoup moindres & plus friables. De plus il y en a quelques uns qu'on peut appeller ſimples, & qui n'ont aucune figure déterminée; au lieu que d'autres ont la forme de ces mineraux pierreux, qu'on nomme vulgairement *Druſen*, & la plupart reſſemblent à de petites feuilles entaſſées les unes ſur les autres. Quant à la couleur, ils ſont tantôt d'un blanc de lait, tantôt rougeâtres, tantôt jaunâtres, quelquefois tirant ſur le gris, ſurtout quand on les briſe; & ils paroiſſent en partie plus, en partie moins tranſparens. Mais à l'egard de la qualité principale, ils ont une parfaite convenance avec la pierre de Bologne; c'eſt à dire, qu'aprés la calcination faite par le moyen des charbons, ils deviennent propres à recevoir la lumiere.

XVI. Les concretions pierreuſes que j'ai reconnuës appartenir ici, ſont donc les ſuivantes;

1. Le *Spath* fuſible d'un beau blanc, qu'on trouve dans les montagnes de Saxe, & en particulier dans les Mines appellées *Jacob & Alt-Vätern*, & dans le diſtrict de Mines qui porte le nom de *Halsbrück*.
2. De pareil *Spath* blanc, tiré du diſtrict de Mines dit *Freyberger Berg-Amts-Revier*, & ſpecialement de la Mine appellée *le Prince Royal Frideric Auguſte*.
3. Du *Spath* fuſible reſſemblant à cette eſpece de foſſiles qu'on appelle vulgairement *Druſen*, & qui montre, quand on le briſe, une couleur griſâtre. Il vient de la mine dite *Donat*, auprés de *Freyberg*.
4. Un autre *Spath* de même ſorte, mais dont la couleur tire ſur le rougeâtre.

5. Du *Spath* fuſible de même ſorte, qui a la forme de ces concretions pierreuſes, qu'on appelle vulgairement *Druſen*, d'une couleur griſâtre, & qui ſe trouve dans le *Wiſenthal*, prés d'*Annaberg*.
6. Un autre *Spath* pareil, d'une couleur tirant ſur le jaunâtre, venant d'auprés de *Freyberg*; & enfin,
7. Un *Spath* ſemblable, demi-tranſparent, d'une couleur tirant ſur le rougeâtre, apporté de *Clauſthal*.

Toutes ces matieres, moyennant la préparation indiquée au §. VIII. peuvent être renduës propres à recevoir la lumiere du jour, ou celle de tout autre objet lumineux, & même de la Lune, & poſſedent auſſi toutes les qualités de la pierre de Bologne, dont nous avons fait ci-deſſus l'enumération. Bien plus les Spaths ſusdits, & ſurtout celui du No. 1. luiſent avec beaucoup plus de clarté, & attirent presque plus vîte la lumiere, que la veritable pierre de Bologne préparée; c'eſt pourquoi, pour les diſtinguer, on pourroit les appelles *Spaths lumineux*.

Aux differentes ſortes que nous avons rapportées, rien n'empéche d'ajouter 8. notre propre *Spath* commun, tranſparent, qui eſt aſſez connu par tout, dont on peut ſe procurer une grande abondance, & qui eſt vulgairement dit *Pierre ſpeculaire d'Allemagne*, ou *glacies Mariæ*. En effet, en le calcinant pareillement avec les charbons, il reçoit la lumiere tout auſſi facilemnt que les autres matieres ſusdites, excepté que cette lumiere eſt beaucoup plus foible, tout à fait blanche, & fort reſſemblante à la clarté de la Lune. Cependant, pour faire cette expérience, il faut un endroit d'où les plus épaiſſes ténébres banniſſent entiérement la lumiere du jour. Il eſt requis encore que celui qui veut bien obſerver cette lumiere, ſe ſoit tenu quelque-tems auparavant dans un lieu obſcur, & ſe faſſe apporter par un autre ce corps lumineux, qui aura été expoſé à la lumiere, autrement l'effet ne ſera pas auſſi ſenſible pour lui qu'il devroit l'être. Cette pierre ſpeculaire,

priſe

priſe auſſi en forme cruë, & étant ſeulement échauffée fort légerement, brille comme les *Heſperi.*

XVII. Ayant reconnu qu'entre tous les *Spaths* fuſibles, dont le §. XVI. a fourni l'enumération, le premier étoit le plus pur, & le plus convenable à mon deſſein, c'eſt auſſi ſur celui-là ſeul que j'ai travaillé. J'ai donc pris une quantité de ce *Spath* fuſible de Saxe, qui n'a point de figure, dont la texture eſt diſpoſée par feuïlles, la couleur d'un blanc de lait, & qui a peu de tranſparence. Aprés l'avoir mis dans un creuſet de Heſſe, je l'ai ſoumis à la calcination; & dés qu'il venoit à s'echauffer fortement, il répandoit quelque lumiere, quoique fort petite, & qui ne peut s'obſerver que dans un lieu trés obſcur. Je l'ai enſuite broyé, & réduit avec la tragacanthe en une maſſe de l'epaiſſeur d'un dos de couteau, que j'ai expoſée à la calcination, aprés l'avoir auparavant deſſéchée, & ſtratifiée avec les charbons, continuant l'opération de la maniere indiquée §. VIII. Cela étant fini, & aprés l'entier réfroidiſſement, j'ai trouvé ma pierre d'Allemagne au même état que la calcination produit dans celle de Bologne, (voy. §. IX.) & même ſa faculté d'attirer la lumiere & de la répandre enſuite dans un lieu obſcur, a plus de force & de vivacité, les diverſes couleurs de la lumiere pouvant auſſi être obſervées pareillement dans ma pierre.

XVIII. La pierre de Bologne perd à la longue la faculté de recevoir la lumiere; & on ne peut pas s'attendre qu'il en ſoit autrement de ma pierre d'Allemagne. Mais comme chacun eſt bien aiſe de conſerver de ces calcinations lumineuſes, ſurtout quand ce ſont de beaux morceaux, en ſorte que leur vigueur ſe maintienne dans ſon integrité; il n'y a rien de meilleur pour cet effet que de les défendre de l'accés de l'air, en les mettant dans un verre, que l'on ſcelle enſuite hermetiquement: ce qui empéche en même tems qu'en faiſant uſage de cette pierre, on ne ſente ſon odeur déſagréable de ſouffre, & cela ne préjudicie en rien à l'attraction de la lumiere. Je prens donc pour cet uſage des tuyaux plats de verre de cryſtal, dont je ferme un bout en le fondant, & je les rempliſ de ma pierre lumineuſe briſée en pieces.

Cependant il faut bien prendre garde de ne point y mettre en même tems de pouſſiere de cette pierre, parce qu'elle s'attache au verre, & empêche le paſſage des rayons de lumiere; & c'eſt par la même raiſon qu'on ne doit pas beaucoup ſecouër les petits tuyaux remplis de cette matiere. On conſerve de la même maniere le Phoſphore de *Balduinus*, qui ſans cela ſe giteroit en peu de tems.

XIX. Pour ne pas donner trop d'etendüe à ce Mémoire, je renvoye à une autre occaſion les remarques qui concernent encore ces pierres lumineuſes, me propoſant d'en continuer l'examen, & ayant en particulier deſſein de traiter de la mixtion naturelle de ces pierres, & de la compoſition artificielle par laquelle on peut imiter de ſemblables concretions pierreuſes propres à jetter de la lumiere. Je n'ajouterai donc plus qu'une choſe remarquable; c'eſt que cette pierre préparée ſuivant la methode du §. VIII. ne luit pas ſeulement, lorsqu'on l'a enfermée dans le tuyau de verre dont j'ai parlé, mais encore qu'etant à découvert, dans une chambre où régnent d'epaiſſes ténébres; & ſans avoir été expoſée auparavant à aucune lumiere, ſi on la met ſur un fourneau chaud, dés qu'elle vient à s'echauffer, elle commence à luire, quoiqu'il ne puiſſe entrer le moindre rayon de lumiere dans cette chambre; d'où l'on peut inferer qu'une autre lumiere n'eſt pas toujours néceſſaire pour illuminer ce Phoſphore. M. *Mentzel* (*) a déjà attribué la même prérogative au Phoſphore Hermetique de Balduinus; mais il n'a pas voulu l'aſſurer de la pierre de Bologne. Pour moi je puis en être garant d'aprés l'expérience, & affirmer que la Pierre de Bologne, le Phoſphore de Balduinus, & mon *Spath* fuſible d'Allemagne préparé, principalement ce dernier, rendent cette clarté avec beaucoup de force; en ſorte que leur éclat, ſurtout celui de ma pierre, eſt plus grand que s'il l'avoit reçu d'une chandelle de cire, ou de ſuif. En un mot la chaleur du fourneau produit ici le même effet que les rayons de la clarté du jour, ou de toute autre lumiere.

MÉMOI-

MÉMOIRE
SUR L'ART DE COUVER LES OEUFS
OUVERTS
PAR M. BEGUELIN.

La Machine qui m'a ſervi à faire les Expériences dont j'ai l'honneur de rendre compte à l'Académie, repréſente à la vuë un Vaſe cilindrique de deux pieds de diametre, & de neuf pouces de hauteur, dont l'epaiſſeur, tant du fond que du contour, ſeroit partout de deux pouces, de ſorte que la capacité, ou cavité intérieure de ce vaſe, qui eſt ouvert par enhaut, forme un eſpace cilindrique de 20. pouces en diametre, & de 7. pouces en hauteur. Ce Vaſe n'eſt autre choſe que l'aſſemblage de deux cilindres de fer blanc emboëtés l'un dans l'autre; dont l'extérieur a préciſément deux pieds de diametre & neuf pouces de haut, tandis que l'intérieur n'a que vingt pouces de diametre, & ſept pouces de hauteur. Le fond de ce cilindre intérieur eſt ſoutenu au moyen de quelques appuis, à deux pouces au deſſus de la baſe du cilindre extérieur, ce qui fait que les bords des deux cilindres ſont au niveau l'un de l'autre. Un Anneau, ou plutot une Zone platte, de fer blanc, de la largeur de deux pouces, ſoudée à ſes bords, paralléle ment à la baſe de la machine couvre l'eſpace vuide que les deux cilindres laiſſent entr'eux. Cet anneau a deux trous d'environ huit lignes de diametre, qui ſervent à introduire l'eau entre les deux cilindres, & à donner iſſuë aux vapeurs de cette même eau. Il eſt bon de placer encore un robinet prés du fond de la machine, pour pouvoir

pouvoir changer l'eau toutes les fois qu'on le jugera néceſſaire; & parce que le fer blanc ſe rouïlle aiſément, ſurtout aux endroits où on l'a ſoudé, il ſera trés utile de le faire enduire d'une forte couche de vernis à l'huile.

Cette machine, telle que je viens de la décrire, n'etoit d'abord deſtinée qu'à faire éclore des Poulets au moyen du feu d'une Lampe. La capacité de ſon fond intérieur peut contenir aiſément cent oeufs & plus, & l'on peut y en mettre quatre couches, ſans inconvenient, pourvû qu'on ait l'attention de placer dans la couche ſupérieure ceux qui doivent éclore les premiers.

On pourroit couvrir cette machine d'un couvercle de bois d'une épaiſſeur convenable, & qui contiendroit divers trous qu'on ouvriroit ou fermeroit, ſelon que l'exigeroit le dégré de chaleur indiqué par le Thermometre; mais un pareil couvercle ne pouvant ſervir au deſſein que j'avois de voir la formation du Poulet à découvert, je me ſuis contenté de couvrir les oeufs d'une ſerviette, & d'y étendre une couche aſſez épaiſſe de coton.

Comme je n'avois mis que deux couches d'oeufs, il étoit aſſez indifferent de remplir d'eau tout l'interſtice des deux cilindres, ou de n'en verſer que ſur le fond inferieur environ la hauteur d'un pouce; car les vapeurs qui s'elévent de la ſurface de cette eau, ayant la liberté de monter de tous cotés entre les deux cilindres, chauffent aſſez également le cilindre interieur; principalement ſi l'on fait un étui de bois, de carton, ou de flanelle, au cilindre extérieur, pour empêcher l'air de réfroidir ſa ſurface. Mais outre que je ne voulois point me ſervir de pareils étuis, je préférai de verſer une plus grande quantité d'eau, parce que je crois m'être apperçu que les variations du Thermometre ſont alors moins fréquentes, & qu'il ne faut pas un plus grand feu pour y entretenir le même degré de chaleur; c'eſt pourquoy j'y verſai de l'eau la hauteur de cinq pouces, en ſorte qu'elle étoit de niveau avec les œufs de la couche ſupérieure.

Je pla-

Je plaçai ce four cilindrique ſur une table dans ma chambre, de façon qu'au moyen de deux appuis, ſon fond étoit élevé de quatre pouces du deſſus de la ſurface de la table, afin de pouvoir placer ſous la machine l'aſſiette qui me ſert de Lampe. La mêche que j'y emploïe n'eſt autre choſe qu'un ou deux brins de moëlle de jonc, de la longueur d'un pouce, qui paſſent par un petit tuyau de fer blanc, & qui en rempliſſent aſſez exactement la capacité, pour ne pouvoir gliſſer. Ce tuyau qui s'enfonce à moitié dans l'huile, y eſt ſoutenu dans une poſition perpendiculaire, par quatre petits bras en forme de croix, qui au moyen d'autant de morceaux de liege, font ſurnager la mêche à 1½ de pouces de diſtance du fond de la machine, de ſorte que la pointe de la flamme n'aproche ce fond qu'à la diſtance de prés de neuf lignes; dés qu'une fois le degré de chaleur eſt bien déterminé par la groſſeur de la mêche, & par la diſtance de la flamme au fond du four, on n'a autre choſe à faire qu'à inſerer matin & ſoir un nouveau brin de moëlle dans le tuyau, à la place de celui qu'on en ôte. Cette mêche conſume une livre d'huile en deux jours & demi, de ſorte que toute la couvée de quatre cents oeufs ne demande que huit livres d'huile. Si l'on veut faire la dépenſe de bruler de l'Eſprit de vin en place d'huile, il ne ſera pas même néceſſaire de changer la mêche, puisqu'alors elle ne ſe conſume point.

Monſieur de Réaumur a déjà enſeigné la méthode de déterminer ſur chaque Thermometre le degré de chaleur propre à faire éclore les Poulets. J'ai vérifié ſuivant cette méthode divers Thermometres de Fahrenheit en les tenant pendant vingt jusqu'à trente minutes ſous l'aiſſelle, & j'ai toûjours trouvé que le trente deuxieme dégré de Mr. de Réaumur répondoit au nonante ſixiéme de Fahrenheit; ce qui réſulte auſſi de divers calculs que j'ai fait, ſuivant lesquels je trouve que deux degrés & un quart de Fahrenheit ſont, à trés peu prés, un degré du Thermometre de Mr. de Réaumur.

Pour graduer les Thermometres, tant ceux de Mercure, que ceux d'Eſprit de vin, je les deſcends de leur échelle, & aprés avoir déter-

miné le 96. degré, je le marque avec de l'encre par un cercle tracé autour du tuyau du Thermometre ; enſuite je me contente de marquer par des points d'encre ſur ce même tuyau les autres dégrés au deſſous & au deſſus du 96. Par ce moyen je puis placer plus commodément les Thermometres partout où il convient d'en avoir, & la boule touchant préciſément le fond de la caiſſe, ou de chaque couche, m'indique plus exactement le degré de chaleur qui y régne, que lorsque le Thermometre eſt monté ſur une échelle de bois, ou de leton, qui déborde ſouvent beaucoup au deſſous de la Boule.

Mon deſſein n'avoit été d'abord que d'amuſer mon Auguſte Elève, en lui procurant le plaiſir de voir éclore des Poulets artificiellement, & en lui faiſant obſerver le progrés du Poulet dans l'oeuf d'un jour à l'autre. Cet aimable Prince, naturellement curieux, prenoit tant de plaiſir à voir le battement des arteres dans les embrions, & leurs mouvements, qu'il ne ſe laſſoit point de faire ouvrir des oeufs, pour y obſerver les progrés du petit animal ; cela me fit ſonger à trouver un moyen de ſatisfaire plus facilement ſa curioſité. J'avois déja tenté plus d'une fois de voir le premier dévelopement du Poulet, en faiſant un trou à la coquille ; mais outre la difficulté de trouver préciſément le point de la coque qui répond au germe, j'avois éprouvé que ce germe avec toute la pellicule à laquelle il eſt attaché, & qui ſert d'envelope au jaune, s'epaiſſiſſoit, & ſe durciſſoit en peu de tems par le contact de l'air. Je crus pouvoir y remédier en couvrant l'ouverture d'un morceau de verre : mais le ſuccés n'en fut pas meilleur. En un mot, tant que j'ai fait l'ouverture entre les deux bouts de l'oeuf, je n'ai pû réüſſir à voir le dévelopement du germe. Je ne doute pas néanmoins qu'on n'y parvint, pourvû qu'on pût couvrir exactement l'ouverture qu'on y auroit pratiquée. Je jugeai à propos de changer de méthode ; je levai un morceau circulaire de la coque, préciſément au gros bout de l'oeuf, ce qui me donna une ouverture ronde de ſix ou huit lignes de diametre ; j'enlevai enſuitte les deux pellicules, qui couvrent le blanc de l'oeuf. Le jaune étant ainſi à découvert, je le ſecou-

ſecoüai en divers ſens, jusqu'à ce que j'euſſe amené le germe ſous l'ouverture ; j'ai quelquefois employé un bout de plume que j'enfonçois dans l'oeuf pour faire pirouëtter le jaune. Le moyen le plus court, & qui m'a toujours réüſſi, lorsque j'ai voulu l'employer, c'eſt de faire écouler une partie du blanc d'oeuf ; alors le germe vient ſe placer de ſoy-même au haut. On peut enſuite verſer de nouveau dans l'oeuf le blanc qu'on en avoit tiré, pourvû qu'on le faſſe légérement. Le germe étant dans la ſituation convenable, je plaçai l'oeuf dans une petite boëte, afin que le coté pointu fut perpendiculaire au fond, & rempliſſant de coton le vuide de la boëte, j'aſſujettis l'oeuf de maniére qu'il ne put vaciller ; enſuite couvrant l'ouverture d'une coque d'oeuf qui l'embraſſoit exactement, & qui deſcendoit encore quelques lignes plus bas, je mis la boëte dans la machine cilindrique, pour y faire couver l'oeuf, & auſſi ſouvent qu'il me prenoit envie de voir les progrés du germe, je ſortois la boëte, & levois le couvercle. J'ai fait la même opération à des oeufs qui couvoient actuellement depuis un, deux, & même trois jours, & le ſuccés a toujours été le même ; pourvû que l'opération ne durât pas aſſez longtems pour les laiſſer réfroidir.

Je vais maintenant rapporter le ſuccés qu'a eû cette experience, que j'ay eu la curioſité de continuer pendant tout le mois de Juillet dernier ; & pour épargner l'ennui de rappeller ſouvent les mêmes dates, je déſignerai chaque embrion par le Numero de la boëte où il étoit logé.

Le No. 1. contenoit un oeuf que je decoëffai le 7. Juillet. Il couvoit depuis le 5. le germe étoit encore tout blanc ; le 8. le cercle extérieur etoit rouge & l'on voyoit trés diſtinctement à l'oeil nud les arteres & le battement du coeur. Il continua a ſe développer pendant le 9. & le 10. quoique je le découvriſſe trés ſouvent. Le 11. j'y obſervai un balancement, ou mouvement de libration de tout le corps, qui s'accordoit parfaitement avec le mouvement de l'artere, & qui etoit trés ſenſible. Le 18. il avoit amené ſa tête ſous l'aile. Le 19. le balance-

ment n'etoit plus ſi viſible, mais en échange on voyoit le mouvement de ſes cuiſſes. Le 20. il étoit déjà couvert de plumes comme un Poulet de treize jours. Le 21. voyant qu'il avoit preſque conſumé tout l'albumen, je lui en donnai d'un autre oeuf chaud, au moyen d'un tuyau de verre. Le 22. il vivoit encore, & continuoit de croitre, je crus devoir continuer auſſi à lui fournir de l'albumen, & peut-être luy en donnai-je trop; depuis cette derniere injection, il ne donna plus aucun ſigne de vie. Le 21. il s'etoit formé une moiſiſſure, qui m'obligea de l'oter. Ce Poulet avoit vecû quinze jours entiers dans ſa coque ouverte.

No. 2. Le 8. Juillet j'ouvris un oeuf frais, c. à d. qui n'avoit point couvé; & le plaçai dans le cilindre. Le 9. je n'y apperçus aucun changement; le 10. il s'etoit formé un grand cercle rougeâtre, & l'on voyoit quelques points, ou traits rouges, épars dans l'enceinte de ce cercle. L'animal même étoit encore tout blanc; cependant l'ayant tenu quelque tems expoſé au grand jour, j'y remarquai fort bien ſans Loupe le mouvement du coeur, mais plus lent & plus foible que n'eſt celui des Poulets de trois jours. Apparemment que le petit animal périt pour avoir été trop longtems expoſé a l'air hors de ſon four; je n'y vis plus de mouvement quelques heures aprés. Le lendemain j'y remarquai deux taches conſidérables de ſang foncé, qui paroiſſoit s'être extravaſé, & un commencement de moiſiſſure pas loin du corps de l'animal. Le 12. la moiſiſſure ayant augmenté, je fus obligé de l'oter.

Le 9. Juillet j'ouvris un oeuf qui couvoit depuis le 6. Le Poulet étoit vivant, & l'on voyoit diſtinctement le ſang paſſer d'un ventricule à l'autre. Pour amener l'animal ſous l'ouverture, je fis écouler une grande partie de l'albumen, cependant il continua à vivre & à croitre dans le four pendant trois jours & demi. Le 12. vers le ſoir il s'y forma une moiſiſſure, le ſang ſe retira des veines répanduës dans le chorion, & s'engorgea dans l'animal de telle façon qu'il en rempliſſoit la capacité; il étoit, quand je l'otai, de la taille d'un Poulet de ſix jours.

No.

No. 4. J'ouvris le 13. un oeuf frais, (toujours par le gros bout,) le germe ne parut point. Je voulus voir s'il ne ſe mettroit pas inſenſiblement de lui-même dans la ſituation horizontale; ainſi je me contentai de recouvrir ſimplement l'ouverture d'une coque d'oeuf. Le 14. le germe ne paroiſſoit pas encore, on voyoit cependant déjà un ſegment conſidérable de ſon chorion, ou du cercle extérieur qui l'environne. Le 15. le germe n'etoit pas encore viſible, mais je vis un plus grand arc du cercle extérieur, & ce cercle, qui la veille etoit encore blanc, paroiſſoit déjà du plus beau rouge: enfin le 16. l'Embrion parut entiérement à découvert au bord de l'ouverture, & le *point ſaillant* étoit trés viſible. Je m'aviſai de placer cet Embrion, aprés l'avoir découvert, ſous une cloche de verre de 5 pouces de diametre, & de huit pouces de haut; j'y ajoutai un Thermometre, qui reſta conſtamment à nonante deux degrés. Je ne voulus pas augmenter le degré de chaleur, pour ne pas faire périr la couvée qui étoit dans le même cilindre. Cependant le Poulet ne laiſſa pas de vivre, & de croitre jusqu'au 18. au matin, que j'apperçus au travers de la cloche une moiſiſſure qui ſe formoit autour du chorion; en peu d'heures les veines du chorion ſe vuiderent, & tout le ſang refluant vers le coeur, le petit animal périt. Il avoit l'age & la taille d'un Poulet de ſix jours, dont il avoit paſſé les deux derniers à découvert ſous la cloche. Je puis d'autant plus préciſément faire l'eſtimation de l'age de ces embrions par leur taille, que j'en conſerve dans l'Eſprit de vin la ſuite complette depuis l'age de deux jours jusqu'à celui où ils éclоſent.

Le No. 5. contenoit un oeuf frais que j'ouvris le 13. Juillet; comme le germe ne paroiſſoit point, je ſuçai environ la moitié de l'albumen avec un tuyau de verre; enfin le germe parut ſous l'ouverture, aprés quoy je fis rentrer à l'aide du même tuyau quelque peu de blanc d'oeuf que j'en avois pompé: le germe étoit un des plus beaux que j'aye jamais vû, c'etoit un cercle blanc du diametre d'une ligne & demie environ, & au milieu on voyoit une trace blanche qui traverſoit le centre, & qui de ſes extrémités touchoit presque à la circonference.

Il n'y a point de doute que cette trace ne fut l'animal luy-même. Le 14. il paroiſſoit avoir un peu augmenté ſon volume. Le 15. je ne le trouvai point avancé. Le 16. il etoit encore au meme état ; le jaune ſur la pellicule duquel le germe eſt attaché ſembloit même ſe ſecher. J'y introduiſis du blanc d'un autre oeuf que je tenois toujours dans le cilindre pour cet uſage. Le 17. l'animalcule donna enfin des ſignes de vie, le petit cercle qui termine le germe s'etoit élargi, les veines paroiſſoient ; & le coeur battoit comme dans un embrion de deux jours qui auroit été bien couvé ; celui-ci couvoit déjà depuis quatre jours, & il avoit eu conſtamment le degré de chaleur convenable. Le 18. il continua de croitre presqu'à vue d'oeil, & ſembloit ſe dédommager du tems qu'il avoit négligé. Le 19. il vivoit & croiſſoit encore, mais il s'etoit formé une moiſiſſure au chorion. Je verſai du blanc d'oeuf ſur cette tache, & l'animal vivoit encore à onze heures du ſoir. Le lendemain 20. il étoit mort. Il avoit la taille d'un embrion de ſix jours.

Le No. 6. contenoit un oeuf que j'ouvris le 14. de Juillet, il étoit depuis quarante deux heures dans le cilindre. Je n'en apperçus point le germe, mais ſeulement de grands arcs de cercle briſés, comme des couches de nuages, qui occupoient prés de la moitié du jaune, je recouvris l'oeuf ſans le remuer. Le 15. j'y remarquai le même cercle rouge que j'avois apperçu ce même jour au No. 4. Comme je voulus amener le germe ſous l'ouverture, je fis écouler une partie aſſez conſidérable de l'albumen, que je ne fis point rentrer dans l'oeuf, de peur que le germe ne perdit la ſituation qu'il venoit de prendre, & qui étoit trés avantageuſe. Enſuite je rognai avec des ciſeaux les bords de la coque, pour élargir davantage les bords de l'oeuf. Le 16. & le 17. l'embrion continua de croitre & de ſe former. Le 18. comme il paroiſſoit fort vigoureux, je le plaçai, aprés en avoir enlevé le couvercle, ſous la cloche de verre, d'où je venois d'oter le No. 4. Cinq ou ſix heures aprés l'y avoir placé, je m'aperçus que ſon mouvement avoit ceſſé, je me hatai de lever la cloche, & de recouvrir l'embrion

brion de ſa coque ; un quart d'heure aprés, le mouvement du coeur étoit auſſi régulier qu'il l'avoit été avant que je le miſſe ſous la cloche. Depuis le 19. jusqu'au 22. le Poulet continua de vivre & de croitre, comme il l'auroit fait dans une coque entiere. Le 23. il vivoit encore, mais une pellicule en forme de nuage transparent qui le couvroit, me fit craindre que ce ne fût le commencement d'une moiſiſſure. Le 21. il avoit conſiderablement crû, & les plumes commençoient à percer. Le 25. la pellicule qui avoit commencé à ſe manifeſter le 23. étoit bien formée, mais aſſez tranſparente pour qu'on put voir les mouvemens du Poulet, qui étoit presque tout couvert de plumes. Le 26. & le 27. il groſſit beaucoup. Le 28. il ſe portoit encore trés bien, mais il s'etoit formé une tache de moiſiſſure au chorion. Le 29. l'animal vivoit encore, mais la moiſiſſure avoit gagné tant de terrein qu'elle fit périr l'embrion le même jour : il en avoit vécu ſeize, & il étoit de la taille des plus avancés de cet âge là ; je le conſerve encore dans l'Eſprit de vin.

No. 7. Le 19 j'ouvris un oeuf, qui couvoit depuis trois jours préciſément. J'amenai l'embrion ſous l'ouverture, les veines étoient déja bien marquées, & le battement du coeur trés ſenſible. Je le plaçai, ouvert comme il l'etoit, ſous la cloche de verre avec un petit Thermometre de Mercure ; le degré de chaleur fut conſtamment de 94 degrés. L'embrion vécut & groſſit dans cet état depuis le 19. jusqu'au 23. & parut ſe porter auſſi bien que s'il avoit été renfermé dans ſa coquille, je levois chaque jour une fois la cloche pour eſſuyer les vapeurs qui s'attachoient à ſes parois, & donner paſſage aux exhalaiſons qui auroient pû nuire à l'embrion. Cependant au bout de 3 jours & dixhuit heures de ſéjour ſous la cloche, le mouvement de l'animal ceſſa, & les veines du chorion ſe vuiderent. Je n'apperçus néanmoins aucun veſtige de moiſiſſure.

Il réſulte de ces expériences, qu'il ſera trés aiſé de ſuivre d'auſſi prés qu'on le voudra, la formation ou le dévelopement d'un Poulet, & cela

cela pendant un tems beaucoup plus que ſuffiſant : de cette maniere on aura le double avantage de voir ces progrés de plus prés que perſone n'a pû les voir jusqu'à preſent, & de les voir ſur le même animal, ce qui eſt trés eſſentiel ; puisqu'il arrive ſouvent que de deux oeufs couvés enſemble & dans le même tems, & ouverts à 6. 12. & même 24. heures d'intervalle l'un de l'autre, le Poulet du dernier n'eſt pas plus avancé, & l'eſt même quelquefois moins que celui qu'on a tiré le premier. D'ailleurs, quoique le Poulet continue à ſe former à peu prés de même, aprés qu'on a ouvert la coque, qu'il l'eut fait ſans cette opération, je crois cependant avoir obſervé que l'ouverture retarde quelque peu ſon progrés ; ce qui en facilite encore l'Obſervation. Le ſeul inconvenient qu'il y ait à cette méthode, c'eſt la moiſiſſure à laquelle on expoſe l'animal en le viſitant trop ſouvent ; mais peut-être y a-t-il quelque moyen de l'empêcher ; peut-être auſſi n'eſt-elle pas autant à craindre en certains mois qu'en d'autres.

Aprés tout, l'expérience m'a fait voir que l'animal peut ſubſiſter au moins 15 jours dans un oeuf ouvert, ſans qu'il s'y forme de moiſiſſure, & je ne vois point d'impoſſibilité à l'amener heureuſement à terme. Quoiqu'il en ſoit, ce qu'il y a de plus intereſſant dans la formation du Poulet ſe paſſe dans les quatre premiers jours de la couvée ; car aprés ce tems-là on découvre déjà à l'oeil ſa ſtructure, telle qu'elle eſt à trés peu prés à la fin de la couvée ; & pour remédier a l'inconvenient de la moiſiſſure on n'aura qu'à tenir un nombre ſuffiſant d'oeufs ouverts d'un même âge ; on pourra alors ſuppléer à ceux qui viendront à moiſir ou à périr ſous la cloche par l'un des autres, qu'on aura laiſſé repoſer jusqu'alors ſans le découvrir, & il ſera trés aiſé de comparer la taille de celui-ci avec celle du Poulet qui ſera péri, & de ſuivre ainſi les progrés de l'animal ſans la moindre interruption. Il eſt à ſouhaiter que des Phyſiciens habiles, qui ont le loiſir & la commodité de faire ces Obſervations, veuïllent s'en donner le plaiſir, & en rendre un compte exact au Public.

Pendant

Pendant que je faiſois ces expériences ſur les oeufs ouverts, les autres acheverent de ſe couver dans le même vaſe cilindrique. Il y en avoit de deux differentes dates ; les premiers étoient du 26 Juin, je les avois d'abord placés dans un four voûté en berceau, mais cette machine ayant commencé à faire eau le 29. toute la couvée fut expoſée aux plus grandes variations du chaud & du froid, jusqu'au 2. Juillet, que je la fis tranſporter dans le four cilindrique: de toute cette couvée qui étoit de cent treize oeufs je n'ai eu que treize Poulets vivants. La ſeconde n'etoit que de 26 oeufs, que je plaçai le 5. de Juillet avec les autres dans le même four, elle réüſſit ſi bien que de tous les oeufs fécondés qu'elle contenoit, il n'y en eut qu'un ſeul dont le Poulet périt. Ils furent tous éclos dés le 25. & le premier qui ſortit n'avoit que 19 jours & demi de couvée: le Thermometre avoit été ordinairement entre 98 & 100.

N'ayant pas jugé à propos de recommencer une nouvelle couvée, je n'ai pas pouſſé plus loin non plus les expériences ſur les oeufs ouverts. Une ſeule me paroit encore digne d'être rapportée ici, parce qu'elle peut faciliter le ſuccés des Obſervations qu'on voudra faire en ſuivant ma méthode. Comme j'avois remarqué que le germe No. 4. s'etoit placé de lui-même horizontalement au bout de trois jours, je jugeai que la même choſe pourroit auſſi arriver à des oeufs qu'on tiendroit pendant quelques jours dans une ſituation verticale, ſans les couver. Pour m'en aſſurer j'en plaçai quatre dans autant de petits verres, en ſorte que le bout pointu fut préciſément au fond du verre, j'en décapitai un chaque jour par le gros bout. Je n'apperçus point le germe de ceux qui n'avoient été dans cette poſition qu'un jour ou deux. Je le vis vers la circonference de l'ouverture dans celui de trois jours, & je trouvai ce germe parfaitement horizontal dans l'oeuf qui ſe ſoutenoit depuis quatre jours ſur ſa pointe. Comme je n'ai point réitéré une expérience ſi facile à vérifier, je n'aſſurerai pas que le ſuccés en ſoit infaillible. S'il l'etoit, cela abrégeroit conſidérablement la difficulté de couver les oeufs ouverts, & il ne ſeroit

plus néceſſaire de priver les embrions d'une partie du ſuc deſtiné à leur formation.

Je l'ai déjà dit; je laiſſe à des Phyſiciens plus habiles, & aux Curieux qui ont la liberté de diſpoſer de leur loiſir, à faire uſage de cette découverte, & à donner au Public une hiſtoire bien ſuivie du dévelopement des embrions. Il me ſuffit d'en avoir montré la poſſibilité, & d'avoir indiqué la route qui peut y conduire. Je ferois ſcrupule d'y donner un tems que je dois à des occupations bien plus importantes. Je me borne par la même raiſon à propoſer à ceux qui auront le loiſir de s'appliquer à ces obſervations deux idées, dont je ne ſuis pas en état de vérifier par moi-même la réalité.

La premiere, c'eſt que l'albumen étant deſtiné, comme je n'en doute point, à la formation du corps de l'embrion, on pourroit eſſayer d'oter au germe tout le blanc de ſon oeuf, dès les premiers jours de la couvée, ou même avant de le mettre couver, & y ſubſtituer l'albumen de l'oeuf de quelqu'autre oiſeau domeſtique ou ſauvage, en commençant néanmoins ces expériences par les oiſeaux de même genre. Si l'embrion continue à vivre & à croitre malgré cette ſubſtitution, comme la choſe me paroit aſſez vraiſemblable, on pourra voir quel effet le changement de matiere peut produire ſur le corps de l'animal; & des obſervations variées & réïtérées ſur ce ſujet, ſi elles ne vont pas à nous donner de nouvelles eſpeces d'animaux, répandront du moins beaucoup de jour ſur la queſtion qui partage encore aujourd'hui les Phyſiciens; ſavoir, ſi le germe eſt déjà organiſé avant l'incubation, ou non? En ſuppoſant le ſuccés de cette expérience, il ſeroit facile de la diverſifier à l'infini, tant par raport au tems où ſe feroit l'echange des liqueurs, que par raport aux liqueurs & aux germes même, & pour aſſûrer davantage ce ſuccés on pourroit laiſſer l'oeuf recouvert juſqu'au moment où le pouſſin doit éclore; on pourroit même coler le couvercle à la coque, pour empêcher les ſemences de moiſiſſure de pénétrer dans l'oeuf.

La

La ſeconde idée que j'oſe propoſer, concerne l'uſage qu'on pourroit faire en Médecine du four, ou vaſe cilindrique, dans lequel j'ay fait éclore les Poulets. Comme la chaleur propre à couver les oeufs, eſt à peu prés celle de notre Eſtomac, on pouroit faire trés aiſément une infinité d'obſervations ſur l'altération, & les effets que produit la chaleur ſeule ſur les aliments ſolides & fluides dont nous nous nourriſſons, de même que ſur le tems qu'elle y employe, ſur le réſultat du mélange de divers ſucs entr'eux, & avec nôtre ſang, & ſur pluſieurs autres ſujets, que je laiſſe aux Médecins à imaginer.

OBSERVATION ANATOMIQUE

SUR UN NOEUD, OU GANGLION, DU SECOND RAMEAU DE LA CINQUIEME PAIRE DES NERFS DU CERVEAU, NOUVELLEMENT DÉCOUVERT,

AVEC L'EXAMEN PHYSIOLOGIQUE DU VERITABLE USAGE DES NOEUDS, OU GANGLIONS DES NERFS,

PAR M. MECKEL.

Traduit du Latin.

Dans toutes les recherches qui ont pour objet la ſtructure des choſes que la Nature produit, ou ne ſçauroit jamais trouver le bout; des obſervations exactes & continuelles conduiſent toujours à de nouvelles découvertes, & plus on étudie, plus on apprend.

Entre tous les Corps, dont Dieu a enrichi notre Terre, il n'y en a aucun, dont le mechaniſme ſoit plus compoſé & plus artificiel, & qui nous offre un plus grand nombre de parties, & des parties plus ſubtiles à découvrir, que le Corps humain, dont la connoiſſance eſt auſſi merveilleuſe que néceſſaire.

L'ardeur pour cette étude exacte & approfondie du Corps humain, jointe à l'occaſion favorable que j'ai de faire des Obſervations Anatomiques ſur quantité de cadavres humains, dont je ſuis à portée de profiter, ſous la haute protection d'un Monarque ſi grand par ſes connoiſ-

connoiſſances, & ſoutenu par les ſoins infatigables de nôtre Illuſtre Préſident, & de nôtre Savant Directeur, pour les progrés des Sciences; ces diſpoſitions, dis je, & ces conjonctures, m'engagent à faire ſans ceſſe des diſſections, dans le deſſein d'arriver à de nouvelles découvertes Anatomiques.

J'ai commencé à faire des recherches ſur la partie la plus délicate, la plus ſubtile, & en même tems la moins exactement connuë dans l'Anatomie; je veux parler des Nerfs. Le ſuccés m'encourage à les continuër, ayant eu le bonheur de découvrir un *Ganglion* inconnu jusqu'a préſent, & dont je vais donner la deſcription.

I. J'ai rencontré ce Ganglion en continuant mes Obſervations Anatomiques ſur le nerf le plus difficile à connoitre de tous, celui de la cinquieme paire du cerveau, dont j'ai donné une Deſcription exacte dans ma Diſſertation Latine, *de quinto pari*, &c. Pour y donner un nouveau degré de perfection, je vais ajouter la découverte ſur laquelle doit rouler ce Mémoire. Elle appartient principalement à la deſcription du ſecond rameau du nerf de la cinquieme paire, qui eſt contenuë dans la Section IV. de ma Diſſertation. J'y ai donné §. 60-63. la deſcription de la diviſion du ſecond rameau de la cinquieme paire, en diſant; que ce nerf étant ſorti hors de ſon canal ſe diſtribuë, de maniere que de ſa branche deſcendante naît le nerf vidien rétrograde, avec les naſaux & les palatins, & qu'ainſi le ſecond rameau de la cinquieme paire, aprés qu'il eſt ſorti de ſon canal, ſe partage en quatre branches, le nerf ſous-orbitaire qui continuë le tronc, le rameau deſcendant, qui donne le vidien rétrograde, & les naſaux, les nerfs palatins, & le dental poſtérieur. Mais, aprés bien des recherches attentives, j'ai trouvé qu'il y a un ganglion enfermé entre les os de la machoire ſupérieure, qui produit, & la racine du nerf intercoſtal, & les nerfs naſaux, & les palatins; ce que ni moi, ni perſonne, n'avoit encore obſervé. Je crois qu'il eſt néceſſaire d'en donner la deſcription, pour montrer la veritable diviſion des rameaux de la ſeconde branche de la cinquieme paire des nerfs. Et comme cela ne pourroit être bien compris ſans le ſecours

de quelque Figure, j'en joins une d'aprés le cadavre même, qui ſe rapporte à celle de ma Diſſertation, & qui fait voir le nouveau ganglion du ſecond rameau de la cinquieme paire, avec ſes racines & les rameaux qui en naiſſent.

II. Le ſecond rameau de la cinquieme paire (*k*)(*) étant ſorti du crane par ſon canal, dans la fente, ou foſſe pterygopalatine (*a*) (**) donne deux rameaux minces (*l*, *m*.) qui ſont ſouvent réünis en un ſeul. Ces deux petits rameaux deſcendent par la graiſſe molle, dont la foſſe pterygopalatine eſt remplie, derriere l'artere naſale ſupérieure, qui va vers le dedans par le trou ſphénopalatin dans les narines. Ils continuent en deſcendant ſur la partie ſupérieure de la face convexe poſtérieure du ſinus maxillaire, deſſous la fente ſphéno-maxillaire. Dans ce chemin les deux rameaux ſusdits ſe joignent en un nerf, derriere l'artere naſale. Ce nerf donc étant, ou formé par la réünion de deux petits, ou unique depuis ſon origine du ſecond rameau de la cinquieme paire, ſe courbe en deſcendant un peu en dedans & en arriere vers le trou ſphénopalatin, formé de la dure mére; & tout auprés de ce trou ce rameau s'inſere, ou forme un ganglion (*n*) rougeâtre, un peu dur, triangulaire, ou cordiforme, plus convexe à ſa ſurface extérieure, & un peu plat à ſa ſurface intérieure. Ce petit ganglion avec ſa ſurface intérieure eſt ſitué auprés du trou ſphénopalatin, mais ſa ſurface extérieure eſt dans la graiſſe molle qui l'environne, & dont la foſſe pterygopalatine eſt remplie. La ſituation de ce ganglion dans la fente ou foſſe étroite, entre les os de la machoire ſupérieure & les aîles pterygoïdes, & la graiſſe molle qui l'envelope, rendent ſa préparation ſi difficile qu'on ne le peut bien voir ou démontrer, qu'en procedant à la diſſection avec la plus grande exactitude.

III. De ce ganglion, que j'appelle le *ganglion ſphénopalatin* du ſecond rameau de la cinquieme paire, à cauſe du trou ſphénopalatin, auprés duquel il eſt ſitué, ſortent les rameaux naſaux ſupérieurs antérieurs, le nerf vidien qui donne la racine du nerf intercoſtal, & le pa-

(*) Voy. la Fig. (**) Voy. ma Diſſ. Lat. pag. 49. n. *a*.

palatin. Les rameaux, ou nerfs naſaux ſupérieurs antérieurs, (c'eſt le nom que je leur ai donné dans ma Diſſertation Latine, §. 62.) ſont trois ou quatre petits nerfs, qui naiſſent de la ſurface interieure du ganglion ſphénopalatin, ſitué auprés du trou ſphénopalatin (*o, o*) Ces petits nerfs percent la dure mére, qui ferme le trou ſphénopalatin, & s'y forment de petits tuyaux, entre la doublure de la membrane qui tapiſſe les os des narines, & la membrane pituitaire. Par ces petits conduits membraneux ils entrent dans la cavité des narines, à la partie poſtérieure du conduit ſupérieur. Ces rameaux naſaux ſupérieurs antérieurs dans les narines ſe gliſſent entre la membrane pituitaire, & le perioſte des narines, & diſtribuënt leurs fibres nerveuſes dans la membrane des cellules ethmoïdes poſtérieures, dans celle de la partie poſtérieure de la conque ſuperieure des narines, de la partie poſtérieure de la cloiſon, & du conduit ſupérieur des narines.

IV. Le bord poſtérieur du ganglion ſphénopalatin atteint presque l'ouverture antérieure du canal, ou trou pterygoïdien, ou vidien, dans lequel s'enfinuë le nerf rétrograde vidien, qui donne la racine du double nerf intercoſtal. De ce bord poſtérieur du ganglion ſphénopalatin ſort un petit rameau (*p*) qui prés de ſon origine entre par l'ouverture antérieure dans le canal pterygoïdien, & en le parcourant de la partie antérieure vers la poſtérieure, il donne premierement deux ou trois petits filets nerveux, qui s'appellent nerfs naſaux ſupérieurs poſtérieurs de la cinquieme paire (*qq.*) Ces petits filets percent le canal pterygoïdien oſſeux lateralement jusqu'en dedans, & entrent dans la partie poſtérieure des narines, où ils diſtribuënt leurs fibres dans la membrane pituiteuſe qui tapiſſe l'os *vomer*.

V. Le nerf vidien, aprés avoir donné ces nerfs naſaux ſupérieurs poſtérieurs, continuë par ſon canal en arriere, & un peu vers le dehors, (*) & ſe diviſe en deux rameaux, l'un ſuperficiel, ou ſupérieur (*r*) qui communique avec la portion dure de la ſeptième paire des nerfs, (*c*) & l'autre profond (*s*) qui eſt la racine du nerf intercoſtal. Celle-

(*) Voy. les §§. 64. 65. & 66. de ma Diſſert.

Celle-ci, (ce que j'ai ſouvent remarqué, & que j'ai trouvé dans le cadavre d'aprés lequel eſt deſſinée la figure ci-jointe,) étant parvenuë au canal carotique, à la ſeconde fléxion de l'artere carotide, (*d*) entre par dehors dans ce canal, qui eſt fermé dans cet endroit, ou par une forte membrane, ou par une mince lamelle oſſeuſe. Dans ce canal carotique le nerf gliſſe ſur l'artere carotide, & deſcendant en dehors, ſur la ſeconde courbure, ou fléxion de l'artere carotide, communique & ſe joint aux rameaux deſcendans de la ſixieme paire (*h*, *i*,) qui, aprés s'être ſéparés en deux petits nerfs, ſe rejoignent en deſcendant en un ſeul. Dans ce rameau de la ſixieme paire des nerfs s'infere le rameau profond du nerf vidien de la cinquieme paire, (*t*) & ces deux nerfs joints enſemble, forment dans le canal carotique un nerf (*u*) qui eſt le commencement, ou la racine du nerf intercoſtal. Car en deſcendant par le canal carotique il ſort hors du crane, & ſe termine dans le premier ganglion cervical du nerf intercoſtal (*v*) qui eſt ſitué hors du crane, à la partie antérieure ſupérieure du col.

VI. Cette origine du nerf intercoſtal du ganglion ſphénopalatin du ſecond rameau de la cinquieme paire, pourroit peut-être porter ceux qui favoriſent l'opinion de M. *Petit*, à croire que ces racines, ou commencemens, du nerf intercoſtal, en montant par le canal carotique, s'inferent dans le nerf de la ſixieme paire, & dans le ganglion ſphénopalatin de la cinquieme paire. Mais c'eſt tout le contraire; car l'epaiſſeur plus conſidérable de ce nerf vidien vers l'endroit où il ſort du ganglion; & principalement la direction rétrograde de l'origine des rameaux naſaux ſupérieurs poſtérieurs du nerf vidien, (*qq*) auſſi bien que la même direction dans laquelle le rameau de ce nerf vidien, qui communique avec la portion dure de la ſeptieme paire (*r*) devroit être ſortie de ſon tronc; tout cela répugneroit entièrement à la diviſion naturelle des nerfs. Il faut donc conclurre, que ce nerf qui ſort du ganglion ſphénopalatin eſt le vrai commencement & la racine du nerf intercoſtal.

VII. Enfin

VII. Enfin de la partie inférieure du ganglion ſphénopalatin deſcend le plus gros des nerfs qui ſortent de ce ganglion. C'eſt ce rameau qui donne le nerf antérieur palatin ſeul, qui eſt le plus grand des autres rameaux nerveux palatins. (ω) Ce rameau, en deſcendant derriere l'artere naſale par la foſſe pterygopalatine, ſe diviſe en deux ou trois rameaux, qui s'inſinuënt dans les canaux pterygopalatins.

VIII. Le nerf palatin antérieur, le plus grand de tous les autres, ſort toujours du ganglion ſphénopalatin (β). De ſon origine il s'approche embas de l'ouverture du canal pterygopalatin antérieur, qui eſt plus large que les autres, & par lequel il deſcend avec l'artere palatine. Dans ce canal il donne un petit rameau, ou deux naſaux inférieurs (αα) qui percent le coté interieur du canal, forment l'apophyſe naſale de l'os du palais, & entrent dans le conduit inférieur des narines. Dans ce conduit ils continuent entre le perioſte & la membrane pituitaire à la partie poſtérieure de la conque inférieure des narines, & diſtribuënt leurs fibres dans la membrane pituitaire qui tapiſſe ces parties.

IX. Le gros nerf palatin antérieur gliſſe embas par ſon canal pterygopalatin, étant ſouvent diviſé en deux rameaux dans ce même canal, qui avec l'artere du palais qui les accompagne, ſortent par le trou palatin poſtérieur, & vont en devant dans la membrane glanduleuſe qui couvre la voûte du palais. Le rameau intérieur diſtribuë ſes fibres dans la membrane de la voûte du palais qui eſt plus prés de ſa ſuture; & l'autre dans la membrane glanduleuſe de la voûte du palais par les dents de la machoire ſupérieure, & dans les gencives intérieures de ces mêmes dents, & continuë jusqu'aux dents inciſives de la machoire ſupérieure.

X. Le rameau palatin poſtérieur, qui eſt plus petit que le premier, (x) deſcend derriere l'antérieur par ſon canal, étant ſorti du ganglion ſphénopalatin, on conjointement avec le grand antérieur, ou ſéparément. Il ſort de ſon canal par le trou pterygopalatin poſtérieur,

avant le crochet de l'apophyſe pterygoïde, & diſtribuë ſes fibres dans la membrane glanduleuſe de la cloiſon du palais, & dans le muſcle levateur de cette même cloiſon.

XI. Le plus mince des trois rameaux palatins eſt le troiſieme nerf palatin extérieur (y.) Ce petit nerf prend quelquefois ſon origine du ganglion ſphénopalatin, mais il ſort ſouvent du ſecond rameau même de la cinquieme paire des nerfs qui paſſe ſur la foſſe pterygopalatine. Il deſcend un peu extérieurement de cette origine entre le muſcle pterygoïdien externe, & la ſurface poſtérieure convexe du ſinus maxillaire. Il entre dans le canal pterygopalatin extérieur, & étant deſcendu par ce canal, il ſort à coté de la tubéroſité de l'os de la machoire ſupérieure, & diſtribuë ſes fibres dans la luette & les glandes poſtérieures du palais.

XII. Aprés avoir donné la deſcription du ganglion ſphénopalatin, & des rameaux qui en ſortent, il s'agit de rechercher, quel a été le but de la Nature en faiſant paſſer la racine du nerf intercoſtal, & les autres rameaux à travers un ganglion. Il n'eſt pas aiſé à la verité d'en alléguer une raiſon ſans réplique : cependant je tâcherai d'en rapporter une, qui ſe trouve démontrée en quelque ſorte par la Nature même, dans tous les nerfs qui traverſent des ganglions. Et pour cet effet je vais auparavant examiner en peu de mots, quel eſt l'uſage des ganglions nerveux dans le corps humain.

XIII. Sans m'arrêter aux hypotheſes particulieres & peu ſuivies que l'on a imaginées ſur cette matiere, on peut en alléguer trois qui ont eu le plus de vogue. La premiere eſt celle de *Lancifius*, qui prétend que la ſtructure des ganglions eſt muſculeuſe & tendineuſe, & ſert par conſéquent à faire couler les eſprits animaux ; mais cette prétenduë ſtructure muſculeuſe & tendineuſe n'a été obſervée par aucun Auteur, & par conſéquent cette opinion n'a de fondement que dans l'imagination de celui qui l'a propoſée, & ne peut abſolument être admiſe. D'autres croyent que les ganglions ont été joints aux nerfs pour en arrêter l'ebranlement ; de peur que cet ébranlement porté jusqu'au cer-

cerveau, ne cauſât quelque désordre dans l'origine commune des nerfs. Mais cela ne s'accorde pas mieux avec l'expérience, puisqu'on remarque au contraire, que les nerfs qui ont le plus de ganglions, comme le nerf intercoſtal, font paſſer avec beaucoup de promtitude & de vivacité, les impreſſions dont ils ſont eux-mêmes affectés, aux autres nerfs avec leſquels ils ont communication & au cerveau. Pour s'en convaincre, il ne faut que faire attention aux mouvemens convulſifs, qui s'excitent avec tant de force & de précipitation dans les nerfs uterins des femmes hyſteriques, lorsqu'ils ſont tant ſoit peu irrités. Enfin ceux qui adoptent un troiſieme ſentiment, diſent, qu'il ſe fait dans les ganglions une nouvelle ſécrétion du fluïde nerveux; & ils ſe fondent ſur ce que les ganglions ont un plus grand nombre de vaiſſeaux & une couleur plus rouge que les nerfs: mais cette concluſion n'eſt nullement juſte, puisque les organes qui ſervent à la ſécrétion des eſprits ſont d'une ſubſtance fort tendre, au lieu que les ganglions dont la texture eſt denſe & celluleuſe, ont une dureté toute particuliere.

XIV. Aucune de ces théories n'ayant donc pour elle, ni la Nature, ni la ſtructure des ganglions, je ne puis leur accorder mon ſuffrage, & je vais en donner une qui a l'avantage d'etre juſtifiée par la ſtructure de tous les nerfs, qui ſe diſtribuënt dans les ganglions. En effet cette ſtructure indique ſenſiblement & diſtinctement que les ganglions nerveux ont un triple uſage. Le premier eſt de diviſer un petit nerf en pluſieurs nerfs, & d'augmenter par là le nombre des rameaux nerveux. Le ſecond, de faire parvenir les nerfs commodément par des directions differentes aux parties, auxquelles ils appartienuent; & le troiſieme, de réünir pluſieurs petites fibres nerveuſes en un gros nerf.

XV. Le premier uſage des ganglions, qui conſiſte à partager les petits nerfs en pluſieurs branches, ne ſçauroit être conteſté que par quiconque n'a jamais examiné lui-même dans le corps la maniere dont les nerfs ſe diſtribuent par les ganglions. Le grand nombre des ganglions du nerf intercoſtal prouve évidemment ce que j'avance ſur l'uſage des ganglions; car ils ſont presque tous produits par des rameaux

nerveux ; & néanmoins il en ſort aprés une quantité de nerfs beaucoup plus grande que celle qui y étoit entrée. Je ne veux, pour la conviction de ceux qui poſſedent l'Anatomie, alléguer ici, que le plus grand ganglion du corps humain, auquel ſa ſtructure a fait donner le nom de *ganglion ſemi-lunaire*, parce qu'il forme un arc autour de l'artere méſenterique ſupérieure, & de l'artere coeliaque. Les nerfs d'où nait ce ganglion ſemi-lunaire ſont aſſez grêles, puiſque ce ſont les nerfs ſplanchniques, qui étant ſortis des ganglions thorachiques du nerf intercoſtal, deſcendent des deux cotés du thorax ſelon la longueur des vertebres, & ſe jettent dans l'abdomen par le diaphragme. C'eſt de ces foibles rameaux que ſe forme le grand ganglion, qui à ſon tour déploye ces rameaux preſque ſans nombre, qui vont ſe rendre aux boyaux grêles, aprés avoir envelopé l'artere méſenterique, & aux autres viſceres du bas ventre. De même encore le ganglion cardiaque, quoiqu'il ſorte d'une racine fort petite, donne ce grand nombre de rameaux qui forment le pléxus cardiaque. Le ganglion ophtalmique naît pareillement des deux racines du premier rameau de la cinquieme paire & du nerf de la troiſieme paire : cependant il produit ſix petits nerfs ciliaires, & ſouvent davantage ; & chacun de ces petits nerfs en particulier eſt plus grand que les racines qui entrent dans le ganglion. Sans parler des autres ganglions méſenteriques, qui ſont compris ſous la même loi, qu'il me ſoit au moins permis de citer encore en preuve ce ganglion du nerf de la cinquieme paire, dont j'ai donné la deſcription dans ma Diſſertation latine, (*) & qui porte le nom de maxillaire, parce qu'il fournit à la glandule ſalivale maxillaire les nerfs dont elle eſt pourvuë. Ce ganglion, ſorti du petit nerf lingual, ou *hypogloſſe*, envoye cinq, ſix, ou même ſept petits rameaux nerveux à la glandule dont je viens de parler. Rien n'empêche donc que l'on ne ſoutienne que le ganglion ſphénopalatin, ſemblable en cela aux autres ganglions, n'a pour office, que de donner naiſſance à pluſieurs rameaux nerveux, en les faiſant ſortir commodément d'une même origine,

(*) p. 94. 95. & in not. ibid. *r.t.* fig I. n. 74. 75.

origine, c'eſt à dire, de la petite branche du ſecond rameau de la cinquieme paire. Car en effet ce ganglion ne doit ſa naiſſance qu'à deux, ou même à une ſeule petite racine, je veux dire, à la petite branche deſcendante du ſecond rameau du nerf de la cinquieme paire (*l.m.*) néanmoins les rameaux qu'il fournit, & qui ſont le vidien (*p*) les naſaux (*o.o*) & les palatins (*w*) ſurpaſſent presque tous ſes racines.

XVI. Peut-être qu'en me voyant conclurre de la ſtructure des ganglions, & de la maniere dont les nerfs qui y paſſent ſont diſpoſés & diſtribués, que ces premiers ſont deſtinés à augmenter le nombre des rameaux nerveux, on ſera tenté de ſoupçonner que je les crois capables de produire de nouveaux nerfs, & que je ſuppoſe par conſéquent dans le corps autant de petits cerveaux qu'il y a de ganglions. Mais la preuve que je ſuis bien éloigné de cette idée, c'eſt que j'ai déjà refuſé plus haut (§. XIII.) aux ganglions la ſécrétion du fluïde; propriété qui ſeroit cependant indiſpenſable, pour qu'ils fuſſent capables d'engendrer de nouveaux nerfs. Je vais donc continuer à puiſer dans l'Anatomie & dans la ſtructure des nerfs des raiſons, qui démontrent inconteſtablement la ſolidité de mon hypotheſe concernant la deſtination des ganglions.

XVII. On a prouvé depuis longtems que les petits tuyaux médullaires nerveux renfermés dans les nerfs, & qui ſervent au cours des eſprits animaux, ſont ſi ſubtils, qu'ils échapent entierement aux meilleurs Microſcopes. Outre cela nous voyons que tous les nerfs qui paſſent par les ganglions, ſont plus rouges & plus mous que les autres nerfs, & n'ont point de dure-mère proprement dite. C'eſt ce que démontrent ſi évidemment les rameaux innombrables du nerf intercoſtal, auſſi bien que les rameaux du ganglion ophtalmique, qu'il n'y a que ceux qui n'ont jamais vû ces nerfs qui puiſſent en douter. Cela étant ainſi établi, ſuppoſez qu'un petit rameau nerveux entre dans quelque ganglion, ce rameau eſt un amas de tubules nerveux. Le ganglion donc par lequel paſſe le nerf, fera qu'en le traverſant les tubules de ce nerf ſe ſéparent l'un de l'autre, & enſuite il envelopera

ces tubules nerveux d'une tunique rougeâtre & tendre. Ainſi le nerf qui eſt entré dans le ganglion, ſe diviſe par la ſéparation de ſes tubules en pluſieurs petits faiſceaux de tubules nerveux, c'eſt à dire, en pluſieurs petits nerfs.

Cette théorie eſt d'accord avec la ſtructure du nerf, qui paſſe par un ganglion. Les Anatomiſtes ſavent qu'il n'y a que la dure mère qui uniſſe & contienne en un ſeul nerf tant de tubes nerveux & de faiſceaux de tubules, & qui empêche qu'ils ne ſe ſéparent. On remarque en diſſéquant tout grand nerf, qu'il n'eſt que l'aſſemblage de pluſieurs petits nerfs en un ſeul, ſous l'envelope de la dure mère. Or les nerfs qui paſſent par des ganglions, ſe défont de cette envelope; & c'eſt ce qui donne lieu à la ſéparation de leurs tubules. Il réſulte donc de tout ceci qu'il n'y a aucune impoſſibilité que les tubules nerveux ſe ſéparent par le moyen des ganglions; & ce qui acheve de prouver que cette diviſion a réellement lieu, c'eſt que les nerfs qui ſortent des ganglions, ſont en plus grand nombre que ceux qui y entrent. Ainſi il eſt hors de doute que la diviſion des tubules nerveux, ou de leurs faiſceaux, ſe fait par le moyen des ganglions, puisque ceux-ci ſont incapables de produire de nouveaux nerfs.

XVIII. Mais ces petits tuyaux médullaires nerveux, ainſi dépouillés de la dure-mère, ne pourroient pas, tendres comme ils le ſont, ſoutenir les ébranlemens auxquels ils ſont continuellement expoſés dans le corps, ſans être bientôt comprimés & détruits, s'ils n'etoient dédommagés de cette privation par quelque autre envelope, qui ſubvint à leur foibleſſe. Or c'eſt l'uſage des ganglions, qui ſervent à revêtir d'une nouvelle envelope les faiſceaux des tubules nerveux, lorsqu'ils ſont ſéparés les uns des autres. On ne pourra leur refuſer cette proprieté, ſi l'on conſidere que leur ſtructure conſiſte dans une ſubſtance celluleuſe extrêmement denſe, où ſe diſtribuë un grand nombre de vaiſſeaux, propres à ſéparer aiſément quelque fluïde épais, qui ſe plaçant avec la partie celluleuſe autour des tubules nerveux, qui traverſent le ganglion, leur forme cette envelope molle & rougeâtre,

tre; dont on les trouve munis, lorsqu'ils ſortent des ganglions. C'eſt ce que confirme la texture tendre & rougeâtre des nerfs qui ſortent des ganglions; car il n'y a aucune apparence que ce ſoient les fibres médullaires nerveuſes elles-mêmes, qui ſubiſſent ce changement, & qui perdent la blancheur propre à la möelle; & il eſt au contraire trés probable qu'elles n'empruntent cette couleur rougeâtre, que de l'enveloppe qu'elles reçoivent du ganglion. C'eſt par ce principe qu'il faut expliquer la couleur rougeâtre, & la foibleſſe, ou molleſſe, qu'on remarque dans les rameaux de tout le nerf intercoſtal, qui ont presque tous cela de propre qu'ils paſſent par des ganglions, au ſortir desquels ils ſe partagent en pluſieurs petites fibres, ou rameaux nerveux. Cette même diſpoſition ſe retrouve encore dans les autres nerfs, qui procedent de ganglions, comme les ciliaires qui doivent leur naiſſance à l'ophtalmique, les petits nerfs de la glandule maxillaire, qui naiſſent du ganglion maxillaire & les rameaux naſaux; le vidien, & les palatins, que fournit le ganglion ſphénopalatin, ſont rougeâtres & tendres, auſſi bien que les rameaux du nerf intercoſtal.

XIX. Etant donc démontré qu'il ſe fait une multiplication réelle des nerfs dans les ganglions, puisque le nombre de ceux qui en ſortent, ſurpaſſe le nombre de ceux qui y étoient entrés; & de l'autre, que les ganglions ſont incapables de produire de nouveaux nerfs, il en réſulte évidemment que l'on ne peut attribuër cette multiplication qu'à la ſéparation des tuyaux, ou fibres nerveuſes, effectuée dans le ganglion; & par conſéquent, que le premier & principal office, ou uſage des ganglions nerveux dans le corps, eſt d'augmenter la quantité des nerfs, en ſéparant les fibres, ou tuyaux nerveux, qui reçoivent enſuite du ganglion une nouvelle envelope, à la place de celle qu'ils viennent de perdre.

XX. Mais outre cette premiere deſtination, & ce principal uſage des ganglions, il ſemble que la Nature a voulu s'en ſervir auſſi pour conduire les nerfs aux parties du Corps, où il s'agit de diſperſer des rameaux en differens endroits, & avec une direction differente, mais

en

en faiſant partir ces rameaux d'un même nerf. C'eſt du moins ce que ſemblent démontrer presque tous les ganglions du nerf intercoſtal, qui produiſent pluſieurs nerfs. Le ganglion méſenterique, par exemple, envoye, pour ainſi dire, d'un même point, & diſperſe des nerfs dans toute l'etenduë du canal des inteſtins; parce que les filamens nerveux, qui ſans cela auroient été obligés de traverſer en trop grande quantité le thorax & l'abdomen, auroient pu ſouffrir aiſément une compreſſion & un déchirement, qui leur eût été funeſte. Mais de ce même ganglion méſentenque ſemi-lunaire, partent & ſe diſperſent les nerfs qui vont ſe rendre dans le foye, dans la rate, dans les reins, & dans tous les viſceres de l'abdomen: ce qui, ſans ce ganglion, n'auroit pu s'effectuer que par de longs rameaux, & avec de grands inconvéniens; attendu ſurtout que dans les viſceres, comme le foye, la rate & les reins, les nerfs doivent ſuivre le même cours que les vaiſſeaux, comme peut s'en convaincre quiconque fera des recherches là deſſus. Les nerfs cardiaques partant en abondance du ganglion cardiaque & du premier thorachique, ſont envoyés facilement au coeur; au lieu que s'ils avoient dû deſcendre par le cou, il en ſeroit réſulté ce double inconvenient, qu'ils auroient pu s'altérer plus facilement en ſouffrant quelque compreſſion, & qu'ils auroient eu en même tems plus de peine à pénétrer de tous cotés la ſubſtance du coeur.

XXI. Par rapport aux ganglions du nerf intercoſtal, il ſemble qu'outre les uſages dont j'ai déjà parlé, on peut leur attribuër encore celui-ci; c'eſt de procurer à ce nerf principal vital du corps la facilité de diſtribuër dans toutes ſortes de directions ſes petits rameaux à tous les viſceres vitaux, & à ceux de l'abdomen, en aſſujettiſſant en même tems ces rameaux par le moyen de l'envelope lâche dont ils ſont revêtus, aux parties auxquelles il étoit néceſſaire qu'ils ſe rendiſſent. Et qu'eſt-ce qui empêche qu'on n'en diſe autant du ganglion ſphénopalatin? Car, outre que j'ai à peu prés démontré qu'il ſert à ſéparer les tubules nerveux dont les nerfs ſont compoſés, l'extreme diverſité que l'on apperçoit encore dans ſes rameaux eſt bien digne d'attention.

En

En effet de ce ganglion ſortent intérieurement les nerfs naſaux, par derriere le vidien, & par embas les palatins; moyennant la tuniqne celluleuſe dont il eſt pourvû, ce ganglion peut ſe tenir renfermé entre les os, & elle ſert encore à fixer le cours des nerfs qui en ſortent. Ce qui ajoute un nouveau degré d'evidence à cette aſſertion, c'eſt que, ſi l'on en excepte les nerfs qui procedent des ganglions, presque tous les autres ne forment par leurs rameaux que des angles extrémement aigus; ce qui rend ces rameaux moins propres à ſuivre indifféremment toutes ſortes de directions, tandis que les ganglions procurent cet avantage dans tous les endroits du corps où cela eſt néceſſaire.

XXII. On peut encore expliquer par ce que je viens de dire, pourquoi la Nature a refuſé des ganglions aux autres nerfs du corps humain? Les nerfs qui ſervent à mouvoir les muſcles, & qui ſont le vehicule des ſenſations, avoient beſoin d'une forte membrane pour n'etre pas offenſés, ſoit par le mouvement des muſcles, ou par quelque autre force externe; ainſi il faloit qu'ils fuſſent envelopés par la dure-mère. Mais pour les nerfs qui ſe diſtribuënt à travers des ganglions, comme ils ſont deſtitués de la dure-mère, & qu'ils n'ont pour toute défenſe, qu'une envelope lâche & rougeâtre, la moindre atteinte leur eût été nuiſible, ſi la nature n'avoit pourvu à leur ſureté. C'eſt ce qu'elle a fait en ne diſtribuant les nerfs par des ganglions, que lorsque ceux-ci ſe trouvent renfermés entre des os, ce qui les met ſuffiſamment à couvert de tout danger; ou bien, lorsqu'ils ſont ſitués dans de grandes cavités, ou dans de petites, entre les parties molles qui y ſont contenuës. Ainſi les tendres rameaux du nerf intercoſtal, qui paſſent par des ganglions dans le thorax ou dans l'abdomen, & les nerfs ciliaires, qui du ganglion ophtalmique ſe rendent dans l'oeil, & ſe diſperſent dans la graiſſe de l'oeil, trouvent leur ſureté ſous ces differens abris. Si les nerfs qui ſe diſtribuënt par les muſcles, étoient de la même délicateſſe, ils ne pourroient ſoutenir la moindre irritation, ou compreſſion, ſans en être bleſſés, & par conſéquent ſans en endommager tout le corps. Mais nous voyons au contraire que les nerfs, qui par leur

ſituation dans des cavités oſſeuſes, ſont à couvert de toute irritation, ou compreſſion extraordinaire, comme le nerf acouſtique, par exemple, ſont entierement deſtitués de la dure-mère.

XXIII. En ſecond lieu, les nerfs qui ſe rendent aux muſcles, obſervent, en ſe ſéparant de leur tronc, des angles trés aigus, & par ce moyen s'etendent pour la plûpart dans la même direction que les fibres muſculeuſes, ou bien dans la même direction que leur propre tronc, à moins qu'ils ne ſoyent placés autour de quelques os, ou arteres, qui changent cette direction; comme cela paroit évidemment dans les nerfs temporaux profonds du troiſieme rameau du nerf de la cinquieme paire, qui ſe refléchiſſent autour de l'angle de la grande aile ſphenoïde, & dans les frontaux du premier rameau du même nerf de la cinquieme paire, qui ſe refléchiſſent en haut vers le ſont, autour du bord ſupérieur de l'orbite; & enfin dans le nerf brachial, qui ſe courbe en deſcendant autour de l'os du bras. Quant aux nerfs qui changent de direction étant ſitués autour des arteres, on peut en alléguer pour exemple les nerfs recurrents de la huitieme paire des nerfs, qui ſe refléchiſſent en haut autour de l'arc de l'aorte, du coté gauche, & autour de l'artere ſousclaviere du coté droit.

XXIV. Les ganglions nerveux les plus ſimples ſont ceux par le moyen desquels pluſieurs fibres nerveuſes ſe réüniſſent en un ſeul nerf. C'eſt principalement l'uſage de ces ganglions, dans leſquels les fibres nerveuſes de la moëlle de l'epine ſe jettent & ſe raſſemblent. Les recherches anatomiques ſur les nerfs de la moëlle de l'epine du dos, nous montrent que la formation de ces nerfs ſe fait par la réünion de pluſieurs fibres nerveuſes, qui ſortent de la partie antérieure & de la partie poſtérieure de la moëlle de l'epine du dos; (a) & qui, étant ainſi ſorties de la moëlle, s'approchent par dehors du trou qui ſe trouve entre deux vertébres, & dans lequel eſt ſitué le ganglion. Ce gan-

(a) Voyez là deſſus le Faſcic. I. *Jc. Anat.* de M. de *Haller.* Progr. II. *De Medulla ſpinali,* Fig. II. & III.

ganglion eſt envelopé dans la dure-mère de la moëlle de l'epine, qui continuë même à revêtir les nerfs qui en ſortent, & leur donne ſa tunique exterieure; parce que ces nerfs ſe diſtribuant enſuite dans les muſcles, ont beſoin d'une envelope plus forte que celle qui leur vient des ganglions, ce qui fait que la couleur de ces nerfs ne reſſemble pas à celle des autres nerfs qui paſſent par des ganglions.

XXV. Quant à l'uſage de ces ganglions de l'epine, il eſt connu que la moëlle de l'epine du dos eſt compoſée des *pedunculés* du cerveau & du cervelet, unis dans la moëlle allongée. Ainſi les fibres nerveuſes qui ſortent de la partie antérieure, & de la partie poſtérieure de la moëlle épiniere, pour ſe réünir en un ſeul nerf, ſortent peut-être & de la moëlle du cerveau, & de celle du cervelet. C'eſt auſſi peut-être pour joindre enſemble ces deux ſortes de fibres nerveuſes que les ganglions ont été néceſſaires aux nerfs de l'epine; ſans compter qu'ils ſervent à affermir encore plus les fibres nerveuſes de la moëlle épiniere, afin que les mouvemens de l'epine du dos ne leur ſoient pas nuiſibles.

XXVI. Je me flatte donc qu'il ne reſte aucune difficulté qu'on puiſſe objecter contre la vérité de mon ſentiment, puiſqu'il eſt fondé ſur la nature, ou ſur la ſtructure des ganglions & des nerfs: & quant à ſon utilité, il eſt aiſé de reconnoitre l'influence qu'il a dans la Phyſique. En effet, d'où vient que les Phyſiologiſtes, d'ailleurs peu d'accord entr'eux ſur l'uſage qu'ils ont aſſigné aux ganglions, ont tous donné à gauche, en leur attribuant des effets plus merveilleux qu'ils n'en ont réellement, ſi ce n'eſt parce qu'ils ne les ont pas bien connus? Dans la penſée qu'il n'y avoit que le nerf intercoſtal & les nerfs de l'epine médullaire qui euſſent de pareils ganglions, ils ont été portés à leur ſuppoſer une vertu toute particuliere, pour fortifier les nerfs, & pour procurer la circulation du fluïde nerveux. Mais, outre ces ganglions du nerf intercoſtal & des nerfs de l'epine, on en a découvert trois qui étoient inconnus aux Anciens. L'un, qui eſt l'ophtal-

 mique,

mique, doit à l'illuſtre M. *de Haller*, mon reſpectable Maître, l'avantage d'avoir été pour la premiére fois bien décrit, & fidelement repréſenté (a). Outre une deſcription étenduë que j'ai donnée à mon tour de ce même ganglion (b), j'en ai découvert & decrit deux autres, le maxillaire, & en dernier lieu, le ſphénopalatin. Il paroit donc manifeſtement que les ganglions du nerf intercoſtal n'ont aucune propriété particuliere, ni prérogative par deſſus les ganglions des autres nerfs; mais que le veritable but de la Nature, en donnant des ganglions aux nerfs qui devoient étendre leurs rameaux dans toutes ſortes d'angles, & ſous toutes ſortes de directions, a été de faciliter leur diviſion & leur diſtribution, en obſervant en même tems cette loi d'epargne par rapport au chemin, qu'elle ſuit conſtamment dans la diſtribution des vaiſſeaux & des nerfs du Corps.

(a) Dans le Programme, *de la baſe du Crane.* C'eſt le ſixieme de ceux qui ſe trouvent dans le Faſcic. I. *Icon. Anat.* Fig *Baſ Cran* n. 30.

(b) Dans ma Diſſertation, *de la cinquieme paire des nerfs.* §. XLVIII.

(c) *Ibid.* §. cit. pag. 94. 95.

EXPLI-

EXPLICATION
DE LA FIGURE.

a L'Artere carotide interne, qui entre dans la cavité du crane & dans le cerveau.

b. La fléxion, ou courbure, de cette artere, avant qu'elle entre dans ſon canal. On l'appelle la fléxion de *Cowper.*

c. La premiere fléxion de la même artere, lorſqu'elle eſt entrée dans ſon canal, & dans l'os pierreux des temples.

d. La ſeconde fléxion.

e. La troiſième.

f. La quatrième.

g. Le nerf de la ſixième paire du cerveau, coupé là où il entre dans l'orbite.

h. Le rameau antérieur du nerf de la ſixieme paire, qui donne dans le ſinus caverneux la racine du nerf intercoſtal.

i. Le rameau poſtérieur de ce même nerf. Ces deux rameaux s'uniſſent en un nerf dans le canal carotique, aprés avoir laiſſé une diſtance entr'eux.

k. Le ſecond rameau de la cinquieme paire, ſéparé du tronc, & coupé là où il entre dans la fente ſphénoïde de l'orbite.

l. Le petit rameau deſcendant de ce rameau, ou la racine antérieure du ganglion ſphénopalatin.

m. La perite branche poſtérieure deſcendante de ce même rameau pour le ganglion ſphénopalatin.

n. Le ganglion ſphénopalatin.

o. o. Les petits rameaux naſaux ſupérieurs antérieurs, qui ſortent de la ſurface interne de ce ganglion.

p. Le rameau vidien, qui ſort de la partie poſtérieure de ce ganglion.

q. q. Les rameaux naſaux ſupérieurs poſtérieurs.

r. Le rameau ſuperficiel, ou pierreux, du nerf vidien, qui communique avec la portion dure du nerf de la ſeptième paire.

s. Le rameau profond du même nerf, ou la racine du nerf intercoſtal.

t. La jonction de ce rameau en un ſeul nerf avec le rameau deſcendant du nerf de la ſixieme paire, à la ſeconde courbure de l'artere carotide : c'eſt le principe du nerf intercoſtal.

u. Le nerf intercoſtal deſcendant de ſon origine ſur la premiere courbure de l'artere carotide.

v. Le ganglion cervical premier, ou long, du nerf intercoſtal, tiré hors du canal carotique.

w. Le nerf palatin, deſcendant du ganglion ſphénopalatin.

x. Le grand nerf palatin antérieur.

y. Le petit nerf palatin poſtérieur.

z. Le nerf palatin extérieur le plus petit, qui naît du tronc du ſecond rameau de la cinquieme paire.

α. Le rameau deſcendant de ce nerf dans le palatin grand, ou antérieur.

ββ. Les rameaux naſaux inferieurs du nerf palatin grand antérieur.

ESSAI

D'UNE FÉCONDATION ARTIFICIELLE,

FAIT SUR L'ESPECE DE PALMIER QU'ON NOMME, *PALMA DACTYLIFERA FOLIO FLABELLIFORMI*,

PAR M. GLEDITSCH.

Traduit du Latin.

La Théorie du Sexe des Plantes, qui a été ſi vivement & ſi long-tems débattuë par les Naturaliſtes modernes, eſt à préſent appuyée ſur des fondemens inconteſtables ; ce ſont l'Expérience & la Raiſon. Des choſes que la plupart des Phyſiciens regardoient autrefois comme ridicules & imaginaires, ſe prouvent aujourd'hui par les Expériences les plus ſimples, & avec tant d'evidence qu'il ne reſte plus le moindre lieu à toutes les objections qu'on formoit contre ce ſyſteme, & à toutes les railleries dont on l'accabloit.

Ce n'eſt pas qu'il n'y ait encore quelques perſonnes qui revoquent en doute l'exiſtence d'un ſexe véritable dans les Plantes, mais le nombre en eſt fort petit, & leurs argumens ne paroiſſent mériter aucune réponſe. On s'apperçoit aiſément que ceux qui les font & les ſoutiennent, ne ſont point au fait de la ſtructure des parties des fleurs, & que les Expériences ſuffiſantes leur manquent. Ainſi tous leurs coups portent en l'air.

Laiſſant toutes ces diſputes à l'écart, je ne me ſuis attaché qu'à acquérir une pleine conviction de cette Théorie ; & pour cet effet pendant

pendant pluſieurs années j'ai fait des Expériences ſur des Plantes de toute eſpece, & j'ai eu le plaiſir de voir la vérité ſe découvrir à mes recherches. Mais pour appercevoir plus diſtinctement la ſuite ou liaiſon des effets, & pour éviter les illuſions qui ſe gliſſent aſſez ſouvent dans les Obſervations des Phyſiciens, j'ai fait choix, ſurtout dans ces dernieres années, de Plantes durables, d'Arbres de la même eſpece naturelle, (les Sexualiſtes les appellent vulgairement *dioïques*,) dont l'un porte ſeulement des *fleurs mâles*, tandis que l'autre, ſa compagne, qui eſt tout à fait differente, ne porte que des *fleurs femelles*.

De cette ſorte ſont la *Ceratonia*, (*) le *Terebinthe*, (**) le *Lentiſque*, (***) & cette eſpece de *Palmier dactylifere*, qu'on nomme vulgairement *Chamaerops*, & *Chamaeriphes*. (****) Mes eſſais ſur ces Arbres ont répondu parfaitement au but que je m'etois propoſé.

Il y a déjà longtems qu'on a pu voir dans le Jardin de l'Académie la difference du ſexe dans les fleurs de ces Arbres; le Jardinier lui-même l'a remarquée depuis plus de vint ans. Cet homme eſt fort verſé dans la culture des Plantes, & il aime beaucoup à faire de nouvelles Expériences: cependant il ne pût pénétrer la raiſon de cette difference, ni découvrir jamais la cauſe de la ſterilité, ou du défaut des ſemences.

Il fut donc bien étonné à l'aſpect d'un trés beau fruit de *Terebinthe*, parce qu'il n'avoit point obſervé qu'il y eut avant la conjonction ſexuelle des fruits parfaits dans le Terebinthe, & qu'il ne penſoit pas que la ſimple aſperſion de la pouſſiere des antheres fut ſuffiſante pour en opérer la production. Sa ſurpriſe redoubla ſurtout, quand de ces fruits, ou tombés d'eux-mêmes à terre, ou plantés exprés avec ſoin, il vit naitre peu aprés les plus belles Plantes du monde.

Mais

(*) On la nomme autrement *Siliqua dulcis*.

(**) C'eſt l'eſpece dont le noyau n'eſt pas bon à manger.

(***) Celui de Chio, qui donne le Maſtic.

(****) C'eſt l'eſpece qui produit des Plantes differentes, dont les unes ſont mâles, d'autres femelles, & d'autres hermaphrodites.

Mais rien ne lui cauſa plus d'admiration que la fécondation de l'eſpece de Palmier, auquel *Boerhave* a donné le nom de *Palmæ dactyli-fera, major, ſpinoſa, foemina, folio flabelliformi*, & que *Linnæus* appelle *Chamaerops.*

Nous croyons que l'Expérience faite ſur ce Palmier, & qui eſt la ſeconde qui ait réüſſi dans nôtre Marche, mérite une attention particuliere, tant à cauſe de ſa rareté, que des circonſtances ſingulieres, dont nous ferons le récit dans la ſuite de ce Mémoire.

Le Prince EUGENE, ce Héros de l'Allemagne, auquel ſes exploits ont acquis une gloire immortelle, dans les dernieres années de ſa vie, s'amuſoit quelquefois à cette eſpece de plaiſir que donnent les curioſités de la Nature; & il voulut faire lui-même dans ſon Jardin à Vienne les Expériences dont il avoit lû d'exactes deſcriptions au ſujet de la fécondation artificielle des Palmiers. Pour cet effet il fit venir plus d'une fois d'Afrique des Palmiers de ſexe different, & d'une trés grande hauteur; & il les achetoit bien cher. (*) Mais l'evénement trompa toujours ſon attente, & tous ces Palmiers périſſoient dans l'eſpace d'un an ſans fleurir.

Nous avons été plus heureux dans notre Jardin Botanique de Berlin, & la fécondation que nous avons entrepris de procurer à un Palmier, a réüſſi parfaitement & ſans fraix, en ſorte qu'il ne reſte aucun doute de fraude, d'illuſion, ou de ſuccés incomplet.

Notre Palmier de Berlin, qui a peut-être plus de 80. ans, eſt un veritable *Palmier femelle*, & ſûrement le plus grand de tous ceux de ſon eſpece qui ſe trouvent aujourdhui dans les Jardins d'Allemagne. Suivant le témoignage d'un homme dont le nom eſt illuſtre, & qui eſt dans ſa ſoixante-ſixieme année, ce Palmier étoit autrefois dans le Jardin Royal de Berlin, dans une parfaite ſterilité, & il ſe ſouvient de l'y avoir vû dès ſa plus tendre jeuneſſe.

Au rapport du Jardinier, cet Arbre n'a jamais porté de fruits dans le Jardin Botanique; & pour moi, depuis quinze ans, je n'ai jamais

(*) On m'a aſſuré que ce Prince en payoit juſqu'à cent piſtoles de la piece.

remarqué parmi les fleurs qui tombent tous les ans de ce Palmier aucun fruit parfait; encore moins ai-je pu en obſerver aucun qui renfermât une ſemence féconde.

Mais, comme j'etois ſuffiſamment convaincu par la théorie du ſexe des Plantes, & par la connoiſſance des parties de la fleur, que les femelles des végétaux, auſſi bien que celles des animaux, ne peuvent dépoſer des oeufs féconds ſans le commerce du mâle, je n'ai jamais été ſurpris du défaut de ſemence dans nôtre palmier. J'ai plutôt été occupé depuis longtems de l'idée de féconder cet arbre femelle, pour laquelle il ne ſe rencontre aucun mâle dans les Jardins de Berlin; mais il y en a un vivant à Leipſig, & qui fleurit tous les ans dans le Jardin de *Caſp. Boſe*.

Il ne m'a pas été difficile d'obtenir des Botaniſtes de Leipſig, (*) des fleurs de ce palmier mâle, & j'en reçus au Printems de 1749. dans des jours qui étoient déjà fort chauds. L'ardeur du Soleil avoit tout à fait flétri & gâté les paquets d'etamines, & la plus grande partie de la pouſſiere des antheres étoit ſortie des veſicules ſeminales. Je ramaſſai dans une petite cueillere une partie de cette pouſſiere qui s'etoit répanduë en chemin ſur le papier dont la boëte étoit garnie intérieurement.

Si je m'etois arrêté à l'idée des Phyſiciens modernes, j'aurois dû perdre toute eſperance de fécondation, puisqu'il y avoit déjà neuf jours que la pouſſiere des antheres étoit hors des veſicules, & attachée au papier. Mais la rélation ſuivante de M. *Ludwig*, qui a fait quelque ſéjour dans les contrées d'Alger & du Tunis, fit briller à mes yeux de nouvelles lueurs de ſuccés. „ Les habitans de l'Afrique, dit cet „ habile homme, n'employent presque jamais les petits paquets d'e„ tamines des palmiers mâles tout frais pour procurer la fécondation „ des femelles, mais ils ont coutume d'en prendre de ſecs, & qui ont „ été gardés pendant quelque tems. „ Cette Obſervation eſt tout à fait contradictoire aux Expériences des Modernes.

Pen-

(*) Mr. *LUDWIG* & *BOEHMER*.

Pendant les jours que j'ai indiqués, nôtre Palmier femelle, à cauſe de l'ardeur aſſez vive du Soleil, avoit entierement défleuri, avant l'arrivée des fleurs mâles ; & il ne reſtoit qu'un trés petit nombre de fleurs à la pointe des branches, auxquelles pourtant ſe joignit contre toute eſpérance un nouveau petit bouquet de fleurs tardives.

Je n'y cherchai point d'autre façon que de jetter tout ſimplement avec la main cette partie de la pouſſiere des antheres, qui avoit été pendant neuf jours hors des veſicules ſeminales, adhérente au papier, de la jetter, dis-je, & la répandre ſur les fleurs du Palmier femelle; & pour le paquet d'etamines déja tout moiſi, je l'appliquai à ce bouquet qui avoit fleuri en dernier lieu.

Cette aſperſion de la pouſſiere fécondante étant ainſi faite, la fécondation eut le ſuccés auquel je m'etois attendu; les utricules de la végétation s'enflerent en grand nombre, & ſe remplirent d'une ſemence féconde, propre à une propagation ultérieure; ils devinrent de veritables petits oeufs.

Ces petits oeufs, ou ſemences, meurirent dans les fruits l'hyver dernier, & ayant été mis en terre à l'entrée du Printems de 1750. il en eſt né des Plantes conformes à leur origine, c'eſt à dire, de petits Palmiers, qui témoignent d'une maniere inconteſtable que la fécondation végétale a été pleinement accomplie, & que je ne fais point difficulté de montrer à quiconque veut s'en convaincre par ſes yeux.

Un nouvel eſſai fort ſimple, & tout à fait ſemblable au précedent, au ſujet de la génération des Palmiers, m'a pareillement réüſſi à ſouhait l'année derniere. (*) Un paquet de fleurs mâles de Leipſig a produit une geniture tout à fait active & vigoureuſe. Ses molecules ont promtement pénétré les ſtigmates de notre Palmier femelle, & ont eu l'efficace de féconder une grande quantité de fruits, ou dattes, dont j'ai préſenté les grappes à l'Academie, pour les ſoumettre à ſon examen.

(*) Il paroit par ces dates que la publication de ce Mémoire a été avancée; mais on l'a crû aſſez intereſſant pour mériter cette exception.

Je remarquerai ſeulement encore que, par quelque erreur, ou peut-être par la négligence du Jardinier de Leipſig, le dernier paquet de fleurs dont j'ai parlé, avoit été envelopé dans de la mouſſe un peu humide, & qu'en chemin il s'etoit noirci, & avoit pourri jusqu'à contracter une mauvaiſe odeur aſſez ſenſible.

Cet eſſai ſi ſimple de la fécondation artificielle de notre Palmier, fait voir que la plupart des difficultés que les Botaniſtes étalent, & que bien ſouvent ils inventent, dans leurs Théories, par rapport à la fécondation des végétaux, n'ont presque aucune réalité; & ſi elles en avoient, il faudroit néceſſairement que la plus grande partie des Plantes demeurât ſtérile.

Les globules des antheres, qui renferment les vrais germes des ſemences, doivent même avoir plus de conſiſtance dans quelques unes des autres Plantes *dioïques*. Car pendant un certain tems ils flottent librement expoſés à l'air, & ſe conſervent dans leur entier, exemts de toute corruption, avant que de pouvoir arriver aux ſtigmates des Plantes femelles.

Il me paroit tout à fait vraiſemblable que ces ſortes de globules ſont revêtus d'une cutícule moins délicate & plus denſe, qui les empêche de lâcher d'abord dans un air humide ce qu'ils contiennent. Et quand l'air eſt au contraire ſec, je ſuis perſuadé que ces globules peuvent vivre & ſe conſerver longtems hors des antheres, ſans être atteints de la moindre corruption, & leur contenu demeurant ſain & ſauf.

SYSTE-

SYSTEME DES PLANTES

FONDÉ

SUR LA SITUATION ET LA LIAISON DES ETAMINES,

PAR M. GLEDITSCH.

Traduit du Latin.

Ne m'étant presque occupé depuis douze ans que de l'etude des fleurs des Plantes & de leurs parties, dans le deſſein d'en acquérir une connoiſſance ſolide, & ayant conſacré pluſieurs travaux pénibles, mais agréables, à inventer divers Syſtèmes ſur les fleurs, l'expérience m'a convaincu qu'on peut former pluſieurs Syſtèmes généraux de Botanique, en les fondant ſur la difference & les propriétés des parties des fleurs. Et afin de ne pas borner à mon ſeul uſage l'utilité de ces recherches pour la veritable Science des Plantes, mais pour en faire part auſſi aux jeunes gens qui étudient, ou même qui commencent à enſeigner, j'ai déduit certaines aſſertions des vérités dont j'ai reconnu la certitude, & me preſcrivant des régles uniquement dictées par la raiſon, j'ai evité tout ce que l'amour propre, ou la complaiſance pour autrui, auroit pu me faire adopter, de pareilles conſidérations ne devant en effet entrer pour rien dans la vraye culture des Sciences.

Quatre parties principales des fleurs occupoient ſurtout mon attention, & m'ont paru dignes d'etre conſidérées avec plus d'exactitude.

tude. Les deux premieres ſont les *Etamines* & le *Piſtille*, dans leſquelles conſiſte proprement *l'eſſence de la fructification :* les deux autres ſont le *Calice* & la *Corolle*, parties plus accidentelles, & qui ne ſervent que d'*envelope* à la fructification.

J'ai conſideré chacune de ces parties des fleurs en particulier, rélativement à l'*eſpece*, à la *figure*, au *nombre*, à la *ſituation*, & à la *proportion ;* & je ſuis fort trompé ſi ces differences principales des parties que j'ai indiquées, n'ont pas toute la certitude & l'importance requiſe pour ſervir de fondement à des Syſtèmes. Et pour dire la choſe comme elle eſt, de la diverſe diſpoſition de chaque partie, & de l'application des differences, ſont nés cinq Syſtèmes de Botanique, parfaitement diſtincts les uns des autres. Toutes ces parties des fleurs étant donc diverſement diſpoſées, & appliquées ſuivant les cinq differences ſusdites, cela diverſifie le Syſtème en vint manieres, que j'ai réduites en autant de Tables, en vuë de le pouſſer plus loin, & de le perfectionner.

Quoique le caractère naturel des Plantes conſervât ſa force dans toutes ces vint Methodes, & que pluſieurs traces de la Methode naturelle ſe rencontraſſent dans chacune d'elles ; néanmoins il n'y en avoit aucune qui coïncidât parfaitement avec la Methode naturelle, mais elles étoient toutes viſiblement artificielles. Cela ne m'etonna point ; car c'eſt le ſort commun, non ſeulement des Methodes inventées par les Botaniſtes, mais de toutes celles qu'on employe dans les autres parties de la Phyſique, perſonne que je ſache n'ayant encore trouvé la veritable clef d'une Methode naturelle pour les trois Régnes de la Nature.

Comme j'aurois entrepris un travail au deſſus de mes forces, en voulant corriger les imperfections de toutes ces Methodes, je me ſuis attaché à une d'entr'elles, & j'ai tâché d'en faire à force de tems & de peine un Syſtème conduit à un degré de perfection, qui le rendit plus convenable que les autres au but que la Botanique ſe propoſe, c'eſt à dire, à la connoiſſance des corps du Régne végétal, & qui lui donnât,

autant

autant qu'il eſt poſſible, toutes les propriétés d'une bonne Methode, ſçavoir la certitude, l'univerſalité & la conſtance.

Parmi ces nouveaux Syſtèmes, il s'en trouvoit quelques uns dont l'uſage étoit beaucoup plus avantageux; mais il s'en trouvoit auſſi, que la foule des exceptions, & même des contradictions, ne permettoit pas d'appliquer à la connoiſſance des Plantes. Ce que j'avance ſera facilement compris par tout Botaniſte un peu avancé dans ſon art, qui aura jamais eſſayé de faire un Syſtème. Inſtruits par nôtre propre expérience, nous recommendons cet exercice aux autres comme trés utile, ſurtout à cauſe de l'habitude qu'il fait contracter, de diviſer & d'arranger les Plantes liées entr'elles par une certaine affinité naturelle; à quoi ſert merveilleuſement l'idée diſtincte de la ſtructure de la fleur, & de ſes differences. Quand une fois on la poſſede bien, rien n'eſt plus aiſé que de diſcerner la reſſemblance imaginaire, ou feinte, de celle qui eſt naturelle. En effet un Botaniſte aſſez ſolidement inſtruit pour être dans l'habitude de juger de toute la ſtructure des fleurs, & du lien veritable & naturel des genres, eſt un tout autre homme qu'un Botaniſte, qui ſe borne à des idées claires des Plantes, & n'en a ſouvent même que de confuſes.

Ayant donc réſolu, comme je l'ai dit, de choiſir une des vint Methodes nouvellement trouvées, pour lui donner plus de certitude & de perfection, & l'accommoder à la portée des commençans; une comparaiſon attentive m'a déterminé pour celle dont le fondement eſt pris *de la ſituation des étamins dans les quatre differentes parties des fleurs.* La préférence que ce Syſtème mérite étant une fois reconnuë, je n'ai plus penſé aux autres, & ne me ſuis mis en peine que de corriger celui-ci, jusqu'a ce qu'il fut parvenu à la forme ſous laquelle je vais le préſenter.

Avant toutes choſes, ce Syſtème ſuppoſe non ſeulement *le ſexe des Plantes* comme une vérité inconteſtable, mais encore la néceſſité & l'immutabilité du *caractere naturel des genres:* ce qui fait que je me range au ſentiment de nos Modernes les plus exacts, comme ſont Mrs. *Haller,*

ler, *Linnæus*, *Ludwig*, *Gesner*, *Juſſieu*, *Gronovius*, *Royen*, & autres. Le Syſtême n'a que deux parties, dont la premiere contient toutes les Plantes, qui ont une *efflorescence parfaite*, & *manifeſte à la vuë*, ſoit que cette efflorescence ſoit *hermaphroditique*, *monoïque*, ou *dioïque*; l'autre partie renferme le reſte des Plantes, *dont l'efflorescence parfaite ſe dérobe à la vuë.*

La diſpoſition des genres dans la premiere partie du Syſtême ſe réduit à quatre Claſſes, dont la difference dépend uniquement de cette partie de la fleur, à laquelle les étamines ſont attachées, & qui à cauſe de cela ſemble conſtituer des eſpeces ſingulieres d'efflorescence. Toute efflorescence des Plantes de la premiere partie du Syſtême, eſt donc; ou

I. THALOMOSTEMONIS, ſi les étamines ſont attachées au *reſervoir* même. *Voy.* Malpigh. *Anat. Plant.* p. 64. *Tab.* XXIX. *fig.* 174. A. B. C.

II. PETALOSTEMONIS, ſi les étamines ſont attachées à la *corolle*, ou à ſon *nectaire*. *Voy.* Malpigh. p. 62. *Tab.* XXIX. *fig.* 173. A. B. C.

III. CALYCOSTEMONIS, ſi les étamines ſont inſerées dans le *calice*. *Ibid.* p. 63. *Tab.* XXX. *fig.* 175. A. & 176. A. B. C. 177. A. B.

IV. STYLOSTEMONIS, ſi les étamines ſont cohérentes avec le *piſtille* même. *Ibid.* p. 62. *Tab.* XXIX. *fig.* 172. A. C. D.

L'efflorescence de la premiere & de la ſeconde Claſſe, qu'on peut obſerver dans la plus grande partie du Régne végétal, eſt la plus naturelle de toutes; au lieu que ſon autre eſpece, qui eſt contenuë dans la troiſieme Claſſe du Syſtême, differe beaucoup de la premiere, & ne ſe rencontre que dans trés peu de genres. La derniere eſpece, qui conſtituë la quatrième Claſſe, eſt encore plus rare, plus ſinguliere, & tout à fait étrangere.

Les

Les étamines donc, qui étant des parties eſſentielles de la fleur dans ſon état de perfection, ne manquent, & ne peuvent jamais manquer, ont, comme l'expérience le témoigne, dans les quatre parties de la fleur une ſituation certaine, univerſelle & conſtante, qui forme un caractere fort préférable à ceux que pourroient fournir leur nombre, ou leur figure : ſans parler de la proportion même des étamines, qui, (choſe trés remarquable,) eſt à cauſe de cela fort inférieure à la ſituation. Ainſi la ſituation des étamines jointe à leur liaiſon eſt un fondement inconteſtable & trés ſimple du Syſtème Botanique, auquel un apprentif dans cet art peut s'en fier, beaucoup plus ſûrement qu'au nombre, qui eſt la marque la plus incertaine de toutes, ou à quelque idée de figure, le plus ſouvent fort vague.

Suppoſons, ſi l'on veut, l'univerſalité & la conſtance du nombre, ou de la figure, dans la Methode Botanique, quoique perſonne ne ſoit en état de les démontrer, ou de les défendre. N'auroit-on pas toujours grand tort de recommander aux autres comme univerſels ces fondemens, & d'attribuer la même univerſalité aux régles qu'on établiroit ſur ces fondemens, tandis que cette univerſalité manque dans l'application? Un apprentif, au milieu de ces exceptions & de ces contradictions, ne ſeroit-il pas en droit de regarder l'univerſalité & la conſtance de notre Syſtème comme des chimères? Nous mettons le nombre des *petales*, du *calice*, du *piſtille*, du *pericarpe* & de la *ſemence*, dans le même rang que la *figure;* car quoique celle-ci ſoit beaucoup plus certaine que le nombre, elle n'eſt pourtant rien moins qu'univerſelle & conſtante.

Si nous conſidérons tout le régne végétal, aſſurément nous y verrons toutes les fleurs conſerver avec la derniere conſtance cette quadruple ſituation & liaiſon des étamines. L'expérience ne laiſſe aucun doute là deſſus, en ſorte pourtant que dans un ſeul & même genre naturel, ordre, ou claſſe, il ne ſe trouve point aujourdhui en même tems certaines *eſpeces naturelles*, dont l'une, par exemple, ait les étamines attachées au *ſtyle*, une autre au *calice*, un troiſieme à la *corolle*,

une quatrieme au *réſervoir*, &c. Par conſéquent tous ces *genres fictices*, avec leurs eſpeces mal unies entr'elles, qu'on rencontre dans les Ecrits de quelques Botaniſtes, tant d'autres que les Botaniſtes eux-mêmes regardent encore comme incertains, & en général tous ceux qui presque en toute Methode ſont vagues & ſujets à l'anomalie, tout cela, dis-je, n'intereſſe en rien le fondement de nôtre Syſtéme, bien loin de le détruire.

Dans les meilleures Methodes Botaniques on rencontre des genres vagues & anomales, qui, à cauſe de l'inconſtance des parties des fleurs, ſouffrent des exceptions par rapport à la figure, au nombre, à la ſituation & à la proportion; & il ne faut pas douter que la quantité ne s'en augmente tous les jours par les nouvelles Plantes que l'on découvre continuellement dans les differentes parties du Monde. Mais ces genres ne ſont aucun tort à nôtre Syſtème particulier, puiſqu'elles ne répandent aucun doute ſur la ſituation & la liaiſon quadruple des étamines dans la fleur; à l'exception peut-étre de deux, ſçavoir le *Cucubale* & le *Silene* de *Linnæus*, dont on dit que les étamines ſont alternativement plantées dans le *réſervoir* de la fleur, & dans les *ongles des petales*. Il n'y a pourtant rien encore de gâté; car, ſi ces fleurs different veritablement de nos quatre eſpeces d'efflorescence, elles en conſtituënt une cinquieme, qui répugne, je l'avouë, à l'affinité & à la proportion naturelle. Mais en ſéparant ſoigneuſement, comme on doit le faire, les petales des cinq étamines alternativement placées, (dont les filamens, avant leur inſertion dans une certaine expanſion membraneuſe & annulaire du réſervoir, ſont dans les ongles des pétales comme dans des étuis, & s'uniſſent à ces ongles,) en procédant, dis-je, à cette ſéparation, la cohérence des étamines avec le réſervoir ſaute aux yeux, auſſi bien que dans les *corolles monopetales* qui ne ſont pas percées; par exemple, dans le *Perce-nege*, dont les étamines paroiſſent inſerées dans la corolle, quand on l'arrache ſans précaution, mais qui percent effectivement le fonds, & ſe plantent dans le réſervoir

voir, comme on le voit en faiſant exactement la ſéparation de ces parties.

Cependant avec le ſecours de la proportion naturelle on explique & l'on détermine l'affinité naturelle de ces genres, qui ne ſouffre point de ſéparation, & dont le lien ne ſçauroit être détruit, comme le Laurier-Roſe en fournit l'exemple. Car ſes étamines ſont inſerées dans le tuyau de la corolle; & néanmoins elles s'uniſſent manifeſtement par enhaut avec le piſtille. Les genres de *Limonium* & de Tréfle ſont mis auſſi à bon droit au rang des genres vagues, à cauſe de leurs eſpeces monopetales, & des autres exceptions qu'ils ſouffrent; & cela vaut mieux que de les exclurre entiérement de la claſſe, malgré le caractere naturel qui les y range.

On rencontre des genres anomales & vagues de deux ſortes; les uns, qui conſidérés en eux-mêmes ſont abſolument naturels, & n'admettent ni ſéparations, ni changemens; les autres fictices, qui ont beſoin de changement & de correction, principalement à cauſe que ce ſont pour l'ordinaire les Botaniſtes qui les ont conſtruits, & qu'abandonnant la direction de la nature ils ſe ſont plû, tantôt à diminuer les genres en multipliant les eſpeces, tantôt à diminuer les eſpeces en multipliant les genres, par de pures raiſons de caprice. Il arrive ſouvent de là que dans les meilleures Methodes Botaniques, les eſpeces de ces genres, tantôt peu differentes entr'elles, tantôt formant des genres trés diſtincts, ſont rangées avec ces défauts dans les divers Ordres, ou Claſſes. Cela vient le plus ſouvent du défaut de la Methode; & alors on peut s'en prendre aux Botaniſtes: mais auſſi il n'y a quelquefois aucun moyen d'eviter cette imperfection partiale, les Auteurs n'en ſont point reſponſables, & c'eſt ſeulement une preuve autentique des défauts de la Methode naturelle dans la Botanique.

J'ai rangé dans un Catalogue particulier à la fin de mon Syſteme toutes ces irrégularités, qui jusqu'à préſent ont donné lieu aux confuſions & aux exceptions dans presque toutes les Methodes des fleurs;

& je leur ai assigné cette place, en partie afin qu'elles ne mettent plus dans la suite d'obstacle aux progrés des commençans, en partie pour ôter tout prétexte aux railleurs de juger au desavantage de la solidité des Systèmes, & de la dignité de la Science.

Bien qu'on ne puisse, comme nous l'avons déjà dit, revoquer en doute la certitude, l'universalité & la constance de nôtre Systême, nous ne dissimulons pas néanmoins que l'abondance des nouveaux genres n'y porte quelquefois atteinte à l'universalité & à la constance des principes. Mais comme c'est un inconvenient qui naît de la culture même de la Science Botanique, & du plus grand degré de perfection qu'on veut lui donner, il ne peut faire aucun tort au savoir & à la réputation des Auteurs, & il est plus à desirer qu'à craindre. Car y auroit-il quelcun qui osât soutenir ouvertement qu'on ne doit pas chercher à donner un plus grand degré de perfection aux sciences, de peur que cela ne fasse quelque tort aux Systèmes reçus, & munis en quelque sorte de l'autorité publique ?

Et comme les apprentifs ont besoin qu'on leur fourniſſe non seulement une Methode, dont les principes soient certains & indubitables, mais encore que cette Methode soit facile & bien dévelopée, j'ai crû qu'il étoit de mon devoir de venir à leur secours. Pour cet effet j'ai dressé une Methode Systématique, composée de deux parties, dont la premiere qui contient les principaux corps du régne végétal, ne se partage qu'en quatre Classes, comme il a déjà été dit plus haut. Ceux qui ne sont que médiocrement versés dans l'art, comprendront sans doute du premier coup d'oeil les classes du Systême : il suffit qu'ils sçachent distinguer les principales parties des fleurs, savoir les *étamines*, le *style*, la *corolle*, le *calice*, & le *reservoir*, & juger de leur situation dans la fleur. Alors, en continuant à examiner eux-mêmes la situation des étamines, ils apprendront à connoitre avec certitude la Classe du Systême; car les étamines s'offriront à leurs sens, ou entierement séparées les unes des autres, ou liées entr'elles par quelcune

tome de leurs parties; ce qui détermine les ordres de chaque Claſſe, ſçavoir,

I. *Par les étamines ſéparées les unes des autres;*

II. *Par les étamines réünies, ou liées entr'elles.*

Par rapport aux *Sections*, (qui dans toute Methode ſont plus arbitraires que le genre & la claſſe,) elles ſe manifeſtent dans notre Syſtème à la premiere vuë par la double envelope de la fructification; d'où il réſulte que dans la I. III. & IV. Claſſes, il y a deux Sections de Plantes, ſavoir de celles qui ont l'efflorescence en partage, & qui ſont, ou

1. *Apetales*, ou
2. *Corollées.*

Dans la ſeconde claſſe qui comprend les *petaloſtemones*, la ſection des *apetales* n'a pas lieu, parce que toutes les fleurs ont la *corolle*, ou du moins le *nectaire*; & ſi le bord, ou *limbe*, manque, (comme dans quelques unes des fleurs qu'on nomme *aggrégées*,) cependant le tuyau de la corolle, ou le bas de ce tuyau reſte encore. Ainſi il n'y a point proprement d'aperales dans cette Claſſe. Mais il eſt trés aiſé de leur ſubſtituer d'autres Sections; par exemple,

ORD. I. ETAMINES DISTINCTES LES UNES DES AUTRES.

SECT. 1. *A fleur ſimple, égale.*
2. *A fleur ſimple, inégale.*
3. *A fleur aggrégée.*

ORD. II. ETAMINES RÉÜNIES, OU LIÉES.

SECT. 1. *A étamines réünies ou liées par embas, & par des filamens.*
2. *A étamines réünies ou liées par enhaut, & par des antheres.*

De cette maniere la diviſion & la diſpoſition des genres dans la premiere partie du Syſtème ſe réduit à peu de Sections, encore moins d'Ordres, & trés peu de Claſſes ; ce qui eſt fort commode pour les amateurs de la Botanique. Ce petit nomqre de Claſſes & d'Ordres écarte quantité de difficultés & de dégouts, que ceux qui s'appliquent à cette étude ne peuvent manquer d'eſſuyer, quand le nombre des claſſes eſt pouſſé trop loin, comme par exemple dans la Methode

de *Ceſalpin*,	à XV.	de *Hermann*,	à XXV.
de *Moriſon*,	à XVII.	de *Ray*,	à XXXIII.
de *Tournefort*,	à XXII.	de *Boerhave*,	à XXXIV.

Cependant comme l'augmentation des Claſſes ne prouve pas l'imperfection d'un Syſtème, ni leur diminution ſon excellence, nous n'avons garde de conteſter à ces ſavans hommes, qui ont rendu de trés grands ſervices à la Botanique, la liberté dont ils ont uſé de faire ces diviſions & ces arrangemens conformément à leurs idées.

Mais il demeure toujours vrai que les commençans font des progrés beaucoup plus rapides, quand on augmente la valeur du caractere naturel, en réduiſant l'abondance des varietés à des eſpeces, la multitude des eſpeces à des genres, & ces genres à d'autres ſupérieurs, le tout avec jugement: & ce qui eſt encore d'un trés grande utilité, c'eſt que la Methode ne faſſe entrer dans ſes genres que trés peu de Claſſes & d'Ordres, en conſervant toujours l'affinité, autant que cela ſe peut.

Rien ne mérite plus d'etre obſervé & bien lié dans tout Syſtème que les parties, ou *fragmens* de la methode naturelle, tels que ſont les Plantes *umbelliferes*, *liliacées*, *verticillées*, *floſculeuſes*, *legumineuſes*, *ſiliqueuſes*, *malvacées*, &c. auſſi bien que celles qui ſont dites *gramina*, &c. Et je crois que ſuivant les loix de la Methode on ne doit jamais les ſéparer. ou que ce ne peut être que dans des cas d'une extrême néceſſité.

En

En voilà aſſez pour ce qui concerne la premiere partie de notre Syſtême. L'Autre qui eſt la moins conſidérable, comprend le reſte des Plantes, dont l'efflorescence parfaite ſe dérobe à la vuë. La plupart de ces végétaux n'admettent point la théorie des étamines, & ne peuvent être expliqués par ſon moyen. C'eſt pourquoi la premiere efflorescence, ou celle que la ſimple vuë apperçoit, eſt à bon droit ſuivie de l'autre, qui eſt, ou entierement cachée, ou inobſervable a la ſimple vuë, a cauſe de ſon extreme petiteſſe, qui ne peut être ſaiſie que par le Microſcope. Il n'eſt pas naturel en effet que l'ordre de connoiſſance & de démonſtration dans une Methode qui doit être facile & à la portée des commençans, débute par les plus petites de toutes les fleurs, qui échapent entièrement aux ſens; mais il faut placer à la tête celles qui peuvent être connuës d'une maniere diſtincte, afin qu'un commençant, aprés avoir bien examiné la ſtructure & les differences des fleurs les plus grandes & les plus aiſées à connoître, parvienne à comprendre & à ſe repreſenter les mêmes choſes dans les plus petites.

Il n'y a donc pour la ſeconde partie que deux Claſſes, dans leſquelles entrent

I. Les Plantes, dont l'efflorescence parfaite eſt tout à fait inconnuë. Cette Claſſe n'a qu'un genre actuellement.

II. Les Plantes, dont l'efflorescence parfaite ſe dérobe entierement à la vuë, à cauſe de leur extréme petiteſſe.

Les Ordres de cette Claſſe ſont naturels, & il y en a cinq:

Ord. I. Les *Fougeres.*
II. Les *Mouſſes.*
III. Les *Algues.*
IV. Les *Champignons.*
V. Les *Lithophytes.*

Les Corollaires des genres ſont foi de cette diviſion.

Cette

Cette courte ébauche de mon Syſtème pourra ſuffire pour le préſent ; & quelques petits Ouvrages de Botanique que je me propoſe de publier dans peu, en feront mieux connoître l'uſage, ſans que je m'etende ici à la recommander & à la faire valoir. Pour dire ſeulement la vérité, elle eſt tout à fait propre à l'inſtruction ; & en l'appliquant avec jugement, comme on peut & doit le faire, elle donnera des accroiſſemens conſidérables à la connoiſſance du régne végétal.

Il ne me reſte plus qu'à demander & attendre les avis des juges competens, qui ſont dans l'habitude de méditer ſur ces matieres, & qui peuvent fournir des déciſions ſolides, que je recevrai avec tous les égards convenables. Mais pour ceux qui n'ont d'autres guides que l'ignorance, ou la mauvaiſe humeur, qui ne s'en rapportent qu'au préjugé de l'autorité, à quelque hypotheſe précaire, ou à quelque fauſſe expérience, prenant de là le droit d'attaquer tout Syſtème qui ſe préſente ſous une forme nouvelle, & de lui faire un crime de ſa ſeule nouveauté, je ne prendrai pas la peine de leur répondre.

CLEF

CLEF DES CLASSES.

Toute efflorescence des Fleurs, Parfaite, Hermaphrodi-tique, Monoïque, Dioïque, &c.
est

- manifeste. — qui est
  - 1. THALAMOSTEMONIS, si les étamines tiennent au réservoir.
  - ou 2. PETALOSTEMONIS, si les étamines tiennent à la Corolle, ou à son Nectaire.
  - 3. CALYCOSTEMONIS, si les étamines tiennent au Calice.
  - 4. STYLOSTEMONIS, si les étamines tiennent au Pistille.
- ou
- cachée.
  - 5. tout à fait.
  - ou
  - 6. à cause de leur extreme petitesse.

Les Ordres sont formés de ce que les étamines sont, ou séparées les unes des autres, ou réünies, soit entierement, soit par la liaison de quelcune de leurs parties. La Nomenclature Latine suivante achevera de fournir l'idée distincte de ce Système.

OMNIS FLORESCENTIA PLANTARUM PERFECTA,

Hermaphroditica, Monoica, Dioica, &c. eſt

VEL

PATENS,

QUAE

VEL

CLASSIS I.

THALAMOSTEMONIS,

Cujus Stamina adhærent RECEPTACULO.

ORDO I.

Staminibus a ſe invicem diſtinctis.

SECTIO I.

In Floribus Apetalis.

a. Epicarpiis.

*

Chara.
Hippuris.

*

Cliffortia.

*

Tamnus.
Anthoſpermum.
Trewia.
Tetragonia.

*

Conocarpus.

*

Juglans.

b. Hypocarpiis.

Corylus.
Quercus.
Fagus.
Carpinus.
Fraxinus.
Ulmus.
Boſia.
Celtis.

*

Piſtacia.
Myrica.
Morus.

*

Almus.
Betula.
Salix.
Populus.

*

Dodonæa.
Triopteris.

* Cen-

*
Ceratonia.
*
Ambarodendrum.
Platanus.
*
Hippophae.
Rajania.
Smilax.
Dioſcorea.
Lupulus.
Cannabis.
Urtica.
Parietaria.
Chenopodium.
Atriplex.
Spinacia.
Beta.
Illecebrum.
Herniaria.
Blitum.
Amaranthus.
Celoſia.
Achyranthes.
*
Tragia.
Phyllanthus.
Theligonum.
Acalypha.
Mercurialis.
Dalechampia.
Oſyris.
*
Tetracera.
Mollugo.
*
Sloanea.
Galenia.
Lachnæa.
*
Penthorum.
Pharnaceum.
Calligonum.
*
Aſarum.
*
Chryſoſplenium.
*
Rivinia.
Phytolacca.
Petiveria.
*
Laurus
*
Rheum.
Lapathum.
Perſicaria.
Helxine.
Polygonum.
Biſtorta.
*
Myriophyllum.
Ceratophyllum.
Salicornia.
Zannichellia.
Cynomorium.
Ruppia.
*
Arum.
Calla.
Dracontium.
Piper.
Saururus.
*
Acorus.
Sparganium.
Typha.
*
Triglochin.
Scheuchzeria.
Juncus.
*
Eriophorum.
Cyperus.
Scirpus.
Schoenus.
Carex.
Cenchrus.
Cornucopiæ.
*
Anthoxanthum.
Zizania.
Nardus.
Sacharum.
Phleum.
Alopecurus.
Panicum.
Lagurus.
Phalaris.
Iſchæmum.
Melica.
Oryza.
Holcus.
Milium.
Arundo.
Aira.
Poa.
Cynoſurus.
Agroſtis.
Lolium.
Ægylops.
Feſtuca.
Bromus.
Avena.
Briza.
Uniola.
Zea.
Coix.
Hordeum.
Triticum.
Secale.

Sectio II.

In Floribus Corollatis.

a. Epicarpiis.

*
Aralia.

Phyllis.
Eryngium.
*
Lagoecia.
*
Hydrocotyle.
*
Aſtrantia.
Sanicula.
Panax.
*
Smyrnium.
Paſtinaca.
Thapſia.
Ægopodium.
Anethum.
Carvum.
Apium.
Aniſum.
Pimpinella.
*
Ethuſa.
Cicuta.
Coriandrum.
Oenanthe.
Phellandrium.
Bupleurum.
Seſeli.
Cherophyllum.
Scandix
Imperatoria.
Sphondylium.
*
Tordylium.
Caucalis.
Artedia.
Echinophora.
Daucus.
Ammi
Laſerpitium.
Angelica.
Ferula.
Cachrys.
Liguſticum.
Sium.
Siſon.
Bubon.
Crithmum.
Selinum.
Conium.
Brunium.
Athamantha.
Libanotis.
Peucedanum.
*
Circaea.
*
Ludwigia.
Juſſieva.
Neurada.
*
Caryophyllus.
Hydrangea.
Hydrocharis.
Stratiotes.
*
Bromelia.
*
Agave.
Ixia.
Levcojum.
Amaryllis.
b Hypocarpiis.
*
Anthericum.
Allium.
Ornithogalum.
Squilla.
*
Lilium.
Fritilaria.
Tulipa.
*
Erythronium.
Glorioſa.
Uvularia.
*
Aloe.
Yucca.
Xyris.
*
Commelina.
Tradeſcantia.
*
Liriodendrum.
Magnolia.
Anona.
*
Phoenix.
Corypha.
Antidesma.
Chamaerops.
Caryota.
Boraſſus.
*
Atraphaxis.
Polycnemum.
Potamogeton.
Elatine.
*
Buxus.
Coriſpermum.
Stellaria.
*
Iſatis.
*
Cleome.
Siſymbrium.
Crambe.
Eryſimum.
Turritis.
Cheiranthus.
Heſperis.
Dentaria.
Cardamine.
Sinapis.
Arabis.
Raphanus.
Braſſica.
*
Bunias.
Vella.

Draba.
Alyſſum.
Lunaria.
Clypeola.
Iberis
Thlaſpi.
Cochlearia.
Lepidium.
Anaſtatica.
Myagrum.
Subularia.

*

Hypecoum.
Epimedium.
Lawſonia.
Leontice.

*

Cornus.
Maurocenia.
Celaſtrus.
Caſſine.
Rhus.
Cotinus.
Evonymus.

*

Ruta.
Monotropa.

*

Hamamelis.
Hugonia.
Paris.

*

Actaea.
Bocconia.
Sanguinaria.
Podophyllum.
Chelidonium.
Glaucium.
Argemone.
Papaver.

*

Meſua.
Moriſonia.
Crateva.

Breynia.

*

Caparis.
Granatilla.
Nymphaea.
Sarracena.

*

Michelia.
Berberis.
Hedera.
Vitis.
Ciſſampelos.
Meniſpermum.
Medeola.
Empetrum.

*

Itea.
Cupania.
Diſſenia.

*

Calophyllum.
Mammea.
Tribulus.
Haematoxylum.
Adenanthera.
Averrhoa.
Fagonia
Zygophyllum.

*

Blairia.
Erica.
Tetralix.
Ledum.
Tamarix.
Melia.
Azalia.
Pyrola.

*

Corchorus.
Triumpfetta.
Cluſia.
Heliocarpus.
Bixa.
Kiggelaria.

Grewia.
Tilia.
Thea.

*

Jatropha.
Croton.
Cneorum.
Euphorbia.

*

Sapindus.
Paulinia.
Cardioſpermum.
Staphylaea.

*

Gleditſia.

*

Oxalis.

*

Coriaria.
Sauvagea.
Vateria.
Menzelia.
Helicteres.
Ciſtus.
Peganum.
Corrigiola.
Barreria.

*

Portulaca.
Saxifraga.
Craſſula
Telephium.
Sedum.
Anacampſeros.
Sempervivum.
Tillaea.
Rhodiola.
Cherleria.

*

Dianthus.
Saponaria.
Cucubalus.
Agroſtema.
Silene.

Coronaria.
Lychnis.
Drypis.
*
Franckenia.
Droſſera.
Linum.
Alſine
Ceraſtium.
Spergula.
Arenaria.
Holoſteum.
Sagina.
Moehringia.
*
Thalictrum.
Clematis.
Pulſatilla.
Anemone.
Hepatica.
Adonis.
Ranunculus.
*
Suriana.
*
Paeonia.
Helleborus.
Caltha.
Diosma.
Iſopyrum.
Garidella.
Nigella.
Aquilegia.
Parnaſſia.
*
Pavia.
Eſculus.
Trapaeolum.
*
Malpighia.
Baniſteria.
Acer.
*
Reſeda.
*
Aconitum.
Delphinium.
Dictamnus.
*
Sophora.
Cercis.
Bauhinia.
Parkinſonia.
Caſſia.
Poinciana.

Ordo II.

Staminibus aliqua parte inter ſe connexis aut coalitis.

Sectio I.

In Floribus Apetalis.

a. Hypocarpiis.

*
Abies.
Pinus.
Cupreſſus.
Thuya.
*
Juniperus.
Taxus
Ephedra.
*
Ricinus

Sectio II.

In Floribus Corollatis.

a. Hypocarpiis.

† *aequalibus.*

*
Citrus.
*
Hypericum.
Aſcyrum.

† *inaequalibus.*

*
Geranium.
Viola.
*
Polygala.
Heiſteria.
*
Impatiens.
*
Fumaria.
*
Amorpha.
Erythrina.
Geniſta.
Spartium.
Ulex.
Crotallaria.
Lupinus.
Ononis.
Borbonia.
Achyronia.
Securidaca.
Cytiſus.

Anagy-

Anagyris.
Robinia.
Phaſeolus.
Dolichos.
Clitoria.
Lathyrus.
Piſum.
Vicia.
Orobus.
Lotus.
Dorycnium.
Trifolium.
Anthyllis.
Melilotus.
Croum.
Cicer.
Phaca.
Galega.
Pſoralea.
Colutea.
Arachis.
Trigonella.
Medicago.
Glycirrhyza.
Hedyſarum.
Æſchynomene.
Hippocrepis.
Scorpiurus.
Ornithopus.
Coronilla.
Dalea.
*
Aſtragalus.
Biſerrula.
Tragacantha.
Glycine.

CLASSIS II.

PETALOSTEMONIS.

Cujus Stamina adhærent COROLLÆ aut ejus NECTARIO.

ORDO I.

Staminibus a ſe invicem diſtinctis.

SECTIO I.

In Flora Simplici, Æquali.

a. Corollis Epicarpiis.

*

Gallium.
Aparine.
Crucianella.
Aperula.
Sherhardia.
Vaillantia.
*
Spermacoce.
*
Matthiola.
Cinchona.
*
Samolus.
Adoxa.
Poterium.
Sanguiſorba.
*
Roella.
Campanula.
Phyteuma.
Trachelium.
*
Morinda.
Chomelia.
Rondeletia.
*
Melothria.
*
Meſembryanthemum.
*
Sambucus.
Viburnum.
*
Bellonia.
Zanonia.
Genipa.
*
Loranthus.
Richardia.
*
Haemanthus.
*
Gethylis.
Iris.
*
Pancratium.
Narciſſus.
Crocus.

b. Hypo-

b. Hypocarpiis.

*

Colchicum.
Bulbocodium.

*

Hemerocallis.
Aſphodelus.
Crinum.
Hyacinthus.
Muſcari.
Polyanthes.

*

Polygonatum.
Aſparagus.

*

Renealmia.
Tillandſia.

*

Cuſcuta.

*

Najas.

*

Houſtonia.
Plantago.

*

Centunculus.
Monria.

*

Statice.

*

Gomphrena.

*

Mimoſa.

*

Paſſerina.
Daphne.
Olea.
Brunsfelſia.
Phyllirea.
Chionanthus.
Syringa.
Liguſtrum.
Jasminum.
Nyctanthes.
Coffea.

*

Siphonanthus.
Randia.
Cordia.
Cortuſa.
Trientalis.
Lyſimachia.
Anagallis.
Hottonia.

*

Androſace.
Aretia.
Primula.
Soldanella.
Menyanthes.
Hydrophyllum.
Patagonula.
Dispenſia.
Theophraſta.
Phlox.
Spigelia.
Cotyledon.
Mitreola.

*

Plumbago.
Polemonium.
Convolvulus.

*

Mirabilis.
Datura.
Nicotiana.
Atropa.
Mandragora.
Phyſalis.
Solanum.
Capſicum.

*

Gentiana.

*

Rauwolffia.
Cerbera.
Thevetia.
Plumeria.
Nerium.
Vinca.
Tabernaemontana.
Cameraria.
Cercopegia.
Apocynum.
Cynanchum.
Aſclepias.
Periploca.
Stapelia.

*

Chironia.
Phylica.
Ceſtrum.
Strychnis.
Chryſoſphyllum.
Rhamnus.
Lycium.
Catesbaea.

*

Ilex.
Prinos.

*

Caryca.
Hura.

*

Budleja.
Ixora.
Avicennia.
Pennaea.

*

Diospyros.
Styrax.
Royena.
Arbutus.
Vaccinium.
Santalum.
Andromeda.
Myrſine.

*

Cyclamen.

*

Tournefortia.

*

Myoſo

Myoſotis.
Symphytum.
Cerinthe
Cynogloſſum.
Pulmonaria.
Anchuſa
Lithoſpermum.
Heliotropium.
Aſperugo.
Lycopſis.
Borago.

Sectio II.

In Flore Simplici, Inaequali.

a. Corollis Epicarpiis.

*
Morina.
Lonicera.
Diervilla.
*
Diodia.
Gesneria.
Martynia.
Ovieda.
Linnaea.
*
Muſa.
*
Alpinia.
Canna.
Amomum.
Maranta.
Coſtus.
Curcuma.
*
Gladiolus.
Cunonia.
Antholyza.

b. Corollis Hypocarpiis.

*
Echium.
*
Ajuga.
Teucrium.
Trichoſtema.
Thymus.
Satureja.
Clinopodium.
Origanum.
Lavandula.
Hyſſopus.
Horminum.
Meliſſa
Glechoma.
Sideritis.
Nepeta.
Betonica.
Mentha.
Ocymum.
Melitis.
Dracocephalum.
Cunila.
Lamium.
Galeopſis.
Stachys.
Balotta.
Marrubium.
Moluccella.
Leonurus.
Orphila.
Prunella.
Phlomis.
Scutellaria.
*
Praſium.
*
Colliſonia.
Gmelina.
Monarda.
Salvia.
Rosmarinus.
Ziziphora.
Dianthera.
Lycopus.
Verbena.
*
Gratiola.
*
Paederota.
Veronica.
*
Juſticia.
Utricularia.
Pinguicula.
*
Caeſalpinia.
*
Pontederia.
*
Hyoſcyamus.
Celſia
Verbaſcum.
*
Antirrhinum.
Cymbaria.
Elephas.
Pedicularis.
Rhinanthus.
Bartſia.
Halleria.
Euphraſia.
Melampyrum
Orobranche.
Lathraea.
Squamaria.
Phelypaea.
Chelone.
Dodartia.
Barleria.
Gerardia.
Clerodendron.
Bontia.
Schwalbea.
Cranolaria.
Scrophularia.
Seſamum.

Digitalis.
Bignonia.
Acanthus.
Columnaea.
Ruellia.
Besleria.
Obularia.
Crescentia.
Petrea.
Buchnera.
Lippia.
Selago L.
Browallia.
Erinus.
Tozzia.

Lantana.
Cornutia.
Vitex.
Ægiphila.
Capraria.
Loeselia.
Hebenstretia.
Limosella.
Coris.

*

Melianthus.

*

Valeriana.
Boerhavia.

Sectio III.

In Flore Aggregato.

a. Corollis Epicarpis.

*

Knautia.
Scabiosa.
Cephalanthus.
Dipsacus.
Parthenium.
Ambrosia.
Xanthium.

b. Corollis Hypocarpis.

Globularia.
Protea.
Brunia.

Ordo II.

Staminibus aliqua parte inter se connexis aut coalitis.

Sectio I.

Inferius; seu Filamentis.

a. In Flore Simplici.

*

Theobroma.

*

Melochia.

*

Hibiscus.
Trionum.
Camellia.
Urena.
Malope.
Lavatera.
Malva.
Sida.
Gossypium.
Waltheria.
Hermannia.

Sectio II.

Superius s. Antheris.

a. In Flore Simplici.

*

Ruscus.

*

Pneumonanthe.

*

Corymbium.
Lobelia.

b. In Flore Aggregato, Uniformi.

*

Jasione.

*

Leucadendron.

† *Corollis Ligulatis.*

*

Phrenanthes.
Chondrilla.
Lactuca.
Hieracium.
Crepis.
Andryala.
Hypochoeris.
Leontodon.
Scorzonera.
Tragopogon.
Sonchus.
Lampsana.
Cichorium.
Catananche.
Scolymus.

*

Elephantopus.

† *Corollis Tubulosis.*

Gundelia.
Arctium.
Serratula.
Onopordon.
Carduus.
Cirsium.

Cirſium.
Cinara.
Carthamus.
Echinops.
*
Carlina.
Staehelina.
Stoebe.
*
Santolina.
Tanacetum.
Ageratum.
Chryſocoma.
Tarchonanthus.
Eupatorium.
Cacalia.
Kleinia.

c. In Flore Aggregato, Diſſormi.

† *Corollis Tubuloſis.*

*

Centaurea.
Xeranthemum.
Cnicus.

† *Corollis Tubuloſis, & Ligulatis ſimul.*

*

Atractylis.

*

Erigeron.
Gerbera.
Doronicum
Solidago.
Senecio.
Aſter.
Buphralmum.
Matricaria.
Chryſanthemum.
Cotula.
Anacyclus.
Anthemis.
Bellis.
Achillea.
Helenia.
Tridax.
Siegesbeckia.
Verbeſina.
Tetragonotheca.
Tagetes.
Helianthus.
Rudbeckia.
Calendula.
Coreopſis.
Arctotis.
Oſteoſpermum.
Chryſogonum.
Melampodium.
Silphium.
Othonna.
Milleria.
Eriocephalus.
Tuſſilago.

† *Corollis Tubuloſis, & Nudis ſimul.*

Petaſites.
Conyza.
Bacharis.
Gnaphalium.
Bidens.
Microgus.
Sphaeranthus
Arthemiſia.

CLASSIS III.

CALYCOSTEMONIS.

Cujus Stamina adhærent CALYCI.

ORDO I.

Staminibus a ſe invicem Diſtinctis.

SECTIO I.

In Floribus Apetalis.

a. Epicarpiis.

*

Viſcum.

*

Aizoon.
Salſola.

*

Theſium.

b. Hypocarpiis.

*

Scleranthus.
Alchimilla.
Aphanes.

Sectio II.

In Floribus Corollatis.

a. Epicarpiis.

*

Agrimonia.

*

Gronovia.

*

Epilobium.
Oenothera.
Rhexia.
Turnera.

*

Melaſtoma.

*

Philadelphus.
Piſidium.
Eugenia.
Myrtus.

*

Pyrus.
Punica.
Mespilus.
Crataegus.
Sorbus.
Ribes.

b. Hypocarpis,

*

Guajacum.
Garcinia.
Amygdalus.
Prunus.
Ceraſus.
Padus.

*

Roſa.
Rubus.
Potentilla.
Comarum.
Sibaldia.
Geum.
Dryas.

*

Spiraea.
Filipendula.
Aruncus.

*

Lythrum.
Ammannia.
Isnardia.
Peplis.

*

Heuchera.
Mitella.
Muntingia.

*

Burmannia.

*

Tamarindus.
Guilandina.

Ordo II.

Staminibus aliqua parte coalitis aut connexis.

Sectio I.

Superius; ſeu Antheris.

a. Corollis Epicarpis.

Feuillea.
Trichoſanthes.
Momordica.
Cucumis.
Cucurbita.
Sicyos.
Bryonia.

CLASSIS IV.

STYLOSTEMONIS.

Cujus Stamina adhærent PISTILLO.

ORDO I.

Staminibus a ſe invicem Diſtinctis.

SECTIO I.

In Floribus Apetalis.

a. Hypocarpus.

*

Nepenthes.

SECTIO II.

In Floribus Corollatis.

a. Epicarpus.

*

Orchis.
Serapias.
Cypripedium.
Herminium.
Ophrys.
Neottia.
Limodorum.

*

Epidendron.

*

Ariſtolochia.

b. Hypocarpus.

*

Piſtia.

*

Siſyrinchium.

*

Andrachne.
Clutia.

*

Eriocaulon.

FLORESCENTIA PLANTARUM PERFECTA, &c.

VEL

LATENS,

VEL

PRORSUS.

CLASSIS V.

ORDO I.

*

Ficus,

VEL OB SUMMAM MINUTIEM.

CLASSIS VI.

ORDO I.

Filices.

*

Equiſetum.
Ophioglosſum.
Osmunda.

*

Lonchitis.

*

Pteris.
Thelypteris.
Polypodium.
Aſplenium.
Phyllitis.
Hemionitis.
Trichomanes.
Adianthum.
Acroſticum.

ORDO II.

Muſci.

*

Polytrichum.
Bryum.
Hypnum.
Sphagnum.
Marium.

Fonti-

Fontinalis.
Lycopodium.

Ordo III.
Algae.

Anthoceros.
Riccia.

Jungermannia.
Marchantia.
Blaſia.
Lichen.

Lemna.

Marſilea.
Fucus.
Tremella.
Ulva.
Conferva.

Ordo IV.
Fungi.

Byſſus.
Clavaria.
Elvela.
Phallus.
Boletus.
Agaricus.
Clathrus.

Peziza.
Stemonitis.
Lycoperdon.
Buxbaumia.
Mucor.

Ordo V.
Lithophyta.

Lithoxylum.
Iſis.
Millepora.
Tubipora.
Cellepora.
Madrepora.
Spongia.
Sertularia.

GENERA
ANOMALA ET VAGA
POTIORA,

quæ in omni Methodo a fructificatione deſumpta ob partium quarundam floralium inconſtantiam, quoad *numerum*, *figuram*, *ſitum* & *proportionem* &c. exceptiones indicant, & quarum *ſpecies* diverſas ſæpius ſimul *Claſſes*, *Ordines*, *Sectiones* vel *Genera* ingrediuntur.

Fumaria.
Lupinus.
Trifolium.
Colutea.
Ornithopus.
Coronilla.
Cleone.
Siſymbrium.
Cardamine.

Raphanus.
Draba.
Alyſſum.
Clypeola.
Leonidium
Myagrum.
Geranium.
Sida
Malva.
Hibiſcus.

Teucrium.
Thymus.
Origanum.
Hyſſopus.
Dracocephalum.
Stachys.
Leonurus.
Marrubium.
Praſium.
Antirrhinum.

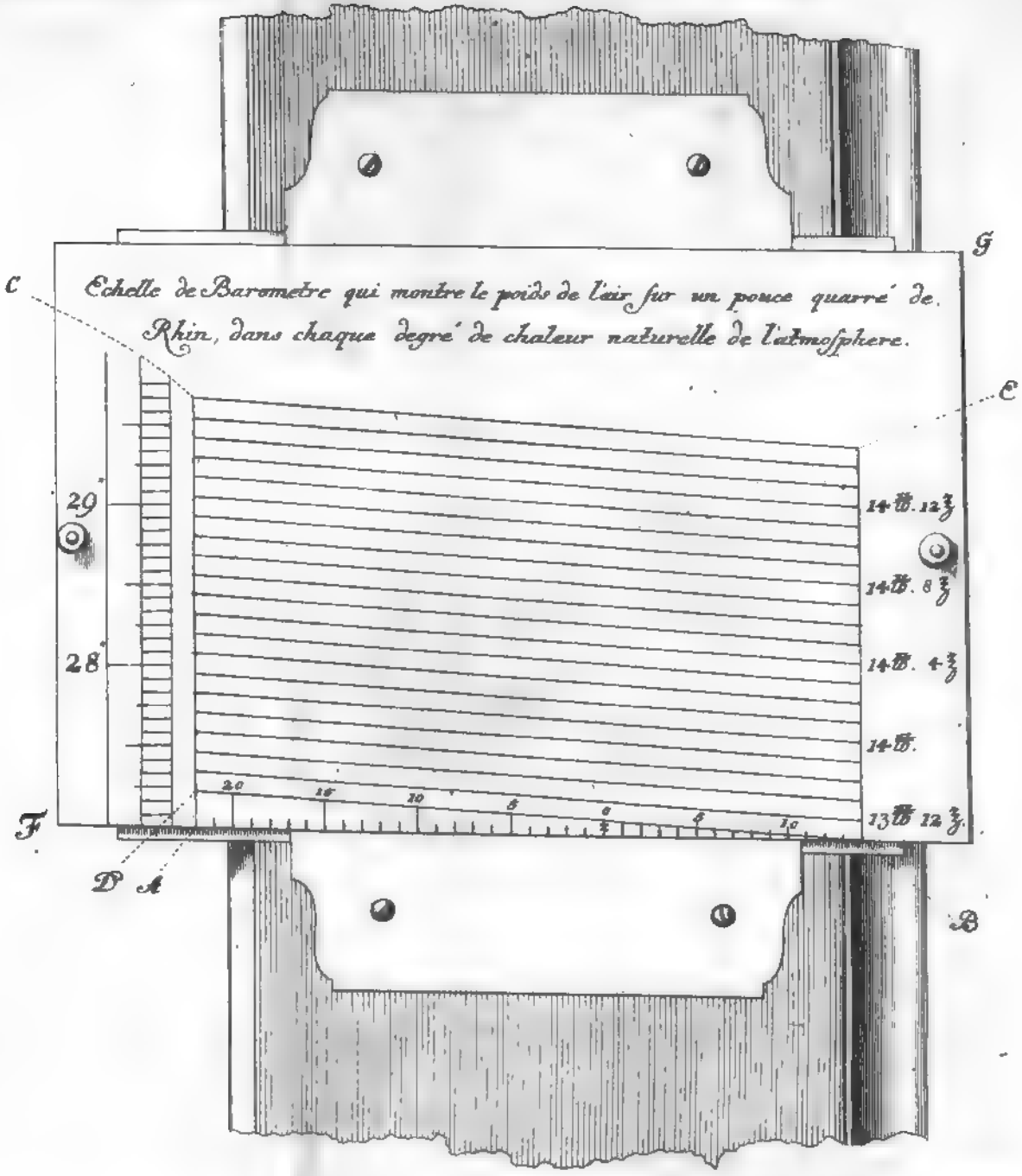
Rhinan-

Rhinanthus.
Pedicularis.
Orobanche.
Bignonia.
Capraria.
Hypericum.
Nymphaea.
Euphorbia.
Cistus.
Mimosa.
Reseda.
Mesembryanthemum.
Clematis.
Thalictrum.
Ranunculus.
Helleborus.
Potentilla.
Spiraea.
Agrimonia.
Mirabilis.
Sophora.
Bauhinia.
Ammannia.
Monotropa.
Zygophyllum.

Pyrola.
Andromeda.
Saponaria.
Cucubalus.
Silene.
Alsine.
Coryledon.
Lychnis.
Laurus.
Acer.
Ruta.
Erica.
Asparagus.
Polygonatum.
Hyacinthus.
Aloe.
Hemerocallis.
Menispermum.
Azalea.
Campanula.
Lonicera.
Rhamnus.
Chironia.
Gentiana.
Pneumonanthe.

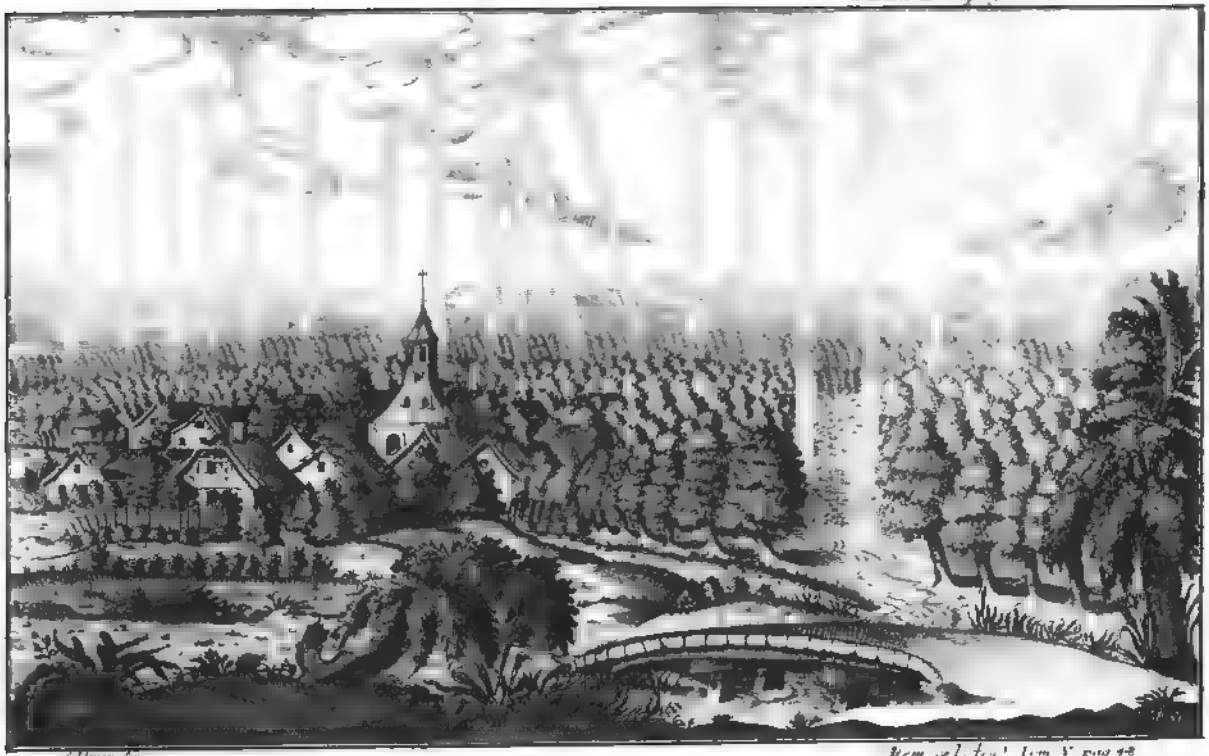
Heracleum.
Myrsine.
Eryngium.
Scandix.
Tamarix.
Aralia.
Statice.
Staphylaea.
Linum.
Senecio.
Scabiosa.
Petasites.
Fraxinus.
Valeriana.
Platanus
Commelina.
Corispermum.
Montia.
Lobelia.
Lampsana.
Impatiens.
Salix.
Myrica.
Marchantia.

MEMOIRES

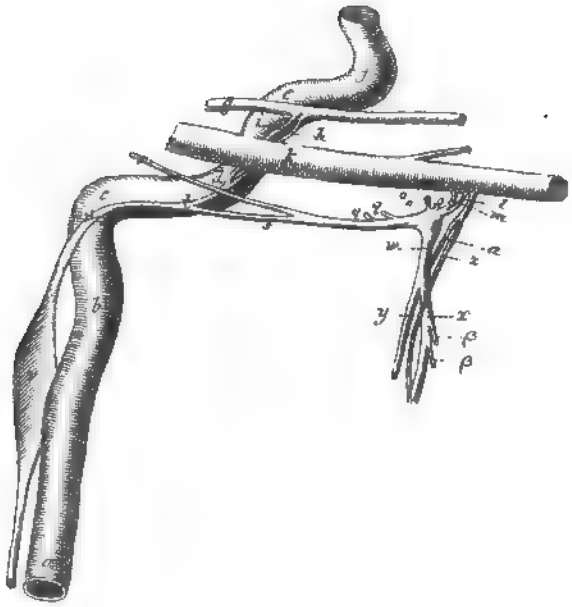


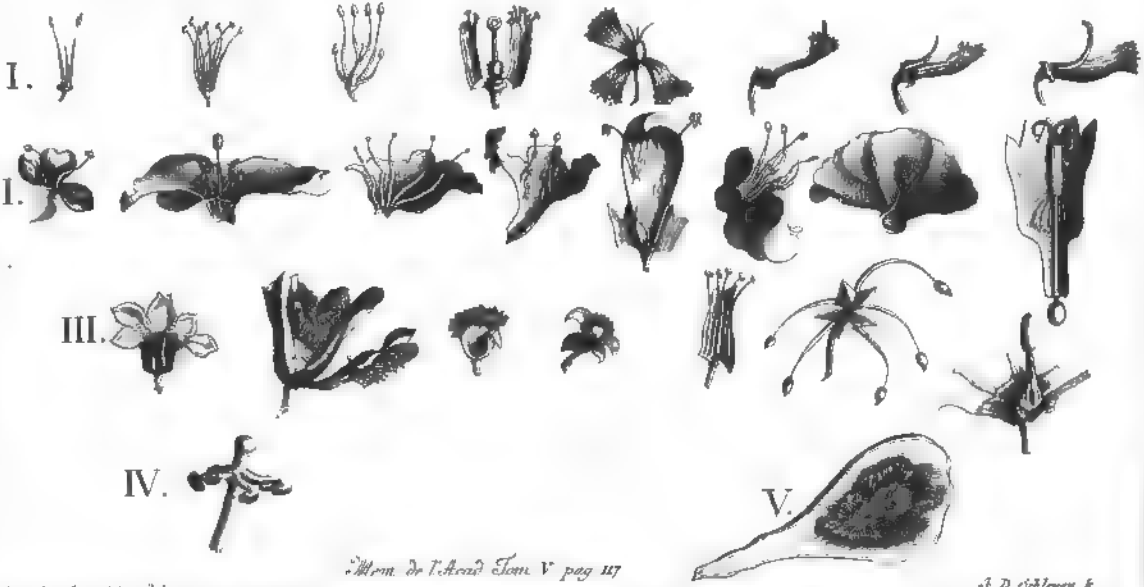
Mem. de l'Acad. Tom. V pag 36.

Planche II ad pag 130



Verm. del. to. I. Tom V. pag 48


y
x
β
β



Mem de l'Acad Tom V pag 117

J C Reinbeck M D del

J D Schleuen fc

MEMOIRES

DE

L'ACADEMIE ROYALE

DES

SCIENCES

ET

BELLES LETTRES.

CLASSE DE MATHEMATIQUE.

* * *

DE LA CONTROVERSE ENTRE *Mrs. LEIBNITZ & BERNOULLI* SUR LES LOGARITHMES DES NOMBRES NEGATIFS ET IMAGINAIRES.

PAR M. EULER.

Quoique la doctrine des logarithmes ſoit ſi ſolidement établie, que les vérités, qu'elle renferme, ſemblent auſſi rigoureuſement demontrées que celles de la Geometrie; les Mathematiciens ſont pourtant encore fort partagés ſur la nature des logarithmes des nombres négatifs & imaginaires: & quand on ne trouve pas cette controverſe fort agitée, la raiſon en eſt apparemment, qu'on n'a pas voulu rendre ſuſpecte la certitude de tout ce, qu'on avance dans les parties pures de la Mathematique, en developant devant les yeux de tout le monde les difficultés, & meme les contradictions, auxquelles les ſentimens des Mathematiciens ſur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires ſont aſſujettis. Car, bien que leurs ſentimens puiſſent être fort differens ſur des queſtions, qui regardent la Mathematique appliquée, où les diverſes manieres d'enviſager les objets & de les ramener à des idées preciſes, peuvent donner lieu à des controverſes réélles; on a toujours prétendu, que les parties pures de la Mathematique étoient entierement délivrées de tout ſujet de diſpute, & qu'il ne

s'y trouvoit rien, dont on ne fut en état de démontrer, ou la vérité ou la fauſſeté.

Comme la doctrine des logarithmes appartient ſans contredit à la Mathematique pure, on ſera bien ſurpris d'apprendre, qu'elle ait été jusqu'ici aſſujettie à des controverſes tellement embarraſſées, que de quelque parti qu'on ſe déclare, on tombe toujours en des contradictions, qu'il ſemble tout à fait impoſſible de lever. Cependant ſi la vérité doit ſe ſoutenir partout, il n'y a aucun doute, que toutes ces contradictions, quelque ouvertes qu'elles paroiſſent, ne peuvent etre qu'apparentes, & qu'il n' y ſauroit manquer des moyens pour ſauver la verité, quoique nous ne ſachions point, de quel endroit nous puiſſions tirer ces moyens.

Cette controverſe ſur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires ſe trouve agitée avec aſſez de force dans le Commerce litteraire entre M. Leibnitz & M. Jean Bernoulli. Ces deux grands Mathematiciens, à qui nous ſommes pour la pluspart redevables de l'Analyſe des infinis, furent tellement partagés ſur cet article, qu'il n'y avoit pas moyen de les mettre d'accord là deſſus; quoique l'un & l'autre n'ait eu en vuë que la vérité, & qu'ils fuſſent egalement eloignés de ſoutenir leurs ſentimens avec opiniatreté. Mais chacun a trouvé dans le ſentiment de l'autre tant de contradictions, que ç'auroit été une complaiſance trop outrée, ſi l'un avoit changé ſon ſentiment en faveur de l'autre. Car il faut remarquer que les contradictions, que ces deux Grands hommes ſe reprochoient, etoient réelles, & point du tout du nombre de celles, qui ne paroiſſent telles, qu'à la partie oppoſée, entétée de ſon propre ſentiment.

Pour mettre donc cette remarquable controverſe dans tout ſon jour, j'expoſerai ici ſéparément les ſentimens de M. Bernoulli & de M. Leibniz; j'y ajouterai enſuite tous les argumens, dont chacun s'eſt ſervi pour maintenir ſon ſentiment: & enfin je détaillerai les objections, qu'on peut faire, tant contre les argumens, que contre chaque ſentiment meme, & je ferai ſentir en toutes leurs forces toutes les contradictions,

aux-

auxquelles l'un & l'autre de ces deux ſentimens eſt aſſujetti, afin qu'on ſoit d'autant mieux en état de juger, combien il doit être difficile de découvrir la verité, & de la garantir contre toutes les objections, aprés que les deux plus grands hommes y ont travaillé en vain.

Sentiment de Mr. Bernoulli.

Mr. Bernoulli ſoutint, que les logarithmes des nombres négatifs étoient les memes que ceux des nombres affirmatifs: ou que le logarithme du nombre negatif $-a$ *étoit égal au logarithme du nombre affirmatif* $+a$. *Ainſi le ſentiment de M. Bernoulli porte qu'il y a* $l-a = l+a$.

M. Leibniz a donné occaſion à cette declaration de M. Bernoulli, lorsqu'il avança dans la CXC Epitre du Commerce, que la raiſon de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme ou la meſure de cette raiſon, c. à d. le logarithme de -1, qui eſt l'expoſant de cette raiſon, étoit imaginaire. Là deſſus M. Bernoulli declara dans la CXCIII Epitre qu'il n'etoit point de meme avis, & qu'il croyoit même, que les logarithmes des nombres negatifs étoient non ſeulement réels, mais auſſi égaux aux logarithmes des mêmes nombres pris poſitivement. Mr. Bernoulli fortifia auſſi ſon ſentiment par les raiſons ſuivantes.

1. *Raiſon.* Pour prouver que $l-x = l+x$, quelque nombre qu'on marque par x, il recourt aux differentiels; & puisque le differentiel de $l-x$ eſt $\frac{-dx}{-x}$ ou $\frac{dx}{x}$ de même que celui de $l+x$, il en conclut, que ces quantités mêmes $l-x$ & $l+x$, dont les differentiels ſont égaux, doivent être égales entr'elles, & partant qu'il eſt $l-x = l+x$.

2. *Raiſon.* Cette raiſon eſt tirée de la nature de la courbe logarithmique. Pour la faire mieux comprendre, ſoit VBM une logarithmique décrite ſur l'axe OAP, qui eſt en même tems ſon aſymtote. Soit la ſoutangente de cette logarithmique, qui eſt, comme on ſait, conſtante

PLANCHE I. *Fig. I.*

ſtante, $= 1$; & que l'appliquée fixe A B ſoit auſſi $= 1$. Cela poſé, ſi l'on nomme une abſciſſe quelconque A P $= x$, priſe depuis le point fixe A, & l'appliquée qui y repond P M $= y$, on ſait que x exprime le logarithme de y, ou que $x = /y$. Donc prenant les differentiels, on aura pour cette courbe logarithmique cette équation differentielle $dx = \frac{dy}{y}$ ou $y\,dx = dy$. Cette équation demeurant la même, quoiqu'on mette $-y$ au lieu de y, M. Bernoulli conclut de là, que cette courbe V B M eſt accompagnée, en vertu de la loi de continuité, de la branche $v\,b\,m$, qui lui eſt égale & ſemblable, étant ſituée de l'autre part de l'axe O P, de ſorte que cet axe ſoit en même tems un diametre de la courbe entiere. Et partant, puisque la même abſciſſe A P répond également aux deux appliquées P M & P m, dont l'une eſt la negative de l'autre, de ſorte que poſant P M $= y$ il eſt P $m = -y$; il s'enſuit que x eſt auſſi bien le logarithme de $-y$ que de $+y$, par conſéquent $/-y = /+y$.

3. *Raiſon.* Comme tout revient à prouver que la logarithmique eſt compoſée de deux branches égales, ſituées de part & d'autre de l'aſymtote O P, M. Bernoulli apporte encore une autre raiſon, qui eſt, qu'en conſidérant les courbes compriſes dans cette équation plus générale $dx = \frac{dy}{y^n}$, on eſt d'accord, que toutes ces courbes, lorsque l'expoſant n eſt un nombre impair, ont deux branches telles, que l'axe, ſur lequel ſont priſes les abſciſſes x, en eſt un diametre. Donc il faut que cette propriété ait auſſi lieu, ſi $n = 1$; or dans ce cas on aura la logarithmique de l'article précedent ; d'où il s'enſuit donc, que tant le logarithme de P M $= +y$, que le logarithme de P $m = -y$ eſt le même $=$ A P $= x$.

4. *Raiſon.* Puisqu'il eſt certain par la nature des logarithmes, que le logarithme d'une puiſſance quelconque p^n eſt égal au logarithme de la racine p multipliée par l'expoſant n, ou que $/p^n = n/p$; il s'enſuit

ſuit, que prenant pour p un nombre négatif $-a$, il y aura $l(-a)^n = n\,l(-a)$. Soit $n = 2$, & il ſera $l(-a)^2 = 2\,l(-a)$. Or parce que $(-a)^2 = a^2$, nous aurons $l(-a)^2 = la^2 = 2\,la$; d'où il s'enſuit que $2\,l(-a) = 2\,la$, & partant $l-a = l+a$. Cela ſe montre plus promtement de cette maniere: Puisque $(-a)^2 = (+a)^2$, il ſera $l(-a)^2 = l(+a)^2$, ou bien $2\,l-a = 2\,l+a$, & par conſéquent $l-a = l+a$.

Toutes les autres raiſons, qu'on peut alleguer pour prouver ce ſentiment, ſe réduiſent aiſement à une des quatre, que je viens d'expoſer. Je m'en vai donc étaler les objections, qu'on fait contre ce ſentiment, & les raiſons dont il eſt appuyé.

1. *Objection.* M. Leibniz oppoſa contre la premiere raiſon; que la regle de differentier le logarithme d'une quantité variable x, en diviſant le differentiel de x par la quantité même x n'avoit lieu, que lorsque x marquoit une quantité poſitive, de ſorte qu'on ſe trompoit en poſant le differentiel de $l-x$ egal à $\frac{-dx}{-x}$ ou à $\frac{dx}{x}$. Or il faut avoüer, que cette objection eſt non ſeulement extrêmement foible, n'etant ſoutenue par aucune raiſon valable; mais qu'elle renverſeroit tout à fait le calcul differentiel des logarithmes. Car comme ce calcul roule ſur des quantites variables $c.\,à.\,d$ ſur des quantités conſidérées en général, s'il n'etoit pas vrai généralement, qu'il fut $d.\,lx = \frac{dx}{x}$, quelque quantité qu'on donne à x, ſoit poſitive, ou négative, ou même imaginaire, on ne pourroit jamais ſe ſervir de cette régle: la vérité du calcul differentiel étant fondée ſur la généralité des regles, qu'il renferme. Or M. Leibniz n'auroit pas eu beſoin de ſe tenir à cette objection pour maintenir ſon ſentiment, puisqu'il auroit pu attaquer la raiſon de M. Bernoulli par une objection beaucoup plus forte, que voilà.

2. *Objection.* Mr. Bernoulli voulant prouver par l'egalité des differentiels, qu'il etoit $l-x = l+x$, prouveroit par le même raiſonnement

nement que $l2x = lx$; car le differentiel de $l2x$ eſt $\frac{2dx}{2x} = \frac{dx}{x}$, tout comme celui de lx. Et partant ſi le raiſonnement de M. Bernoulli étoit juſte, il s'enſuivroit que non ſeulement $l-x = l+x$, mais auſſi que $l2x = lx$ & en général que $lnx = lx$, quelque nombre que marque n: conſéquence, que M. Bernoulli lui même n'accorderoit jamais. Or on ſait que, lorsque les differentiels de deux quantités variables ſont égaux, il n'en ſuit pas davantage, que ce, que ces quantités variables different entr'elles d'une quantité conſtante; & on n'en ſauroit conclure, qu'elles fuſſent égales. Ainſi quoique le differentiel de $x+a$ ſoit $= dx$ auſſi bien que celui de x, la conſéquence ſeroit bien fauſſe, ſi l'on en vouloit conclure que $x+a = x$. Par cette raiſon il eſt donc clair, que puisque le differentiel de $l-x$ & de $l+x$ eſt le même $\frac{dx}{x}$, les quantités $l-x$ & $l+x$ ne different entr'elles que d'une quantité conſtante, ce qui eſt egalement évident, vuque $l-x = l-1+lx$. Et de là on comprend auſſi aiſément, que puisque $lnx = lx+ln$, le differentiel de lnx doit être égal au differentiel de lx. Il eſt vrai que M. Bernoulli ſuppoſe $l-1 = 0$, de même qu'il eſt $l1 = 0$, de ſorte qu'il ſeroit $l-x = lx+l-1 = lx$. Mais comme c'eſt préciſément ce que M. Bernoulli veut prouver par ce raiſonnement, on voit bien que cette ſuppoſition ne peut pas être admiſe.

3. *Objection.* On peut oppoſer la même choſe contre la ſeconde raiſon de M. Bernoulli, quand il veut prouver par l'equation differentielle de la Logarithmique $ydx = dy$, que cette courbe a deux branches ſemblables ſituées de part & d autre de l'axe. Car non ſeulement cette équation demeure la même, ſi l'on met $-y$ au lieu de y, mais auſſi ſi l'on met $2y$, ou en général ny pour y; d'où il ſuivroit que cette courbe eut une infinité de branches, & que l'abſciſſe x fut le logarithme commun non ſeulement de y & de $-y$, mais auſſi de $2y$, & en général de ny, quelque nombre que ſoit n. Ainſi par la même raiſon, qu'on eſt en droit de nier l'infinité des branches de la Logarithmique, on niera auſſi l'exiſtence des deux branches, que M. Bernoulli veut établir.

4. *Ob-*

4. *Objection.* Cette objection eſt encore dirigée contre les deux branches de la courbe logarithmique. Car quoique qu'on puiſſe ſurement conclure l'exiſtence d'un diametre d'une courbe, lorsque ſon équation entre les coordonnées x & y eſt telle, qu'elle demeure inalterée, ſi l'on met $-y$ à la place de y. Cependant ce critere n'eſt juſte, que lorsque l'équation pour la courbe eſt algébrique, ou renfermée en termes finis. Car on ſait qu'une équation differentielle eſt beaucoup plus générale, que l'équation finie d'où elle a été tirée, & qu'elle renferme une infinité de courbes, qui ne ſont pas compriſes dans l'equation finie. Ainſi l'équation de la parabole $yy = ax$ a pour differentielle $2ydy = adx$; mais cette même équation differentielle convient également à cette équation générale $yy = ax \pm ab$, qui renferme à la fois une infinité de paraboles. Il en eſt de meme de l'equation differentielle de la logarithmique $ydx = dy$, qui convient auſſi bien à cette équation finie $x = lny$, qu'a celle-cy $x = ly$, qu'on a pourtant uniquement en vuë. De la il s'enſuit qu'on ne peut pas juger de la forme d'une courbe, en ne conſiderant que ſon équation differentielle.

5. *Objection.* Celle-cy regarde la troiſieme raiſon, qui eſt ſans doute beaucoup plus forte. Car ſi toutes les courbes compriſes dans cette équation generale $dx = \frac{dy}{y^n}$, où n marque un nombre impair, ſont douées d'un diametre, la même propriété doit avoir lieu, ſi $n = 1$, ce qui eſt le cas de la logarithmique. Mais puisque cette propriété n'eſt evidente, qu'entant qu'on conſidere les équations integrales de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, qu'on peut toujours aſſigner algébriquement hormis le cas $n = 1$; de meme maniere qu'on doit excepter ce cas, lorsque la queſtion roule ſur l'intégrabilité de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, on ſera en droit de faire la même exception, lorsqu'il s'agit du jugement d'un diametre. Donc, ſi l'on ne peut pas prouver par quelque

autre raiſon, que la logarithmique ait un diametre, cet argument tiré de l'équation générale $dy = \frac{dy}{y^n}$ n'eſt pas convaincant. Pour en montrer plus clairement l'inſuffiſance, je ferai voir même dans les courbes algébriques des cas, où une équation générale renferme des courbes toutes douées d'un diametre, & que néantmoins il en faut excepter un cas particulier. Qu'on conſidere cette équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$, & on ne doutera pas de conclure, que les courbes exprimées par cette équation n'ayent un diametre, puiſqu'en réduiſant l'equation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$ à la rationalité, on obtient une équation du huitieme degré, où tous les expoſans de y ſont des nombres pairs. Cependant quelque ſure que paroiſſe cette concluſion, il en faut pourtant excepter le cas où $b = o$; car alors l'équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$ étant delivrée des ſignes radicaux ne monte qu'au quatrieme degré devenant:

$$y^4 - 2axyy - 4aaxy + aaxx - a^3x = o$$

laquelle à cauſe du terme $4aaxy$ eſt deſtituée de diametre. De tout cela il s'enſuit donc, que cet argument de M. Bernoulli n'eſt pas aſſez rigoureux pour demontrer ſon ſentiment.

6. *Objection.* Je paſſe à la quatrieme raiſon de M. Bernoulli, qui eſt ſans doute la plus forte; car on ne ſauroit revoquer en doute aucun article, qui y ſert de fondement, ſans renverſer les principes les mieux établis de l'analyſe & de la doctrine des logarithmes. Car on ne ſauroit nier que $(-a)^2 = (+a)^2$, donc il n'y a aucun doute, que leurs logarithmes ne ſoient égaux c. à d. $l(-a)^2 = l(+a)^2$. Enſuite il eſt également certain qu'il eſt en général $lp^2 = 2lp$, donc il y a $l(-a)^2 = 2l-a$ & $l(+a)^2 = 2l+a$: & partant il ſera ſans contredit $2l-a = 2l+a$. Les moitiés de ces deux quantités ſeront donc auſſi inconteſtablement égales entr'elles, & par conſéquent il ſera $l-a = la$, tout comme M. Bernoulli le ſoutient. Mais ſi ce raiſon-

raiſonnement eſt juſte, on en tirera auſſi d'autres conſéquences, que perſonne, & encore moins M. Bernoulli, ne ſauroit accorder : car on prouvera de la même façon, que les logarithmes des quantités imaginaires ſeroient auſſi bien réels, que ceux des nombres negatifs. Car il eſt certain que $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$, donc il ſera auſſi $l(a\sqrt{-1})^4 = la^4$, & de plus $4l(a\sqrt{-1}) = 4la$, par conſéquent $l(a\sqrt{-1}) = la$. Outre cela, puiſqu'il eſt $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = a^3$, il ſera $l\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = la^3$, & partant $3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = 3la$, donc $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = la$, ce qu'on ne ſauroit admettre ſans renverſer toute la doctrine des logarithmes.

Il ſeroit donc, ſelon le ſyſteme de M. Bernoulli, non ſeulement $l-1 = l1 = 0$, mais auſſi $l\sqrt{-1} = 0$; $l-\sqrt{-1} = 0$; & $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$. Or M. Bernoulli ayant ſi heureuſement réduit la quadrature du cercle aux logarithmes des nombres imaginaires, ſi le logarithme de $\sqrt{-1}$ etoit $= 0$, toute cette belle découverte ſeroit fauſſe; par laquelle il a fait voir, que le rayon eſt à la quatrieme partie de la circonference, comme $\sqrt{-1}$ à $l\sqrt{-1}$. Donc poſant le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$, il ſera $\frac{1}{2}\pi = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$, & partant $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui ſeroit abſurde s'il etoit $l\sqrt{-1} = 0$. Il n'eſt pas donc vray que $l\sqrt{-1} = 0$, d'où il faut conclure que quelque ſolide que paroiſſe la 4me raiſon, elle doit être ſujette à caution, puiſqu'il en ſuivroit auſſi bien $l\sqrt{-1} = 0$ que $l-1 = 0$. Par conſéquent on ne peut pas dire, que le ſentiment de M. Bernoulli ſoit ſuffiſamment prouvé.

Il eſt ici fort étonnant, que, ſoit qu'on embraſſe le ſentiment de M. Bernoulli, ou qu'on le rejette, on tombe également en des embar-

ras inſurmontables, & même en des contradictions. Car ſi l'on ſoutient que $l-a = l+a$ ou $l-1 = l+1 = 0$, on eſt obligé d'avouër qu'il eſt auſſi $l\sqrt{-1} = 0$, puisque $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2} l-1$. Or il ſeroit non ſeulement abſurde de ſoutenir, que les logarithmes des quantités imaginaires ne ſoient pas imaginaires, mais il ſeroit auſſi faux que $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui eſt néantmoins rigoureuſement prouvé. Ainſi en ſe declarant pour le ſentiment de M. Bernoulli, on tombe en contradiction avec des verités très ſolidement établies.

Poſons que le ſentiment de M. Bernoulli ſoit faux, & qu'il n'y ait point $l-1 = 0$; car c'eſt à quoi ſe réduit le ſentiment de M. Bernoulli; & on ſera obligé d'accuſer de fauſſeté quelcune des opérations ſur leſquelles le raiſonnement de la 4me raiſon eſt fondé : ce qu'on ne pourra faire non plus ſans tomber en contradiction avec d'autres vérités demontrées. Pour rendre cela plus évident, ſoit $l-1 = \omega$, & s'il n'eſt pas $\omega = 0$, ſon double 2ω ne ſera non plus $= 0$, or 2ω eſt le logarithme du quarré de -1, lequel étant $= +1$, le logarithme de $+1$ ne ſeroit plus $= 0$, ce qui eſt une nouvelle contradiction. De plus $-x$ eſt auſſi bien $= -1.x$ que $= \frac{x}{-1}$, donc $l-x = lx + l-1 = lx - l-1$: il ſeroit donc $l-1 = -l-1$, ſans qu'il fut $l-1 = 0$; or c'eſt une contradiction de dire qu'il ſoit $+a = -a$ ſans qu'il ſoit $a = 0$.

Soit donc qu'on diſe l'une ou l'autre de ces deux choſes, ou que le ſentiment de M. Bernoulli eſt vrai, ou qu'il eſt faux, on ſe plonge également dans le plus grand embarras, ayant à combattre avec des contradictions ouvertes. Cependant il faut abſolument, ou que ce ſentiment ſoit vrai, ou qu'il ſoit faux, & il ne paroit point d'autre parti à prendre. Quel moyen donc de ſe tirer d'affaire & de ſauver la vérité contre de ſi grandes contradictions? Je paſſe à l'examen du ſentiment de M. Leibniz.

Senti-

Sentiment de M. Leibniz.

M. Leibniz ſoutint que les logarithmes de tous les nombres negatifs, & à plus forte raiſon ceux des nombres imaginaires, etoient imaginaires: ou puiſque $l-a = la + l-1$, *il ſoutint que* $l-1$ *etoit une quantité imaginaire.*

J'ai déjà remarqué que M. Leibniz ſoutenoit, que la raiſon de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puiſque le logarithme de cette raiſon ou $l-1$ étoit imaginaire. On voit bien que toutes les objections faites contre le ſyſteme de M. Bernoulli ſervent à fortifier ce ſentiment, & que les raiſons alleguées pour le ſentiment de M. Bernoulli doivent être contraires à celui de M. Leibniz. Cependant on peut apporter des raiſons particulieres pour confirmer le ſentiment de M. Leibniz, qui feront le ſujet de mon examen, qui ſuit:

1. *Raiſon.* Ayant fait voir que le logarithme du nombre $1+x$ eſt égal à la ſomme de cette ſerie:

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \text{&c.}$$

d'où l'on voit d'abord que ſi $x = 1$, il doit être $l1 = o$. Maintenant pour avoir le logarithme de -1, il faut mettre $x = -2$, d'où l'on obtient.

$$l-1 = -2 - \tfrac{1}{2}.4 - \tfrac{1}{3}.8 - \tfrac{1}{4}.16 - \tfrac{1}{5}.32 - \tfrac{1}{6}.64 - \text{&c.}$$

Or il n'y a aucun doute, que la ſomme de cette ſerie divergente ne ſauroit être $= o$; donc il eſt certain que $l-1$ n'eſt pas $= o$. Le log. de -1 ſera donc imaginaire, puiſqu'il eſt d'ailleurs clair, qu'il ne ſauroit être réel, c. à d. ou poſitif, ou negatif.

2. *Raiſon.* Soit $y = lx$, & poſant e pour le nombre dont le logarithme $= 1$, dont la valeur approchée eſt, comme on ſait, $e = 2,718281828459$; puiſqu'il ſera $y\,le = 1\,lx$, on en tirera $x = e^y$. Ainſi le logarithme du nombre x étant l'expoſant d'une puiſſance de e qui eſt égale au nombre x, il eſt clair, qu'aucun expoſant réél d'une puiſſance de e ne ſauroit produire un nombre negatif: &

partant pour que e^y devienne $= -1$, ni $y = 0$, ni aucun nombre réel mis pour y ſauroit remplir cette condition. Et poſant en général pour x un nombre negatif $-a$, dont on ſuppoſe le logarithme $= y$, l'équation $e^y = -a$ ſera toujours impoſſible, ou la valeur de y imaginaire.

3. *Raiſon.* Puiſqu'en général la valeur de e^y s'exprime par cette ſerie infinie :

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \text{&c.}$$

qui eſt toujours convergente, quelque grand nombre qu'on mette pour y, de ſorte que les objections tirées de la nature des ſuites divergentes, comme dans la premiere raiſon, ne trouvent pas lieu ici. Ainſi le logarithme du nombre x étant poſé $= y$, on aura

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \text{&c.}$$

& partant ſi y marque le logarithme de -1, ou qu'il ſoit $x = -1$, on aura cette égalité

$$-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \text{&c.}$$

à laquelle, comme il eſt d'abord clair, ne ſauroit ſatisfaire la valeur $y = 0$, vu qu'il en réſulteroit $-1 = +1$. Par conſéquent il eſt certain que le logarithme de -1 n'eſt pas $= 0$.

Je me contente d'avoir apporté ces trois raiſons, puiſque les autres argumens, par leſquels on peut confirmer le ſentiment de Mr. Leibniz, ſont déja contenus dans les objections faites contre le ſyſteme de Mr. Bernoulli. Cependant ces trois raiſons que je viens d'expoſer, ſont ſujettes aux objections ſuivantes.

1. *Objection.* Contre la premiere raiſon on dira d'abord, que l'accroiſſe-

l'accroiſſement continuel des termes, qui ſont tous negatifs, de cette ſuite :

$$-2-\tfrac{1}{2}.\ 4-\tfrac{1}{3}.\ 8-\tfrac{1}{4}.\ 16-\tfrac{1}{5}.\ 32-\tfrac{1}{6}.\ 64-\text{\&c.}$$

n'eſt pas une marque ſeure que la ſomme de cette ſuite ne ſauroit être $=o$. Car ſi cette ſerie geometrique

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-\text{\&c.}$$

donne pour le cas $x=-2$, celle-cy

$$-1=1+2+4+8+16+32+64+\text{\&c.}$$

& pour le cas $x=-3$ celle-cy.

$$-\tfrac{1}{2}=1+3+9+27+81+243+\text{\&c.}$$

pourquoi, dira-t-on, ne ſeroit il pas poſſible, que la ſomme d'une ſerie, dont les termes croiſſent ayant par tout le meme ſigne, ne fut $=o$. Pour en donner un exemple, on n'a qu'à ajouter à la derniere ſerie termes pour termes, celle-cy :

$$\tfrac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1+\text{\&c.}$$

& on aura effectivement :

$$o=2+2+10+26+82+242+730+\text{\&c.}$$

Donc ſi la ſomme de cette ſerie, eſt $=o$, quelle abſurdité ſeroit il donc de ſoutenir, qu'il fut auſſi

$$o=-2-\tfrac{1}{2}.\ 4-\tfrac{1}{3}.\ 8-\tfrac{1}{4}.\ 16-\tfrac{1}{5}.\ 32-\tfrac{1}{6}.\ 64-\text{\&c.}$$

& partant la premiere raiſon n'eſt pas convainquante.

2. *Objection.* La ſeconde raiſon eſt telle, qu'on pourroit auſſi s'en ſervir pour prouver le ſentiment oppoſé. Car puisqu'il y a $x=ey$ ſuppoſant y le logarithme du nombre x, toutes les fois que y eſt une fraction ayant pour dénominateur un nombre pair, il faut avouer qu'alors la valeur de ey & partant auſſi de x, eſt auſſi bien negative qu'affirmative. Ainſi ſi $\frac{m}{2n}$, eſt un logarithme, le nombre x qui lui répond

étant

étant $e^{m:2n} = \sqrt{e^{m:n}}$, ſera tant affirmatif que negatif; de ſorte que dans ce cas tant x que $-x$ aura le même logarithme $\frac{m}{2n}$. Donc, puiſque les logarithmes ne ſont pas des nombres rationels, & par conſéquent équivalens à des fractions, dont les numérateurs & dénominateurs ſont infiniment grands, on pourra toujours regarder les dénominateurs comme des nombres pairs; il s'enſuit que le meme logarithme, qui convient au nombre poſitif $+x$, conviendra auſſi au nombre negatif $-x$.

3. *Objection.* La troiſieme raiſon eſt ſans doute la plus forte, puiſqu'elle ſemble exclure abſolument les nombres negatifs du nombre de ceux, à qui répondent des logarithmes réels. Car il eſt clair que quelque nombre réel qu'on mette pour y, la valeur de cette ſerie

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

ne ſauroit jamais devenir negative, de ſorte qu'aucun logarithme réel ne ſauroit repondre à un nombre negatif. Cependant cette ſerie n'etant vraïe, qu'entant qu'elle decoule de la formule finie e^y, les objections précedentes ont ici également lieu. Car ſi e^y peut donner un nombre negatif, il importe fort peu, ſi la ſerie qui lui eſt égale en donne auſſi un ou non? Pour reconnoitre cela, on n'a qu'à conſiderer une formule radicale, comme $\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$, qui eſt auſſi bien $\frac{+1}{\sqrt{(1-x)}}$ que $\frac{-1}{\sqrt{(1-x)}}$, quoique la ſerie égale

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \&c.$$

ne donne que ſa valeur affirmative, quelque nombre qu'on mette pour x.

M. Leibniz ne manqueroit pas de répondre à ces objections; & comme la premiere ne prouve pas le contraire de ſon ſentiment, & qu'elle

qu'elle ne rend que douteuſe la premiere raiſon, il ne perdroit rien de renoncer à cette premiere raiſon, & de s'en tenir principalement aux autres. Car au fond la ſeconde objection ne détruit point ſon ſentiment, qui ſe réduit uniquement à prouver que $l-1$ n'eſt pas $=o$: or la ſeconde objection ne porte aucune atteinte à cela, vu que ſi e^y doit être $=-1$, l'expoſant y ne ſauroit être aucune fraction de la forme $\frac{m}{2n}$, pour que le ſigne radical puiſſe fournir une valeur negative. Car on conviendra aiſément, que ſoit qu'on mette pour y un nombre affirmatif plus grand que zero, ou un nombre negatif quelconque pour y, la valeur de la puiſſance e^y ne devient jamais $=-1$. Donc ſi y n'eſt pas imaginaire, il faudroit qu'il fut $e^y=-1$ dans le cas $y=o$. Mais dans ce cas évanouït toute ambiguité de ſignes, qui pourroit avoir lieu à cauſe des ſignes radicaux, & il eſt indubitablement $e^o=+1$. Et ſi l'on vouloit dire, qu'on put regarder o comme $\frac{o}{2}$, & e^o comme $\sqrt{e^o}=\sqrt{1}$, dont la valeur ſeroit auſſi $=+1$; ce ſeroit une exception fort foible, puisque par la même raiſon on prouveroit que $-a=+a$: car poſant $a=a^{\frac{2}{2}}=\sqrt{a^2}$, on en tireroit auſſi bien $a=-a$ que $a=+a$. Pour prévenir ces ſortes de conſéquences fauſſes on n'a qu'à remarquer, qu'une telle expreſſion $a^{\frac{m}{2n}}$ n'a deux valeurs, l'une affirmative & l'autre negative, que lorsque la fraction $\frac{m}{2n}$ eſt réduite à ſes plus petits termes, & que le dénominateur demeure encore un nombre pair. Ainſi comme la valeur de ces puiſſances, a^1, a^2 a^3, a^4, &c. n'eſt pas ambiguë, auſſi celle-cy a^o ne ſauroit etre ambigue. Il eſt donc toujours $a^o=+1$, ce qui ſuffit pour détruire la ſeconde objection; & la troiſieme n'a aucune force, qu'entant que la ſeconde ſubſiſte.

Il paroit donc que le ſentiment de M. Leibniz eſt mieux fondé, puisqu'il n'eſt pas contraire à la découverte de M. Bernoulli, qu'il eſt

$l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$; puisque M. Leibniz ſoutient, que le logarithme de -1, & à plus forte raiſon celui de $\sqrt{-1}$, eſt imaginaire. Mais en adoptant le ſentiment de Mr. Leibniz on ſe jette dans les difficultés & contradictions ſusmentionnées. Car ſi $l-1$ étoit imaginaire, ſon double c. à d. le logarithme de $(-1)^2 = +1$ le ſeroit auſſi, ce qui ne convient pas avec le premier principe de la doctrine des logarithmes, en vertu duquel on ſuppoſe $l+1 = 0$.

De quelque coté donc qu'on ſe tourne, ſoit qu'on embraſſe le ſentiment de M. Bernoulli, ou celui de M. Leibniz, on rencontre toujours de ſi grands obſtacles à maintenir ſon parti, qu'on ne ſe ſauroit mettre à l'abri des contradictions. Cependant il ſemble, que ſi l'un de ces deux ſentimens eſt faux, l'autre doit néceſſairement être vrai; & qu'il n'y a point de milieu à choiſir. Voilà donc une queſtion extrêmement importante, qui eſt, d'etablir la doctrine des logarithmes, de telle ſorte qu'elle ne ſoit plus aſſujettie à aucune contradiction.

Mais aprés avoir bien peſé les contradictions, qui ſe trouvent de part & d'autre, on ſera porté à croire, qu'une telle conciliation eſt une choſe tout à fait impoſſible; & les ennemis des Mathematiques ne manqueront pas d'en tirer des conſéquences fort facheuſes contre la certitude de cette ſcience. Car quand les Pyrrhoniens ont attaqué toutes les ſciences, on conviendra aiſément, qu'il s'en faut beaucoup, que les objections, qu'ils ont apportées contre aucune ſcience, approchent ſeulement, à l'egard de leur ſolidité, des objections que je viens d'expoſer contre la doctrine des logarithmes. Cependant je ferai voir ſi clairement, qu'il n'y reſtera plus le moindre doute, que cette doctrine eſt ſolidement établie, & que toutes les difficultés ſusmentionnées ne tirent leur origine, que d'une ſeule idée peu juſte: de ſorte que dès qu'on rectifiera cette idée, toutes ces difficultés & contradictions, quelque fortes qu'elles ayent pu paroître, s'evanouïront dabord, & alors toute cette doctrine des logarithmes ſe ſoutiendra ſi bien, qu'on ſera en état de réſoudre aiſément toutes les objections, qui ont paru irréſolubles auparavant. Sans ce developement, qui a pourtant

été

été inconnu jusqu'ici aux Mathematiciens, je ne ſai pas, de quel oeil on devroit enviſager la doctrine des logarithmes : d'un coté on devroit avouër, qu'elle eſt vraie & auſſi ſolidement établie qu'aucune autre partie de l'Analyſe ; or de l'autre coté on ne ſauroit disconvenir, que cette même doctrine ſeroit aſſujetie à des contradictions, auxquelles il ſeroit impoſſible de répondre. On ſeroit par conſéquent obligé d'avouër, que la Mathematique, & même l'Analyſe, renferme des myſtéres incomprehenſibles à nos eſprits. Enſuite ſi ces myſteres n'ont été tels qu'à cauſe d'une ſeule idée, qui n'étoit pas entierement exacte, on en tirera cette conſéquence fort importante, qu'il eſt extremement dangereux de juger des choſes, dont on ne ſe peut former que des idées imparfaites : or il eſt bien certain, que hormis les Mathematiques le nombre des idées diſtinctes & complettes eſt fort petit.

Denoüement des Difficultés précédentes.

Il faut d'abord avoüer, que ſi l'idée, que Mrs. Leibniz & Bernoulli ont attachée au terme de logarithme, & que tous les Mathematiciens ont eu jusqu'ici, étoit parfaitement juſte, il ſeroit abſolument impoſſible de délivrer la doctrine des logarithmes des contradictions, que je viens de propoſer. Or l'idée des logarithmes étant tirée de leur origine, dont nous avons une parfaite connoiſſance, comment ſeroit-il poſſible qu'elle fut défectueuſe ? Lorsqu'on dit que le logarithme d'un nombre propoſé eſt l'expoſant de la puiſſance d'un certain nombre pris à volonté, laquelle devient égale au nombre propoſé, il ſemble qu'il ne manque rien à la juſteſſe de cette idée. Cela eſt auſſi bien vrai ; mais on accompagne communément cette idée d'une circonſtance, qui ne lui convient point : c'eſt qu'on ſuppoſe ordinairement, presque ſans qu'on s'en apperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un ſeul logarithme ; & pour peu qu'on y réfléchiſſe, on trouvera que toutes les difficultés & contradictions, dont la doctrine des loga-

rithmes ſembloit embaraſſée, ne ſubſiſtent qu'entant qu'on ſuppoſe, qu'à chaque nombre ne répond qu'un ſeul logarithme. Je dis donc, pour faire diſparoitre toutes ces difficultés & contradictions, qu'en vertu même de la définition donnée il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes ; ce que je démontrerai dans le theoreme ſuivant.

Theoreme.

Il y a toujours une infinité de logarithmes, qui conviennent également à chaque nombre propoſé : ou, ſi y *marque le logarithme du nombre* x, *je dis que* y *renferme une infinité de valeurs differentes.*

DEMONSTRATION.

Je me bornerai ici aux logarithmes hyperboliques, puiſqu'on ſait que les logarithmes de toutes les autres eſpeces ſont à ceux-cy dans un rapport conſtant, ainſi quand le logarithme hyperbolique du nombre x eſt nommé $= y$, le logarithme tabulaire de ce même nombre ſera $= o,\ 4342944819.y$. Or le fondement des logarithmes hyperboliques eſt, que ſi ω ſignifie un nombre infiniment petit, le logarithme du nombre $1 + \omega$ ſera $= \omega$, ou que $l(1+\omega) = \omega$. De là il s'enſuit que $l(1+\omega)^2 = 2\omega$; $l(1+\omega)^3 = 3\omega$, & en général $l(1+\omega)^n = n\omega$. Mais puiſque ω eſt un nombre infiniment petit, il eſt evident, que le nombre $(1+\omega)^n$ ne ſauroit devenir égal à quelque nombre propoſé x, à moins que l'expoſant n ne ſoit un nombre infini. Soit donc n un nombre infiniment grand, & qu'on poſe $x = (1+\omega)^n$, & le logarithme de x, qui a été nommé $= y$, ſera $y = n\omega$. Donc pour exprimer y par x, la premiere formule donnant $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$ & $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$, cette valeur étant ſubſtituée pour ω dans l'autre formule produira $y = n.x^{\frac{1}{n}} - n = l\,x$. D'où il eſt clair que la valeur de la formule

formule $n x^{\frac{1}{n}} - n$ approchera d'autant plus du logarithme de x, plus le nombre n ſera pris grand; & ſi l'on met pour n un nombre infini, cette formule donnera la vraye valeur du logarithme de x. Or comme il eſt certain, que $x^{\frac{1}{2}}$ a deux valeurs differentes, $x^{\frac{1}{4}}$ trois, $x^{\frac{1}{8}}$ quatre, & ainſi de ſuite, il ſera également certain, que $x^{\frac{1}{n}}$ doit avoir une infinité de valeurs differentes, puisque n eſt un nombre infini. Par conſéquent cette infinité de valeurs differentes de $x^{\frac{1}{n}}$ produira auſſi une infinité de valeurs differentes pour $/x$, de ſorte que le nombre x doit avoir une infinité de logarithmes. C. Q. F. D.

De là il s'enſuit que le logarithme de $+1$ n'eſt pas ſeulement $= 0$, mais qu'il y a encore une infinité d'autres quantités, dont chacune eſt également le logarithme de $+1$. Cependant on comprend aiſément que tous ces autres logarithmes, hormis le premier 0 ſeront, des quantités imaginaires; de ſorte que dans le calcul on eſt en droit de ne regarder que 0 comme le logarithme de $+1$, tout de même que lorsqu'il s'agit de la racine cubique de 1, on ne ſe ſert que de 1, quoique ces quantités imaginaires $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ſoient également des racines cubiques de 1. Mais quand on veut comparer le logarithme de 1 avec les logarithmes de -1, ou de $\sqrt{-1}$, qui ſont tous, à ce que je ferai voir dans la ſuite, imaginaires, il faut conſidérer le logarithme de 1 dans toute ſon etenduë; & alors toutes les difficultés & contradictions rapportées cy-deſſus diſparoitront d'elles memes. Car ſoient α, β, γ δ, ε, ζ, &c. les logarithmes imaginaires de l'unité, qui lui répondent auſſi bien que 0, & on comprendra aiſément qu'il peut être $2/-1 = /+1$, quoique tous les logarithmes de -1 ſoient imaginaires: car pour ſatisfaire à l'equation $2/-1 = /+1$, il ſuffit que le double de tous les logarithmes de -1, ſe trouvent parmi les logarithmes imaginaires de $+1$. De même, puisque $4/\sqrt{-1} = /+1$,

chaque logarithme de $\sqrt{-1}$ multiplié par 4 ſe doit rencontrer dans la ſerie $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, &c. Ainſi les égalités $2l-1 = l+1$ & $4l\sqrt{-1} = l+1$, ſe peuvent maintenir, ſans qu'on ſoit obligé de ſoutenir qu'il ſoit ou $l-1 = 0$ ou $l\sqrt{-1} = 0$, comme M. Bernoulli a prétendu. Mais tout cela ſera mis dans tout ſon jour, quand je déterminerai actuellement tous les logarithmes de chaque nombre propoſé, ce qui ſera le ſujet des problemes ſuivans.

Probleme I.

Déterminer tous les logarithmes, qui répondent à un nombre affirmatif propoſé $+a$ *quelconque.*

SOLUTION.

Puiſque a eſt un nombre poſitif, il aura certainement un logarithme réel, qui ſe trouve par les régles aſſés connuës. Soit donc A ce logarithme réel du nombre a, & puiſque $a = 1.a$, il ſera $la = l1 + A$: ou bien chaque logarithme de l'unité étant ajouté à A donnera un logarithme du nombre propoſé a; & pour trouver tous ſes logarithmes, on n'a qu'à chercher tous les logarithmes de l'unité $+1$. Prenant donc y pour marquer un logarithme quelconque de $+1$, les valeurs de y doivent être tirées de l'équation du Theoreme en y mettant $x = 1$, & on aura cette équation $y = n\,1^{\frac{1}{n}} - n$, qui ſe change en $1 + \frac{y}{n} = 1^{\frac{1}{n}}$, & la délivrant des expoſans rompus, on aura $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = 1$, où n marque un nombre infini. Cette équation étant maintenant pour ainſi dire rationelle, chacune de ſes racines donnera une valeur convenable pour y, c'eſt à dire un logarithme de $+1$. Or pour trouver toutes les racines de cette équation, on ſait qu'il les faut tirer des facteurs de la formule $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1$, en ſuppoſant cha-

que

que facteur $= 0$. Mais en général il eſt demontré, que d'une telle formule $p^n - q^n$ un facteur quelconque eſt $p^2 - 2pq \text{ cof.} \frac{2\lambda\pi}{n} + q^2$, où λ marque un nombre entier quelconque & π l'angle de 180°, ou la moitié de la circonference d'un cercle dont le rayon $= 1$; de ſorte que donnant à λ ſucceſſivement toutes les valeurs poſſibles, qui ſont 0, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$, &c. on obtienne enfin tous les facteurs de la formule $p^n - q^n$. Et partant toutes les racines de l'équation $p^n - q^n = 0$ ſeront compriſes dans cette expreſſion générale $p = q (\text{cof} \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}. \text{ ſin.} \frac{2\lambda\pi}{n})$, qui ſe trouve en poſant $p^2 - 2pq \text{ cof} \frac{2\lambda\pi}{n} + qq = 0$. Donc toutes les racines de notre équation trouvée.

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0$$

poſant $p = 1 + \frac{y}{n}$ & $q = 1$ ſeront contenuës dans cette expreſſion générale

$$1 + \frac{y}{n} = \text{cof} \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}. \text{ ſin} \frac{2\lambda\pi}{n}.$$

Or puiſque n marque un nombre infini, l'arc $\frac{2\lambda\pi}{n}$ ſera infiniment petit; il ſera donc

$$\text{cof} \frac{2\lambda\pi}{n} = 1 \qquad \& \qquad \text{ſin} \frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n}$$

d'où il s'enſuit $1 + \frac{y}{n} = 1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$, & partant

$$y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}.$$

On n'a qu'a ſubſtituer maintenant pour λ ſucceſſivement toutes les valeurs

leurs déterminées qu'elle renferme, ſavoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. à l'infini; & tous les logarithmes de l'unité, ou toutes les valeurs poſſibles de $l\,1$ ſeront:

$0;\ \pm 2\pi\sqrt{-1};\ \pm 4\pi\sqrt{-1};\ \pm 6\pi\sqrt{-1};\ \pm 8\pi\sqrt{-1};$ &c.

Donc tous les logarithmes du nombre propoſé a, dont on ſait déjà le logarithme réel A, ſeront:

$A;\ A\pm 2\pi\sqrt{-1};\ A\pm 4\pi\sqrt{-1};\ A\pm 6\pi\sqrt{-1};\ A\pm 8\pi\sqrt{-1};$ &c.

C. Q. F. T.

De là il eſt clair, que chaque nombre poſitif n'a qu'un ſeul logarithme réél, & que tous ſes autres logarithmes infinis ſont imaginaires. Cependant tous ces logarithmes imaginaires joüiſſent de la meme propriété que le réel, & on s'en pourroit ſervir également dans le calcul en obſervant les memes régles. Car ſoient A, B, C, D &c. les logarithmes réels des nombres poſitifs $a, b, c, d,$ &c. de ſorte qu'il ſoit en général.

$la = A\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1};\ lb = B\pm 2\mu\pi\sqrt{-1};\ lc = C\pm 2\nu\pi\sqrt{-1}$ &c.

Maintenant ſoit $c = ab$, & on ſait qu'il ſera $C = A + B$: or prenant les logarithmes en général on verra auſſi, que la ſomme des logarithmes des facteurs a, b eſt toujours égale au logarithme du produit $ab = c$. Car on aura

$$la + lb = A + B \pm 2\zeta\pi\sqrt{-1}$$

mettant pour ζ un nombre quelconque entier, qui peut réſulter en ajoutant les termes $\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ & $\pm 2\mu\pi\sqrt{-1}$. Or il eſt clair que mettant $A + B = C$ cette expreſſion de $la + lb$ convient parfaitement avec celle-cy $lc = C \pm 2\nu\pi\sqrt{-1}$. Le même accord ſe trouvera auſſi dans la diviſion, l'élevation aux puiſſances, & l'extraction des racines, ou l'on fait uſage des logarithmes. Mais pour ce qui regarde l'extraction des racines, comme le nombre des racines eſt toujours égal à l'expoſant du ſigne radical, cette maniere d'exprimer les logarithmes généralement a cet avantage ſur la maniere ordi-

ordinaire, qu'elle nous découvre toutes les racines; au lieu que par la methode ordinaire on ne trouve dans chaque cas, qu'une racine, ſavoir la réelle & qui eſt en même tems poſitive : ce qu'on reconnoitra plus évidemment, lorsque j'aurai déterminé tous les logarithmes des nombres tant negatifs qu'imaginaires.

Probleme II.

Déterminer tous les logarithmes, qui répondent à un nombre negatif quelconque $-a$.

SOLUTION.

Puisque $-a = -1.a$, il ſera $l-a = la + l-1$, & prenant pour la le logarithme réel de a, on aura tous les logarithmes du nombre negatif $-a$, ſi l'on cherche tous les logarithmes de -1. Mais ayant vu, que mettant y pour le logarithme du nombre x en général, il eſt $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$, d'où l'on tire, $1 + \frac{y}{n} = x^{\frac{1}{n}}$ & partant $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0$. Donc y exprimera tous les logarithmes de -1 ſi l'on met $x = -1$, de ſorte que tous les logarithmes de -1 ſeront les racines de cette équation

$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0$, poſant le nombre n infiniment grand.

Or on ſait que de cette équation générale $p^n + q^n = 0$ toutes les racines ſe trouvent de la réſolution de cette formule $p^2 - 2pq \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} + q^2 = 0$, prenant pour λ ſucceſſivement tous les nombres entiers tant affirmatifs que negatifs : & partant on aura $p = q\left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm V-1.\ \text{ſin.} \frac{(2\lambda-1)\pi}{n}\right)$. Donc les racines de cette équation propoſée :

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n+1=0,$$

ſeront toutes compriſes dans cette formule générale :

$$1+\frac{y}{n}=\text{cof}\ \frac{(2\lambda-1)\pi}{n}\pm\sqrt{-1}.\ \text{ſin.}\frac{(2\lambda-1)\pi}{n},$$

laquelle à cauſe de $n=\infty$. ſe change en

$$y=\pm\ (2\lambda-1)\pi\ \sqrt{-1}.$$

Par conſéquent mettant pour λ ſucceſſivement toutes les valeurs, qui lui conviennent, tous les logarithmes de -1 ſeront:

$\pm\pi\sqrt{-1}$; $\pm 3\pi\sqrt{-1}$; $\pm 5\pi\sqrt{-1}$; $\pm 7\pi\sqrt{-1}$; $\pm 9\pi\sqrt{-1}$; &c.

Donc ſi nous poſons $l+a=A$, ou que A marque le logarithme réel du nombre poſitif $+a$, tous les logarithmes du nombre negatif $-a$ ſeront :

$A\pm\pi\sqrt{-1}$; $A\pm 3\pi\sqrt{-1}$; $A\pm 5\pi\sqrt{-1}$; $A\pm 7\pi\sqrt{-1}$; &c.

dont le nombre eſt infini. C. Q. F. T.

De là il eſt clair, que tous les logarithmes d'un nombre negatif quelconque, ſont imaginaires, & qu'il n'y a aucun nombre negatif, dont un de ſes logarithmes ſoit réel. Mr. Leibniz a eu donc raiſon de ſoutenir, que les logarithmes des nombres negatifs étoient imaginaires. Cependant puisque les nombres affirmatifs ont auſſi une infinité de logarithmes imaginaires, toutes les objections de M. Bernoulli contre ce ſentiment perdent leur force. Car quoiqu'il ſoit $l-1=\pm(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$ le logarithme de ſon quarré ſera $l(-1)^2=\pm 2(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$ expreſſion qui ſe trouve parmi les logarithmes de $+1$, de ſorte qu'il demeure vrai que $2l-1=l+1$, quoique nul des logarithmes de -1 ſe trouve parmi les logarithmes de $+1$. Soit A le logarithme réel du nombre poſitif $+a$, & que p marque en général tous les nombres pairs, & q tous les nombres impairs entiers : & ayant en général :

$$l+1=\pm p\pi\sqrt{-1}\quad\&\quad l-1=\pm q\pi\sqrt{-1}.$$

&

& $l+a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$ & $l-a = A \pm q\pi\sqrt{-1}$.

d'où l'on voit que $l(-a)^2 = 2l-a = 2A \pm 2q\pi\sqrt{-1}$. Or $2q$ étant $= p$, & $2A$ le logarithme réel de a^2, on voit que $2A \pm p\pi\sqrt{-1}$ eſt la formule générale des logarithmes de a^2; ainſi il eſt $l(-a)^2 = la^2$ ou bien $2l-a = 2l+a$, ſans qu'il ſoit $l-a = l+a$: ce qui ſeroit ſans doute contradictoire, ſi les nombres $+a$ & $-a$ n'avoient qu'un ſeul logarithme; car alors on auroit raiſon de conclure, qu'il fut $l-a = l+a$ s'il etoit $2l-a = 2l+a$. Mais dès qu'on tombe d'accord, que tant $-a$ que $+a$ ont une infinité de logarithmes, cette conſéquence, toute néceſſaire qu'elle fut auparavant, n'eſt plus juſte; puisque pour qu'il ſoit $2l-a = 2l+a$, il ſuffit, que les doubles de tous les logarithmes de $-a$ ſe rencontrent dans les logarithmes de $+aa$. Ce qui peut arriver, comme nous voyons, ſans qu'aucun des logarithmes de $-a$ ſoit égal à aucun des logarithmes de $+a$.

Il faut cependant avouër que toutes les valeurs de $2l-a$ ſont differentes des valeurs de $2l+a$, vu qu'il eſt:

$$2l+a = 2A \pm 2p\pi\sqrt{-1} \quad \& \quad 2l-a = 2A \pm 2q\pi\sqrt{-1},$$

où $2p$ marque un nombre pairement pair, & $2q$ un nombre impairement pair quelconque. Mais il faut remarquer que les logarithmes de $+a^2$, comme d'un nombre affirmatif dont le logarithme réel eſt $= 2A$, ſont compris dans cette formule générale $la^2 = 2A \pm p\pi\sqrt{-1}$, où p marque un nombre pair quelconque ſans en excepter zero. Cela remarqué il eſt clair, que toutes les valeurs de $2l-a$ ſont compriſes dans celles de la^2, auſſi bien que celles de $2l+a$. Ainſi quoiqu'on puiſſe dire que $2l-a = la^2$ & $2l+a = la^2$, prenant le ſigne de $=$ pour marquer, que les valeurs de $2l-a$ ou de $2l+a$ ſe rencontrent parmi les valeurs de la^2; on ne ſauroit dire à la verité qu'il ſoit $2l-a = 2l+a$. Néantmoins comme dans les formules $l+a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$ & $l-a = A \pm q\sqrt{-1}$ les nombres p & q ſont indéterminés, rien n'oblige qu'en doublant ces logarithmes on prenne pour p & q les mêmes nombres. Ainſi pour faire ces multi-

plications dans toute leur étenduë, que p, p', p'', p''' &c. marquent des nombres pairs quelconques égaux ou inégaux, & q, q', q'', q''', &c. des nombres impairs égaux ou inégaux entr'eux; ces duplications ſe feront de la maniere ſuivante:

$$\begin{array}{l|l} l+a = A \pm p\pi\sqrt{-1} & l-a = A \pm q\pi\sqrt{-1} \\ \underline{l+a = A \pm p'\pi\sqrt{-1}} & \underline{l-a = A \pm q'\pi\sqrt{-1}} \\ 2l+a = 2A \pm (p+p')\pi\sqrt{-1} & 2l-a = 2A \pm (q+q')\pi\sqrt{-1} \end{array}$$

Ici maintenant $p+p'$ marquant la ſomme de deux nombres pairs quelconques, & $q+q'$ la ſomme de deux nombres impairs quelconques, tant $p+p'$ que $q+q'$ marquera un nombre pair quelconque; & partant il ſera $p+p' = q+q'$, donc $2l-a = 2l+a$. Par conſéquent dans ce ſens on pourra ſoutenir qu'il eſt $2l-a = 2l+a$, ſans qu'il ſoit $l-a = l+a$. De même maniere il ſera

$$3l+a = 3A \pm (p+p'+p'')\pi\sqrt{-1} = 3A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^3$$
$$3l-a = 3A \pm (q+q'+q'')\pi\sqrt{-1} = 3A \pm q\pi\sqrt{-1} = l-a^3$$

car $p+p'+p''$ produit tous les nombres pairs, & convient par conſéquent avec p; pareillement $q+q'+q''$ produit tous les nombres impairs & convient avec q. Or puisque $q+q'+q''+q'''$ produit tous les nombres pairs, cette expreſſion ſera équivalente avec p: dont les quadruples ſeront:

$$4l+a = 4A \pm (p+p'+p''+p''')\pi\sqrt{-1} = 4A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^4$$
$$4l-a = 4A \pm (q+q'+q''+q''')\pi\sqrt{-1} = 4A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^4$$

Ainſi cette maniere de trouver les logarithmes des puiſſances tant de $+a$ que de $-a$ s'accorde parfaitement bien avec les principes connus tant des puiſſances que des logarithmes. & toutes les objections rapportées cy-deſſus n'ont plus aucune priſe ſur ces vérités demontrées. Le même accord s'obſervera auſſi dans les logarithmes des quantités imaginaires, que je m'en vai développer dans le problème ſuivant.

Proble-

Probleme III.

Déterminer tous les logarithmes d'une quantité imaginaire quelconque.

SOLUTION.

Il eſt démontré que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle ſoit, ſe réduit toujours à cette forme $a+bV-1$, où a & b ſont des quantités réelles. Je poſe maintenant $V(aa+bb) = c$, & $\frac{a}{V(aa+bb)}$ & $\frac{b}{V(aa+bb)}$ feront le coſinus & le ſinus d'un certain angle, qu'il ſera aiſé de trouver par les tables. Soit donc cet angle $= \Phi$, qui marque en même tems la quantité de l'arc de cercle, qui eſt ſa meſure, le ſinus total étant poſé $= 1$. On aura donc $a = c \cdot \text{cof}\,\Phi$ & $b = c \cdot \text{ſin}\,\Phi$; & la formule imaginaire, dont il faut chercher tous les logarithmes, ſera

$$a+bV-1 = c\,(\text{cof}\,\Phi+V-1.\text{ſin}\,\Phi)$$

ou, puiſque c eſt un nombre affirmatif, ſoit C ſon logarithme réel, & on aura:

$$l(a+bV-1) = C + l(\text{cof}\,\Phi+V-1.\text{ſin}\,\Phi)$$

Il s'agit donc de chercher tous les logarithmes de la quantité imaginaire $\text{cof}\,\Phi+V-1.\text{ſin}\,\Phi$, laquelle étant miſe pour x, ſes logarithmes ſeront les valeurs de y tirées de cette équation $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - x = 0$, n marquant un nombre infini. Mais pour pouvoir comparer cette équation avec la forme générale $/^n - q^n = 0$, je remarque que $x = \text{cof}\,\Phi + V-1.\text{ſin}\,\Phi = \left(1+\frac{\Phi V-1}{n}\right)^n$, dont la vérité eſt ſuffiſamment prouvée ailleurs. Car on ſait que

$$\text{cof}\,\Phi = 1 - \frac{\Phi^2}{1.2.} + \frac{\Phi^4}{1.2.3.4.} - \frac{\Phi^6}{1.2.3.4.5.6.} + \&c.$$

$$\& \text{ fin } \Phi = \Phi - \frac{\Phi^3}{1.2.3.} + \frac{\Phi^5}{1.2.3.4.5.} - \&c.$$

Or puisque n eſt un nombre infini, il ſera:

$$\left(1 + \frac{\Phi V-1}{n}\right)^n = 1 + \frac{\Phi V-1}{1} - \frac{\Phi^2}{1.2} - \frac{\Phi^3 V-1}{1.2.3} + \frac{\Phi^4}{1.2.3.4} + \frac{\Phi^5 V-1}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

d'où il eſt clair que $\left(1 + \frac{\Phi V-1}{n}\right)^n = \text{cof } \Phi + V-1 . \text{ fin } \Phi$. Nous aurons donc $p = 1 + \frac{y}{n}$ & $q = \frac{1+\Phi V-1}{n}$, pour l'équation à reſoudre $p^n - q^n = 0$. Mais ayant vu déjà que chacune des racines de cette équation eſt contenuë dans cette formule générale $p = q\left(\text{cof } \frac{2\lambda\pi}{n} \pm V-1 . \text{ fin } \frac{2\lambda\pi}{n}\right)$, prenant pour λ tous les nombres entiers, ou affirmatifs ou negatifs, il ſera pour notre cas:

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\Phi V-1}{n}\right)\left(\text{cof } \frac{2\lambda\pi}{n} \pm V-1 . \text{ fin } \frac{2\lambda\pi}{n}\right)$$

& parce que à cauſe du nombre n infini il eſt $\text{cof } \frac{2\lambda\pi}{n} = 1$ & $\text{fin } \frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n}$, il ſera $1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\Phi V-1}{n}\right)\left(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n} V-1\right)$; ce qui donne $y = \Phi V - 1 \pm 2\lambda\pi V - 1$: d'où tous les logarithmes de la formule $\text{cof } \Phi + \text{fin } \Phi . V - 1$ ſeront:

$\Phi V-1$; $(\Phi \pm 2\pi) V-1$; $(\Phi \pm 4\pi) V-1$; $(\Phi \pm 6\pi) V-1$; &c.

& les logarithmes de la formule imaginaire $a \pm b V - 1$, poſant $c = V(aa+bb)$, & $\text{tang } \Phi = \frac{b}{a}$, ou $\text{cof } \Phi = \frac{a}{c}$ & $\text{fin } \Phi = \frac{b}{c}$, & de plus $lc = C$, ſeront:

$C+\Phi V-1$; $C+(\Phi \pm 2\pi) V-1$; $C+(\Phi \pm 4\pi) V-1$; $C+(\Phi \pm 6\pi) V-1$; &c.

C. Q. F. T.

Delà

De là il eſt clair, que tous les logarithmes d'une quantité imaginaire ſont auſſi imaginaires; car, lorsque ou $\Phi = 0$, ou $\Phi = \pm 2\lambda\pi$, qui ſont les cas où quelcun de ces logarithmes pourroit devenir réel, cela ne peut arriver, que lorsque tang $\Phi = \frac{b}{a} = 0$; il ſeroit donc $b = 0$, & la quantité $a + b\sqrt{1}$ ceſſeroit d'être imaginaire. Donc, ſi l'on prend p pour ſignifier chaque nombre pair, ou affirmatif ou negatif, tous les logarithmes de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ ſeront renfermés dans cette formule générale $C + (\Phi + p\pi)\sqrt{-1}$, où C eſt le logarithme réel de la quantité affirmative $\sqrt{(aa+bb)} = c$, & l'arc ou l'angle Φ eſt pris tel, qu'il eſt ſin $\Phi = \frac{b}{c}$ & cof $\Phi = \frac{a}{c}$. Or puisqu'il y a une infinité d'angles, qui conviennent au meme ſinus $\frac{b}{c}$ & coſinus $\frac{a}{c}$, qui ſont tous compris dans la formule $\Phi + p\pi$, on pourroit omettre le terme $p\pi$, & dire que le logarithme de $a + b\sqrt{-1}$ eſt en général $= C + \Phi\sqrt{-1}$; puisque cet angle Φ renferme déjà tous ces angles. Cependant ſi l'on prend pour Φ le plus petit angle affirmatif, qui répond au ſinus $\frac{b}{c}$ & au coſinus $\frac{a}{c}$; la formule générale des logarithmes de $a + b\sqrt{-1}$ ſera $= C + (\Phi + p\pi)\sqrt{-1}$.

Si l'angle Φ eſt tel, qu'il tient une raiſon commenſurable avec π ou la circonference du cercle, ce ſera toujours une marque, qu'une certaine puiſſance de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ devient réelle. Car ſoit $\Phi = \frac{\mu}{\nu}\pi$, & puisqu'il eſt $l(a+b\sqrt{-1}) = C + \left(\frac{\mu}{\nu}\pi + p\pi\right)\sqrt{-1}$: il ſera

$$l(a+b\sqrt{-1})^{\nu} = \nu C + (\mu + \nu p)\pi\sqrt{-1}.$$

d'où l'on voit que ſi $\mu + \nu p$ eſt un nombre pair, ou ſeulement μ pair, la puiſ-

ſance

ance $(a+b\sqrt{-1})^{\nu}$ ſera un nombre réel affirmatif, & même $= c^{\nu} = \left(\sqrt{(aa+bb)}\right)^{\nu}$: or ſi $\mu+\nu\rho$, ou ſeulement μ eſt un nombre impair, la puiſſance $(a+b\sqrt{-1})^{\nu}$ ſera un nombre negatif $= -c^{\nu}$.

Jusqu'ici on auroit pu croire, qu'il ſeroit indifferent de donner à π quelque valeur que ce ſoit, puisqu'il ne paroiſſoit rien; ni dans les logarithmes des nombres affirmatifs $l+a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$, ni dans ceux des nombres negatifs $l-a = A \pm q\pi\sqrt{-1}$, d'où nous puiſſions comprendre, pourquoi la lettre π dût plutôt marquer la demi-circonference d'un cercle décrit du rayon $= 1$, que tout autre nombre. Mais à préſent, où il s'agit des logarithmes des nombres imaginaires, la raiſon en devient évidente; puisqu'il faut comparer l'angle Φ à π, de ſorte que ſi l'on donnoit à π toute autre valeur que celle de deux angles droits, les formules deviendroient fauſſes, & ne ſeroient plus d'accord avec celles, que nous avons trouvées pour les nombres affirmatifs & negatifs.

Pour faire voir cela plus clairement, ſuppoſons $c = 1$ & $C = 0$, pour avoir cette formule $\cos\Phi + \sqrt{-1}.\sin\Phi$, dont tous les logarithmes ſeront renfermés dans cette formule générale

$$l(\cos\Phi + \sqrt{-1}.\sin\Phi) = (\Phi + p\pi)\sqrt{-1}$$

p marquant un nombre entier pair quelconque, ſoit affirmatif, ſoit negatif, ou même zero.

De la nous tirerons premiérement d'abord les formules ſupérieures pour les logarithmes des nombres réels affirmatifs ou negatifs. Car ſoit $\Phi = 0$, & à cauſe de $\cos\Phi = 1$ & $\sin\Phi = 0$, il ſera $l+1 = p\pi\sqrt{-1}$, ou bien en détaillant

$l+1 = 0; \pm 2\pi\sqrt{-1}; \pm 4\pi\sqrt{-1}; \pm 6\pi\sqrt{-1}; \pm 8\pi\sqrt{-1}$; &c.

or mettant $\Phi = \pi = 180$, à cauſe de $\cos\Phi = -1$ & $\sin\Phi = 0$, il ſera $l-1 = (1+p)\pi\sqrt{-1} = q\pi\sqrt{-1}$, prenant q pour marquer un nombre impair quelconque. On aura donc:

$l-1 = \pm\pi\sqrt{-1}; \pm 3\pi\sqrt{-1}; \pm 5\pi\sqrt{-1}; \pm 7\pi\sqrt{-1}$; &c.

Deve-

Développons maintenant auſſi les cas les plus ſimples des nombres imaginaires, & ſoit:

1. $\Phi = 90° = \frac{1}{2}\pi$, & à cauſe de $\cos\Phi = 0$ & $\sin\Phi = +1$, il ſera $l + V-1 = (\frac{1}{2} + p)\pi V - 1$; donc tous les logarithmes de $+V-1$ ſeront:

$\frac{1}{2}\pi V-1$; $\frac{5}{2}\pi V-1$; $\frac{9}{2}\pi V-1$; $\frac{13}{2}\pi V-1$; $\frac{17}{2}\pi V-1$; &c.
$-\frac{3}{2}\pi V-1$; $-\frac{7}{2}\pi V-1$; $-\frac{11}{2}\pi V-1$; $-\frac{15}{2}\pi V-1$; $-\frac{19}{2}\pi V-1$; &c.

Ajoutant ici deux valeurs quelconques enſemble pour avoir le logarithme de $l(+V-1)^2$, c'eſt à dire de $l-1$, on trouvera ou $\pm\pi V-1$, ou $\pm 3\pi V-1$; ou $\pm 5\pi V-1$; &c. qui ſont tous des logarithmes de -1.

2. Soit $\Phi = 270° = \frac{3}{2}\pi$, & à cauſe de $\cos\Phi = 0$ & $\sin\Phi = -1$ il ſera $l - V-1 = (-\frac{1}{2} + p)\pi V - 1$; donc tous les logarithmes de $-V-1$ ſeront contenus dans les expreſſions ſuivantes:

$+\frac{3}{2}\pi V-1$; $+\frac{7}{2}\pi V-1$; $+\frac{11}{2}\pi V-1$; $+\frac{15}{2}\pi V-1$; $+\frac{19}{2}\pi V-1$; &c.
$-\frac{1}{2}\pi V-1$; $-\frac{5}{2}\pi V-1$; $-\frac{9}{2}\pi V-1$; $-\frac{13}{2}\pi V-1$; $-\frac{17}{2}\pi V-1$; &c.

où il eſt clair comme auparavant, que deux valeurs quelconques étant ajoutées enſemble donnent $q\pi V-1$, poſant q pour un nombre impair quelconque; ce qui eſt le logarithme -1 ou de $(-V-1)^2$. De plus ſi l'on ajoute un logarithme quelconque de $-V-1$ à un logarithme quelconque de $+V-1$, pour avoir un logarithme du produit $(+V-1).(-V-1)$, qui eſt $= +1$, on ne trouvera en effet que des logarithmes de $+1$. Et il eſt clair de même qu'il ſera:

$l(+V-1) - l(-V-1) = l-1$ ou $l(-V-1) - l(+V-1) = l-1$

tout comme la nature de ces expreſſions exige.

3. Soit $\Phi = 60° = \frac{1}{3}\pi$ ou $\cos\Phi = \frac{1}{2}$ & $\sin\Phi = \frac{V3}{2}$; on trouvera $l\frac{1+V-3}{2} = (\frac{1}{3} + p)\pi V - 1$, de ſorte que tous les lo-

garithmes de cette expreſſion imaginaire $\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}$ ſeront:

$+\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{7}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{13}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{19}{3}\pi\sqrt{-1}$; $\frac{25}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

$-\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{23}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{29}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

où il eſt clair, que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutées enſemble produiſent $q\,\pi\sqrt{-1}$, ou quelcun des logarithmes de -1, puisque $\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1$.

4. Soit $\Phi = 120° = \frac{2}{3}\pi$ ou $\cos\Phi = -\frac{1}{2}$ & $\sin\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; & l'on trouvera $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = (\frac{2}{3}+p)\,\pi\sqrt{-1}$. Ainſi tous les logarithmes de la formule imaginaire $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ſeront:

$+\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{26}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

$-\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{22}{3}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{28}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

& puisque $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1$, on verra qu'on obtient effectivement les logarithmes de $+1$ en ajoutant enſemble trois quelconques de ces logarithmes.

5. Soit $\Phi = 240° = \frac{4}{3}\pi$, ou $\cos\Phi = -\frac{1}{2}$ & $\sin\Phi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, & l'on aura $l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = (\frac{4}{3}+p)\,\pi\sqrt{-1}$, de ſorte que tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ſeront:

$+\frac{3}{4}\pi$

$+\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{22}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{28}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

$-\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{8}{3}\sqrt{\pi}-1; -\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1}: -\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1}: -\frac{26}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

d'où l'on tirera comme auparavant, en ajoutant trois quelconques de ces logarithmes enſemble, quelcun des logarithmes de $+1$, puisqu'il eſt $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1$. De même deux de ces logarithmes quelconques ajoutés enſemble produiront un logarithme de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; car il eſt $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Et puisqu'il eſt réciproquement $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, on verra auſſi, que la ſomme de deux logarithmes quelconques de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ produit un logarithme de $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

6. Soit $\Phi = 300° = \frac{5}{3}\pi$ ou $\cos\Phi = \frac{1}{2}$ & $\sin = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; & l'on aura $l\frac{1-\sqrt{-3}}{2} = (\frac{5}{3}+p)\pi\sqrt{-1}$. Par conſéquent les logarithmes de cette formule $\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}$ ſeront

$+\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{23}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{29}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

$-\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{7}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{13}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{19}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{25}{3}\pi\sqrt{-1}$; &c.

Où il eſt évident, que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutés enſemble donnent un logarithme de -1, conformément à ce qu'il eſt $\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1$. Et en général on verra toujours, que tou-

tes les operations, qu'on fera avec ces logarithmes, font parfaitement d'accord avec les opérations rélatives faites avec les nombres, qui leur conviennent; de sorte qu'on ne rencontrera plus le moindre inconvenient à l'egard des opérations en logarithmes, & de celles qui leur répondent en nombres.

7. Soit $\varphi = 45° = \frac{1}{4}\pi$ ou $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; & l'on aura $l\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{4}+p)\pi\sqrt{-1}$. Ainsi tous les logarithmes de cette expression imaginaire $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ feront.

$+\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{9}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{17}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{25}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{33}{4}\pi\sqrt{-1}$; &c.
$-\frac{7}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{15}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{23}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{31}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{39}{4}\pi\sqrt{-1}$; &c.

8. Soit $\varphi = 135° = \frac{3}{4}\pi$; ou $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ & $\sin\varphi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$; & l'on aura $l\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{3}{4}+p)\pi\sqrt{-1}$. Et partant tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ feront:

$+\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{11}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{19}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{27}{4}\pi\sqrt{-1}$; $+\frac{35}{4}\pi\sqrt{-1}$; &c.
$-\frac{5}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{13}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{21}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{29}{4}\pi\sqrt{-1}$; $-\frac{37}{4}\pi\sqrt{-1}$; &c.

Chacun de ces logarithmes étant ajouté à quelcun des précedens de $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ produit un logarithme de la forme $q\pi\sqrt{-1}$ ou de -1, tout comme il faut, puisque $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = -1$

9. Soit $\varphi = 225° = \frac{5}{4}\pi$ ou $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ & $\sin\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; & l'on

aura

aura $l\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{5}{4}+p)\pi\sqrt{-1}$. Donc tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront:

$$+\tfrac{5}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{13}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{21}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{29}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$
$$-\tfrac{3}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{11}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{19}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{27}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

qui sont les negatifs des précedens; ce qui est aussi parfaitement bien d'accord avec les opérations analytiques, puisqu'il est $\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = 1 : \left(\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)$ & partant $l\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = -l\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$.

10. Soit $\Phi = 315° = \frac{7}{4}\pi$, ou $\cos\Phi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\sin\Phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où l'on aura $l\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{7}{4}+p)\pi\sqrt{-1}$. Par conséquent tous les logarithmes de cette formule $\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront:

$$+\tfrac{7}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{15}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{23}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{31}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$
$$-\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{9}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{17}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{25}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

Tous ces logarithmes des quatre derniers articles ont cette propriété que chacun multiplié par 4 produit un logarithme de -1, ce qui est conforme à la verité; puisque les quarré-quarrés de ces quatre formules:

$$\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}};\quad \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}};\quad \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}};\quad \frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

produisent le nombre -1.

Ces exemples suffisent pour faire voir, que l'idée des logarithmes que je viens d'établir est la véritable, & qu'elle est parfaitement d'accord

cord avec toutes les opérations, que la théorie des logarithmes renferme : de ſorte qu'on n'y rencontre plus aucune difficulté ; & que toutes les contradictions, auxquelles cette doctrine paroiſſoit aſſujettie, disparoiſſent entiérement. Par conſéquent la grande controverſe, qui partagea autrefois Mrs. Leibniz & Bernoulli, eſt à preſent parfaitement décidée, enſorte que ni l'un ni l'autre ne trouveroit plus le moindre ſujet de refuſer ſon conſentement.

La belle découverte de Mr. Bernoulli, de ramener la quadrature du cercle aux logarithmes imaginaires, ſe trouve auſſi non ſeulement parfaitement d'accord avec cette théorie, mais elle en eſt une ſuite néceſſaire, & eſt portée même par là a une infiniment plus grande étendue : puiſque nous voyons, que les logarithmes de tous les nombres, entant qu'ils ſont imaginaires, dépendent tous de la quadrature du cercle. Ainſi les logarithmes de $+1$ étant $\pm p\pi\sqrt{-1}$, il ſera $\frac{l+1}{\sqrt{-1}}$ toujours une quantité réelle, mais qui renferme une infinité de valeurs, à cauſe de l'infinité des logarithmes de $+1$. Conſéquemment à cela, ſi l'on poſe le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$, toutes les valeurs de cette expreſſion $\frac{l+1}{\sqrt{-1}}$ feront les ſuivantes :

$$0;\ \pm 2\pi;\ \pm 4\pi;\ \pm 6\pi;\ \pm 8\pi;\ \pm 10\pi;\ \&c.$$

De même les logarithmes de -1 étant diviſés par $\sqrt{-1}$ fourniront les quantités réelles ſuivantes, qui renferment également la quadrature du cercle. Car les valeurs de

$$\frac{l-1}{\sqrt{-1}} \text{ ſont } \pm\pi;\ \pm 3\pi;\ \pm 5\pi;\ \pm 7\pi;\ \pm 9\pi;\ \&c.$$

De la même maniere on verra, que les valeurs des expreſſions ſuivantes ſeront :

Les

Les valeurs de	feront celles-cy à l'infini
$\frac{l(+\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$	$+\frac{1}{2}\pi$; $+\frac{5}{2}\pi$; $+\frac{9}{2}\pi$; $+\frac{13}{2}\pi$; $+\frac{17}{2}\pi$; &c.
	$-\frac{3}{2}\pi$; $-\frac{7}{2}\pi$; $-\frac{11}{2}\pi$; $-\frac{15}{2}\pi$; $-\frac{19}{2}\pi$; &c.
$\frac{l(-\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$	$+\frac{3}{2}\pi$; $+\frac{7}{2}\pi$; $+\frac{11}{2}\pi$; $+\frac{15}{2}\pi$; $+\frac{19}{2}\pi$; &c.
	$-\frac{1}{2}\pi$; $-\frac{5}{2}\pi$; $-\frac{9}{2}\pi$; $-\frac{13}{2}\pi$; $-\frac{17}{2}\pi$; &c.

& on tirera également des autres exemples developés cy-deſſus de ſemblables expreſſions réelles, qui renfermeront toutes la quadrature du cercle.

J'ai déjà fait ſentir le bel accord de ces logarithmes avec l extraction des racines, ayant fait voir que les doubles tant des logarithmes de -1, que de $+1$, ſont contenus parmi les logarithmes de $+1$, puiſqu'il eſt $1 = (+1)^2 = (-1)^2$: de même puiſque il eſt

$$1 = (+1)^3 = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3$$

on verra, que les triples des logarithmes de $+1$, de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & de $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ſe trouvent parmi les logarithmes de $+1$. Mais je remarque ici de plus, comme 1 n'a que ces deux racines quarrées $+1$ & -1, ainſi ſi l'on range les doubles de tous les logarithmes tant de $+1$, que de -1 dans une ſuite, on obtiendra la ſerie complette de tous les logarithmes de $+1$; car:

$2l+1$ eſt 0; $\pm 4\pi\sqrt{-1}$; $\pm 8\pi\sqrt{-1}$; $\pm 12\pi\sqrt{-1}$; &c.

$2l-1$ eſt $\pm 2\pi\sqrt{-1}$; $\pm 6\pi\sqrt{-1}$; $\pm 10\pi\sqrt{-1}$; &c.

De la même maniere les trois racines cubiques de $+1$ étant $+1$; $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, ſi l'on range les triples de tous les loga-

logarithmes de ces trois racines dans une ſuite, il en réſultera la ſuite complette des logarithmes de $+1$, car:

$3l+1$ donne $0; \pm 6\pi\sqrt{-1}; \pm 12\pi\sqrt{-1}; \pm 18\pi\sqrt{-1}$ &c.

$3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\ldots +2\pi\sqrt{-1}; +8\pi\sqrt{-1}; +14\pi\sqrt{-1}$; &c.
$\quad -4\pi\sqrt{-1}; -10\pi\sqrt{-1}; -16\pi\sqrt{-1}$; &c.

$3l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\ldots +4\pi\sqrt{-1}; +10\pi\sqrt{-1}; +16\pi\sqrt{-1}$; &c.
$\quad -2\pi\sqrt{-1}; -8\pi\sqrt{-1}; -14\pi\sqrt{-1}$; &c.

Dans ces trois ſeries chaque logarithme de $+1$ ſe trouve, & aucun ne s'y rencontre qu'une ſeule fois; ce qui eſt une marque, que l'unité n'a que ces trois racines cubiques, & qu'il faut les trois enſemble pour épuiſer la nature de l'unité.

Il en eſt de même de toutes les autres racines de l'unité, & comme les racines quarré-quarrées de $+1$ ſont:

$$+1, \quad -1; \quad +\sqrt{-1}; \quad \& -\sqrt{-1}$$

on verra que les quadruples des logarithmes de chacune de ces racines ne donnent que la quatriéme partie des logarithmes de $+1$. Or tous ces quadruples de toutes les quatre racines enſemble, produiſent toute la ſuite des logarithmes de $+1$. Il eſt auſſi remarquable que tous les logarithmes d'une racine quelconque ſont differens des logarithmes de toute autre racine du même nom. Cependant quoique ces deux logarithmes $l+1$ & $l-1$ ſoient differens entr'eux, il eſt néanmoins $2l+1 = l+1$ & $2l-1 = l+1$, ſans qu'il ſoit $2l+1 = 2l-1$. De la même maniere ces trois logarithmes $l+1$; $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ſont differens entr'eux; cependant nonobſtant cette inégalité il eſt

$$2l+1 = l+1;\ 3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = l+1;\ \&\ 3l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = l+1.$$

Nous

Nous voyons donc qu'il eſt eſſentiel à la nature des logarithmes, que chaque nombre ait une infinité de logarithmes, & que tous ces logarithmes ſoient differens non ſeulement entr'eux, mais auſſi de tous les logarithmes de tout autre nombre. Il en eſt de même des logarithmes, que des angles, ou des arcs de cercle; car, comme à chaque ſinus & coſinus répond une infinité d'arcs differens, ainſi à chaque nombre convient une infinité de logarithmes differens. Mais il faut ici remarquer une grande difference, qui eſt, que tous les arcs, qui répondent au même ſinus & coſinus ſont réels, au lieu que tous les logarithmes du même nombre ſont imaginaires à la reſerve d'un ſeul, lorsque le nombre donné eſt poſitif; car tous les logarithmes des nombres, tant negatifs qu'imaginaires, ſont ſans aucune exception imaginaires. Or comme à un arc donné ne convient qu'un ſeul ſinus & coſinus, ainſi à un logarithme propoſé ne répond qu'un ſeul nombre; de ſorte que c'eſt un probleme, qui n'admet qu'une ſeule ſolution, lorsqu'on demande le nombre, qui convient à un logarithme propoſé.

Probleme IV.

Un logarithme quelconque étant propoſé, trouver le nombre qui lui répond.

SOLUTION.

Poſons premiérement que le logarithme propoſé ſoit une quantité réelle $= f$, & on ſait que poſant le nombre $= e$, dont le logarithme réel $= 1$, le nombre qui répond au logarithme f ſera $= e^f$.

En ſecond lieu, ſoit le logarithme propoſé $= g\sqrt{-1}$ ou ſimplement imaginaire, & ſoit x le nombre qui lui répond. Puisque g eſt un nombre réel, qu'on le compare avec π, & qu'il ſoit $g = m\pi$, & il eſt clair, ſi m eſt un nombre entier ou pair ou impair, le nombre x ſera ou $+1$ ou -1. Mais pour tout autre cas quelconque le nombre x ſera imaginaire, & pour le trouver on n'a qu'à prendre un arc de cercle

$= g$, le rayon étant $= 1$ & ayant cherché ſon ſinus & coſinus, le nombre cherché ſera $x = \text{cof}\, g + \sqrt{-1}.\ \text{ſin}\, g$.

En troiſieme lieu, ſoit le logarithme propoſé une quantité imaginaire quelconque $= f + g\sqrt{-1}$, puiſqu'on ſait que toute quantité imaginaire ſe peut réduire à cette forme $f + g\sqrt{-1}$; en ſorte que f & g ſoient des nombres réels. Cela poſé, il eſt clair que le nombre cherché x ſera le produit de deux nombres, dont l'un aura pour logarithme f & l'autre $g\sqrt{-1}$. Par conſéquent le nombre qui répond au logarithme $f + g\sqrt{-1}$ ſera $= e^f\ (\text{cof}\, g + \sqrt{-1}.\ \text{ſin}\, g)$. C.Q.F.T.

On voit donc que le nombre, qui répond au logarithme propoſé $f + g\sqrt{-1}$ ſera réel, lorſque ſin $g = 0$, c'eſt à dire, lorſque $g = m\pi$, le coëfficient m étant un nombre entier quelconque, ou affirmatif ou negatif. Dans ce cas on voit de plus, que ſi m eſt un nombre pair, à cauſe de $\text{cof}\, g = +1$, le nombre cherché ſera affirmatif, mais ſi m eſt un nombre impair, qu'a cauſe de $\text{cof}\, g = -1$, le nombre cherché ſera negatif $= -e^f$. Dans tous les autres cas, où m, c'eſt à dire $\frac{g}{\pi}$ ſera un nombre rompu, ou méme irrationel, le nombre qui répond à ce logarithme $f + g\sqrt{-1}$ ſera infailliblement imaginaire.

Par le moyen de cette régle on pourra auſſi ſe ſervir des logarithmes dans le calcul des nombres imaginaires. Pour en donner un exemple, qu'on cherche la valeur de cette expreſſion $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^4 \left(\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-1} = A$. Pour cet effet on n'a qu'à prendre un logarithme quelconque de chaque facteur, & en faire les opérations conformément aux régles généralement reçues en ſorte:

$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}$. Donc $4l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}$

$l\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}$; .... $3l\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\pi\sqrt{-1}$

$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}$; .... $2l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}$

& enfin $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$

Donc la fomme ou $lA = \frac{79}{12}\pi\sqrt{-1}$

Par conſequent le produit cherché ſera

$$A = \text{cof}\,\tfrac{79}{12}\pi + \sqrt{-1}.\ \text{ſin}\,\tfrac{79}{12}\pi \quad \text{ou bien}$$

$$A = \text{cof}\,\tfrac{7}{12}\pi + \sqrt{-1}.\ \text{ſin}\,\tfrac{7}{12}\pi$$

Je remarque encore que le logarithme propoſé étant $= f + g\sqrt{-1}$ le nombre répondant ſelon la régle commune ſe trouve $= e^{f+g\sqrt{-1}}$ Or cette expreſſion eſt tout à fait équivalente à celle que nous venons de trouver, Car on ſait d'ailleurs que $e^{g\sqrt{-1}} = \text{cof}\,g + \sqrt{-1}.\ \text{ſin}\,g$ & partant $e^{f+g\sqrt{-1}} = e^{f}.\ e^{g\sqrt{-1}} = e^{f}\ (\text{cof}\,g + \sqrt{-1}.\ \text{ſin}\,g)$: mais cette derniere expreſſion eſt plus commode que la premiére, ou les imaginaires entrent dans l'expoſant.

MEMOIRE

SUR LA VERITABLE RAISON DU DÉFAUT DE LA RÉGLE DE CARDAN DANS LE CAS IRRÉDUCTIBLE DES ÉQUATIONS DU III. DEGRÉ, ET DE SA BONTÉ DANS LES AUTRES,

PAR M. KOENIG.

Depuis que la Régle de *Tartalea*, communément attribuée à *Cardan*, eſt en uſage, les Analyſtes ſont étonnés des bizarreries, qui ſe manifeſtent dans ſon application : elle exprime la racine cherchée par une formule poſſible, dans le cas où l'équation renferme deux racines impoſſibles ; & au contraire elle la donne par une formule impoſſible, dans celui où toutes les racines ſont poſſibles & inégales ; laquelle redevient poſſible dans le cas d'égalité de deux racines. *Wallis* a voulu juſtifier la Régle, mais ſon ſentiment n'a pas fait fortune. *Newton* a entrepris d'alleguer la raiſon de ſon inſuffiſance, laquelle, quoique mauvaiſe a été répetée par pluſieurs Auteurs ; & perſonne que je ſache n'a été plus loin. Si une contrarieté inexplicable dans une ſcience deſtinée à expliquer les autres, a paru une étrange ſingularité, c'en ſera peut-être une autre également remarquable de ſavoir, que de ſimples conſidérations de Logique auroient pû conduire un Analyſte trés mediocre à réſoudre une difficulté, qui a pû tenir pendant deux ſiecles contre la ſagacité de tous les Analyſtes, & celle de Newton.

Toutes

Toutes les fois qu'une contradiction ſe manifeſte dans la concluſion, la Logique enſeigne, qu'il faut chercher ſon origine dans les prémiſſes c. a. d. dans les ſupoſitions dont elle découle. Et elle ordonne en conſéquence d'examiner ces ſupoſitions, en ſe ſervant des principes & des verités démontrées de la Science particuliere dont il eſt queſtion, pour conſtater ſi en effet elles ont, ou peuvent avoir la propriété qu'on leur attribue. Ces *notions directrices* ſont la bouſſole, qui peut nous conduire tout droit au point où nous tendons.

On ſçait que toutes les Equations du troiſiéme degré, délivrées du ſecond terme, ſont compriſes ſous les deux formes ſuivantes:

$$\text{A} \ldots x^3 \quad + qx \pm r = 0. \qquad \text{B} \ldots x^3 \quad - qx \pm r = 0.$$

Dans leſquelles le ſigne ſuperieur au dernier terme, donne les mêmes racines que le ſigne inférieur, excepté qu'elles ſont de dénomination contraire, la poſitive devenant negative, & les negatives poſitives. On peut ſe contenter de conſidérer ſeulement celles qui ont le ſigne — au dernier terme, ce qui dénote en vertu de la *Régle de la variation des ſignes*, une racine poſitive, & deux negatives: où la poſitive ſera la plus grande, puiſqu'en détruiſant la ſomme des deux negatives, elle fait évanouïr le ſecond terme.

II. On peut donner aux Equations telles que B, la forme ſuivante:

$$\text{C} \ldots x^3 \quad - 3aax \pm 2aac = 0.$$

qui eſt celle qu'on trouve pour la triſection de l'angle; où a deſigne le rayon, & c le ſinus de l'angle. Il ſuit donc que $a = \sqrt[2]{\frac{1}{3}q}$, & que $c = \frac{3r}{2q}$. Ceci ſupoſé il faut établir les limites de la plus grande racine de l'Equation B où C.

III. On remarquera auparavant que dans le cas que $c = a$, l'Equation C devient $x^3 - 3aax - 2a^3 = 0$, qui renferme deux racines égales, les trois racines étant $+2a, -a, -a$. Par conſéquent dans ce cas la plus grande racine $2a$ eſt égale à $\sqrt{\frac{4}{3}q}$.

IV. On ſçait auſſi que la forme A renferme toujours deux racines imaginaires, avec une réelle ; & que la forme B en renferme auſſi deux imaginaires avec une réelle, lorsque $\frac{1}{27} q^3 \prec \frac{1}{4} r^2$; mais qu'elle en renferme toujours trois réelles inégales toutes les fois que $\frac{1}{27} q^3 \succ \frac{1}{4} r^2$. Et par conſéquent en appliquant cette marque à la transformée C, on trouve qu'elle renferme deux imaginaires quand $c \succ a$; & trois réelles inégales quand $c \prec a$.

Propoſition I.

V. *Si deux grandeurs affirmatives quelconques* L & N, *ſubſtituées ſucceſſivement dans une équation* C, *produiſent deux valeurs, l'une affirmative, & l'autre negative : Il y aura une grandeur moyenne* M, *la ſubſtitution de laquelle pourra faire evanouïr l'équation propoſée.*

Démonſt. Toute grandeur indéterminée, telle qu'une équation en peut repréſenter une, ne ſçauroit de poſitive devenir negative, au moyen de la ſubſtitution de grandeurs poſitives, ſans paſſer ſucceſſivement par tous les degrés intermediaires, en conſéquence du *principe de continuité*, qu'on accorde au moins en Geometrie. Or le zero eſt intermédiaire entre l'affirmatif & le negatif ; donc les valeurs de l'équation pour paſſer par tous les degrés intermédiaires, doivent paſſer par celui de zero. Or puisque c'eſt au moyen des ſubſtitutions ſucceſſives de toutes les grandeurs affirmatives, qui ſe trouvent entre les deux extremes L & N, que l'équation paſſe d'une valeur poſitive à une autre negative, il faut qu'il y ait une moyenne M, qui puiſſe la faire paſſer par le zero, ou la faire évanouïr. *C. q. f. d.*

VI. *Coroll.* Il eſt clair que cette grandeur M, ſera une racine de l'Equation, & que L & N en ſeront les limites, c. a. d. la racine M. ſera $\prec$ L, & toujours $\succ$ N, en ſupoſant que L $\succ$ que N.

Propoſition II.

VII. *La plus grande racine de l'équation C, eſt toujours plus grande que* $\pm V \frac{1}{3} q$, *dans le cas que l'équation renferme deux imagi-*

naï-

ginaires. Et elle eſt toujours moindre que $\pm V \frac{1}{3} q$, *dans le cas de trois racines réelles & inegales.*

Demonſt. 1°. En faiſant dans la transformée C, x égal à $+\infty$ c. a. d. à l'infini poſitif, la valeur de l'équation C devient poſitive; & ſubſtituant enſuite au lieu de x de moindres grandeurs poſitives, ſa valeur continue à demeurer poſitive, jusques à ce qu'on parvient à ſubſtituer $2a$ à la place de x, où elle devient $2aa(a-c)$; ce qui dénote une valeur negative, a étant dans le cas de la prémiere hypotheſe $<$ que c (§. IV). Partant, la racine poſſible eſt contenuë entre les limites $+\infty$ & $+2a$, c. a. d. la plus grande racine eſt $>$ que $2a$, ou bien $> \pm V \frac{1}{3} q$. (§. II.)

2. En raiſonnant de méme pour l'autre cas, où a eſt toujours $>$ que c (§. IV.); puisque la ſubſtitution de $2a$ au lieu de x donne une valeur affirmative, à ſçavoir $2a^2(a-c)$ (Hyp. & §. IV), & celle de $aV3$, une valeur negative $2aa(-aV3+c)$; la plus grande racine eſt contenuë entre $2a$ & $aV3$, c. a. d. $2a$ ſurpaſſe toujours dans les cas de trois racines réelles & inégales la plus grande racine de l'Equation C; & par conſéquent elle eſt dans ce cas toujours moindre que $\pm V \frac{1}{3} q$. (§. II.)

Remarque. Les limites des deux autres racines negatives ſont, o $-V \frac{1}{3} q$, $-V q$. La plus petite eſt contenuë entre o & $-V \frac{1}{3} q$, & la plus grande entre $-V \frac{1}{3} q$ & $-V q$.

Voila à peu-prés les principes dont on a beſoin, & qu'on peut ſupoſer connus.

VIII. Quant à la Régle de Cardan, que nous voulons examiner, elle ordonne de faire l'inconnuë x égale à la ſomme de deux autres $z+u$, & de ſupoſer [aprés la ſubſtitution de $z+u$ à la place de x dans les Equations A & B diſpoſées ainſi $x^3 \mp qx + r = o$] la ſomme des deux produits, qui ſe trouvent dans le cube du premier terme, égale au troiſieme terme $\mp qx$: ſupoſition qui oblige d'égaler enſuite la ſomme des cubes de deux nouvelles inconnuës, qui reſtent d'un côté,

au

au dernier terme r, qui reſte de l'autre côté. On a donc les deux Equations ſuivantes.

I. $3z^2u + 3uz^2 = \mp q\ (z+u)$

II. $z^3 + u^3 = r.$

dont il ſuffit d'examiner la premiere, la ſeconde n'en étant qu'une ſuite. Or on tire de la 1ere $u = \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$. Par conſéquent pour réſoudre les équations de la forme A, la Régle de Cardan ſuppoſe, $x = z - \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$, & pour réſoudre celle de la forme B, $x = z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$. *Or les racines d'équations telles qu'* A & B *peuvent-elles bien être déſignées par les expreſſions* $z - \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$, $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$, *comme la Régle le ſupoſe?* Voilà le Problême que la Logique nous propoſe, & qu'il n'eſt pas difficile de réſoudre, en ſupoſant la verité de la propoſition ſuivante, qu'en cette matiere on peut recevoir comme un Axiome.

IX. *Axiome.* Si une ſupoſition conduit à une concluſion toujours poſſible, elle même l'eſt toujours. Et ſi elle conduit à une concluſion ſeulement poſſible dans de certaines limites, & impoſſible hors de là: elle-même n'eſt poſſible non plus que dans ces mêmes limites, & impoſſible hors de là.

Propoſition III.

X. *L'expreſſion,* $z - \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$, *peut déſigner toute grandeur réelle quelconque.*

Dem. Car ſoit x la grandeur réelle quelconque, qu'on ſupoſe que $z - \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$ puiſſe repreſenter. On aura $z - \frac{1}{3}.\frac{q}{z} = x$. Partant

tant $z = \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{(xx + \frac{4}{3}q)}$. Lequel radical étant poſſible toujours, quelque valeur réelle qu'on veüille aſſigner à x; il s'enſuit que $z - \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$ peut repréſenter toute grandeur réelle quelconque. (§. IX.) *C. q. f. d.*

Propoſition. IV.

XI. *L'expreſſion* $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$ *ne peut point dénoter toute grandeur réelle quelconque; elle ne ſçauroit denoter celles, qui ſont moindres que* $\pm\sqrt{\frac{4}{3}q}$.

Dem. Car ſoit x la grandeur réelle quelconque, qu'on ſupoſe que $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$ puiſſe dénoter; on aura $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z} = x$. Et partant $z = \frac{1}{2}(+x \pm \sqrt{(xx - \frac{4}{3}q)}$. Lequel radical devenant impoſſible auſſi-tôt que $xx <$ que $\frac{4}{3}q$; il eſt clair que $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$ ne ſçauroit dénoter les grandeurs moindres que $\pm\sqrt{\frac{4}{3}q}$ (§. IX). Partant la plus petite de toutes celles, que $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$, peut déſigner dans la Claſſe des affirmatives eſt $+\sqrt{\frac{4}{3}q}$, & dans la Claſſe des negatives $-\sqrt{\frac{4}{3}q}$. C. *q. f. d*

Ces principes ſupoſés, il n'eſt plus difficile de rendre raiſon des biſarreries, qui ſe rencontrent dans l'application de la Régle de Cardan Les trois propoſitions ſuivantes vont le faire voir.

Propoſition. V.

XII. *La ſupoſition de la Regle de Cardan, qui fait* $z - \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$ *égale à une des racines de l'Equation A, [laquelle ne manque jamais de renfermer deux racines imaginaires] eſt toujours poſſible par raport à la*

racine réelle de cette equation, & doit la faire trouver ſous une forme réelle.

Dém. La racine réelle de l'équation A, eſt une grandeur déterminée affirmative ou negative quelconque. Or $z - \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$ peut repréſenter toutes les grandeurs réelles, ſoit affirmatives ſoit negatives (§. X). Elle peut donc auſſi repréſenter la racine réelle de l'équation A. Et partant puisqu'en employant une Hypotheſe poſſible, la concluſion doit l'être auſſi (§. IX), la valeur de la racine qu'on en conclura, ne peut manquer d'avoir une forme réelle. C. *q. f. d.*

Propoſition VI.

XIII. *Pareillement, toutes les fois que l'équation* B *renferme auſſi deux racines imaginaires, la ſupoſition de la Régle, qui fait* $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z} = x$, *eſt encore poſſible par raport à la racine réelle de l'équation, & doit la faire trouver ſous une forme réelle. Mais lorsque les trois racines de l'équation* B *ſont réelles & mégales, cette ſupoſition devient impoſſible par raport à toutes les trois racines; & ſi on ne laiſſe pas d'en faire uſage, il eſt neceſſaire, qu'on trouve la racine cherchée, ſous une forme imaginaire.*

Dem. I. L'expreſſion $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$ peut déſigner toute grandeur qui ſurpaſſe $\pm V\frac{4}{3}q$ (§. XI.): mais dans le cas, où l'équation B renferme deux imaginaires, la raçine réelle de l'équation ſurpaſſe toujours $\pm V\frac{4}{3}q$ (§. VII). Donc $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$ peut la déſigner auſſi, & par conſéquent ſervir à la faire découvrir ſous une forme réelle. C. q. f. d. *en I. lieu.*

II. La

II. La même expreſſion $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$, ne peut repréſenter des grandeurs moindres que $\pm V \frac{4}{3} q$ (§. XI). Or dans le cas où l'équation B contient trois racines réelles & inégales, la plus grande racine eſt toujours $<$ que $\pm \frac{4}{3} q$ (§. VII); Donc $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$ ne ſçauroit la repréſenter. L'hypotheſe qui fait $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z} = x$, eſt donc impoſſible dans ce cas: & puisque toute Hypotheſe impoſſible employée, & pourſuivie conſtament, mene néceſſairement à une concluſion impoſſible; il s'enſuit que l'expreſſion de la racine ne ſçauroit manquer de paroitre ſous une forme imaginaire dans ce cas. C. q. f. d. *en II. lieu.*

Propoſition.

Enfin: Toutes les fois que deux racines de l'équation B *deviennent égales, la ſupoſition de* $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z} = x$ *devient poſſible par rapport à la plus grande de ces racines, & la formule de Cardan, qui exprime la racine, doit redevenir réelle dans ce cas.*

Dém. La moindre grandeur que $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$ peut repréſenter eſt $\pm V \frac{4}{3} q$ (§. XI). Or dans le cas de deux racines égales la plus grande racine devient juſtement egale à $\pm V \frac{4}{3} q$ (§. III). Elle peut donc être déſignée par $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$; par conſéquent l'hypotheſe étant poſſible, la derniere formule, que la Regle en déduit, doit redevenir poſſible dans ce cas, ou reprendre une forme réelle, en donnant la plus grande racine de l'équation propoſée, comme la ſeule que $z + \frac{1}{3}.\frac{q}{z}$ peut déſigner. C. q. f. d.

La difficulte qui a ſi longtems embaraſſé dans cette matiere, étant donc parfaitement levee, & ſe trouvant même avoir été fort petite; doit-on deſeſperer de la réſolution parfaite des Equations du III. degré, au moien de quelque ingénieuſe correction du défaut, qui ſe trouve dans la ſupoſition de la Regle de Cardan ?

Addition.

Sur quelques uſages remarquables de l'Expreſſion $z + \frac{\frac{1}{3}q}{z}$ *de la Régle de Cardan.*

Quand on ſubſtitue l'Expreſſion $z + \frac{\frac{1}{3}q}{z}$ à la place de x, dans l'Equation

$$C \ldots\ x^3 - 3rrx = 2rrc,$$

elle ſe change en celle-cy, (mettant rr au lieu d'un $\frac{1}{3}q$)

$$z^3 + \frac{r^6}{z^3} = 2rrc.$$

Or on peut remarquer que l'équation C eſt celle, qu'on trouve en cherchant *la relation entre la corde du complement de l'Arc ſimple* A, *& celle du complément de l'Arc triple* 3 A. Car nommant l'Arc ſimple A, & la corde de ſon complément x: item, l'Arc multiple nA & la corde de ſon complément $2c$, le diametre étant $2r$, on trouvera pour

La Corde

La Corde du Complément de l'Arc multiple. *

$$\left.\begin{array}{l}
0A = 2r \\
1A = x^1 \\
2A = x^2 - 2r^2 \\
3A = x^3 - 3r^2x^1 \\
4A = x^4 - 4r^2x^2 + 2r^4 \\
5A = x^5 - 5r^2x^3 + 5r^4x^1 \\
6A = x^6 - 6r^2x^4 + 9r^4x^2 - 2r^6 \\
7A = x^7 - 7r^2x^5 + 14r^4x^3 - 7r^6x^1 \\
8A = x^8 - 8r^2x^6 + 20r^4x^4 - 16r^6x^2 + 2r^8 \\
9A = x^9 - 9r^2x^7 + 27r^4x^5 - 30r^6x^3 + 9r^8x^1 \\
10A = x^{10} - 10r^2x^8 + \text{ \&c. \&c.} \\
\text{\&c. \&c.}
\end{array}\right\} 2cr^{n-1}$$

D'où je tire qu'en général la relation entre x, la corde du complément de l'arc ſimple A, & $2c$, celle du complément de l'arc multiple nA, eſt exprimée par l'équation ſuivante :

$$E\ldots x^n - \frac{n}{1} r^2 x^{n-2} + \frac{n.n-3}{1.\ 2} r^4 x^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5}{1.\ 2.\ 3} r^6 x^{n-6}$$

$$+ \frac{n.\ n-5.\ n-6.\ n-7}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4} r^8 x^{n-8}$$

$$- \frac{n.n-6.\ n-7.\ n-8.\ n-9}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5} r^{10} x^{n-10} + \text{ \&c.} = \pm 2c.\ r^{n-1}$$

Cecy ſuppoſé, ſi on ſubſtitue dans les équations cy-deſſus $z + \frac{r^2}{z}$ a la place de x, elles prendront toutes une même forme, en ſe réduiſant à trois termes. Car on trouvera

* *Voyez* par. ex. *le Marq. de l'Hopital Traite des Sect. Conic.* p. 415.

La Corde du complément de l'Arc multiple.

$$\left\{\begin{array}{l} 0\,A = 2r \\ 1\,A = z^1 + \frac{r^2}{z^1} \\ 2\,A = z^2 + \frac{r^2}{z^2} \\ 3\,A = z^3 + \frac{r^3}{z^3} \\ 4\,A = z^4 + \frac{r^4}{z^4} \\ 5\,A = z^5 + \frac{r^5}{z^5} \\ 6\,A = z^6 + \frac{r^6}{z^6} \\ \&c.\ \&c. \end{array}\right.$$

Et par conſéquent pour exprimer en général la rélation entre la corde du complément $z + \frac{r^2}{z}$, de l'arc ſimple A. & celle du complément de l'arc $n^{tuple} = 2c$, on a l'équation

$$F \ldots\ z^n + \frac{r^{2n}}{z^n} = \pm 2cr^{n-1}, \text{ ou bien}$$

$$G \ldots\ z^{2n} \mp 2cr^{n-1}z^n + r^{2n} = 0.$$

la réſolution de laquelle donne

$$z^n = \pm cr^{n-1} \pm \sqrt{r^{2n-2}(cc-rr)}, \text{ partant}$$

$$z = \sqrt[n]{(\pm cr^{n-1} \pm \sqrt{r^{2n-2}(cc-rr)})} = c.$$

par où l'on peut determiner la valeur de x.

Je conclus de cecy.

I. Que

1°. Que toute équation réductible à la générale E eſt réſoluble parfaitement au moien de l'expreſſion $z+\frac{r^2}{z}$ de la régle de Cardan toutes les fois que $c > r$: & qu'elle l'eſt de la même maniere que le ſont toutes les équations du IIIme degré à deux racines imaginaires; ces équations ne faiſant qu'un cas particulier compris dans la réſolution générale de l'équation E ou G, que nous venons de donner; par laquelle $x = c+\frac{r^2}{c}$, dans les cas où $c > r$.

2°. Que l'équation F ou G, puiſqu'elle eſt compoſée de facteurs ou racines $z+\frac{r^2}{z}-x$, $z+\frac{r^2}{z}-x^{I}$, $z+\frac{r^2}{z}-x^{II}$ &c. au nombre de n, où x, x^{I}, x^{II}, x^{III} &c. dénotent les doubles coſinus ou cordes des complémens des Arcs A, $A+\frac{2C}{n}$, $A+\frac{4C}{n}$, $A+\frac{6C}{n}$ &c. (2 C déſignant la circonference du cercle, & A l'arc dont le multiple nA a la corde du complément, ou le double coſinus $= 2c$); que l'équation F ou G, dis-je, eſt un produit des facteurs trinomiaux $zz-xz+rr$, $z^2-x^{I}z+rr$ &c. au nombre de n. Or, puiſqu'en faiſant (Fig. 1.) $co = z$, & nommant CA, r, & SP le coſinus ou la demi corde du complément de l'arc AB ou A, $\frac{1}{2}x$, on trouve $OB^2 = z^2+xz^{I}+r^2$, il ſuit que l'Equation G n'eſt autre choſe que le produit de tous les OB^2 ſemblables &c. Ce qui offre le Theoreme de *Cotes*. Car ſi on ſupoſe dans l'Equation G, $-c = -r$, hypoteſe qui emporte que la demi circonference C, eſt coupée en parties egales au nombre de n, & par conſéquent la circonference entiere en parties egales au nombre de $2n$; les x, x^{I}, x^{II}, x^{III} &c. dénoteront les doubles coſinus des Arcs A, 3 A, 5 A 7 A &c. en faiſant le tour de la circonference; à cauſe que dans ce cas $\frac{C}{n} = A$. Partant les produits $zz+xz+rr$, $zz+x^{I}z+rr$ &c. dénoteront

Fig. 2.

Fig. 3.

dénoteront les quarrés des droites impaires OB, OD, OF &c. Et extrayant la racine quarrée de part &d'autre, on aura

$$1 \ldots\ldots z^n - r^n = OB.\,OD.\,OH.\,OK.$$

De la méme maniere faiſant dans l'Equation G, $+c = +r$, ce qui emporte que la circonference entiere 2C eſt coupée en parties égales au nombre de n, les x, x', x'' &c. déſigneront les doubles Coſinus des Arcs 2A, 4A, 6A, 8A &c. à cauſe que dans ce cas A eſt $= o$, ou ſi l'on veut $= \frac{2C}{n}$; le coſinus de l'un & de l'autre étant $+r$. Partant

Fig. 3.

les produits trinomiaux $zz + xz + rr$ &c. dénotent les quarrés des droites paires OC, OE, OG &c. Par conſequent en extrayant la racine quarrée de part & d'autre on trouve

$$K.\ldots\ z^n + r^n = OC.\,OE.\ldots\,OA.$$

Multipliant donc les membres de ces deux équat. S & K les uns dans les autres, de part & d'autre, on aura

$$z^{2n} - r^{2n} = (OB.\,OC.\,OD.\ldots.OK.\,OA.)$$

3°. Et puiſque ce Theoreme de *Cotes* contient l'Analogie qui ſe trouve entre les meſures des raiſons & celles des angles, ou bien entre les logarithmes & les Arcs de cercle, l'expreſſion $z + \frac{r^2}{z}$ de la Régle de Cardan, peut ſervir à manifeſter l'origine de cette merveilleuſe correſpondance; matiere que nous aurons peut-être occaſion de traitter une autre fois.

RAPPORT

RAPPORT

DE QUELQUES OBSERVATIONS CELESTES FAITES à L'OBSERVATOIRE ROYAL,

PAR M. KIES.

Les Obſervations des Eclipſes ſont extrêmement utiles, ſurtout lorſqu'elles ſont exactes. Elles ſervent premièrement à faire connoitre, ſi les élémens de la Théorie du Soleil & de la Lune ſont bien ou mal établis dans les Tables aſtronomiques, & à les confirmer, ou bien à les réformer. Leur principal uſage eſt de ſervir à déterminer les longitudes géographiques des lieux où elles ont été faites, ou du moins les differences de leurs Meridiens; ce qui eſt la partie de la Géographie la plus difficile, & en même tems la plus importante. Mais les Eclipſes totales de Lune ont une grande préférence ſur les partiales de ce Satellite, parce que dans celles-ci la confuſion de l'ombre veritable de la Terre avec ſa pénombre ne nous permet pas de faire une Obſervation avec toute la préciſion requiſe, au lieu que dans celles-là, c'eſt à dire dans les totales, l'immerſion totale de la Lune dans l'ombre terreſtre & ſon émerſion n'eſt qu'inſtantanée, & peut être obſervée avec toute l'exactitude poſſible; de ſorte qu'un Obſervateur exercé peut toujours s'aſſurer de ces moments à quelques ſecondes prés. Ce ſont auſſi les deux points principaux dans les Eclipſes totales, à l'obſervation desquels il faut avoir toute l'attention poſſible. La derniere Eclipſe arrivée le 19. du mois paſſé étoit dans ce cas, & par conſéquent fort utile pour l'Aſtronomie. Voici les opérations, que j'ai

faites pour la bien obſerver. J'ai ſoigneuſement examiné le mouvement de la nouvelle pendule pendant trois jours de ſuite, tant par des hauteurs correſpondantes du Soleil, que par le paſſage du Soleil par la ligne Meridienne tracée à l'Obſervatoire,
Le Midi arriva à la Meridienne

1750. Juin.	18^j	0^h	52$'$	25$''$
	19	0	53	31½
	20	0	54	38

Le 19. j'ai pris des hauteurs du Soleil avant midi, mais les nuages ne me permettant pas de prendre toutes les correſpondantes aprés midi, j'en ai pourtant ſaiſi deux, & la concluſion du midi par elles ne differoit que d'une demi-ſeconde du midi obſervé à la Meridienne. Comme donc les tems que j'ai rapportés ſont les vrais, & que l'équation du tems pour ces trois jours étoit 1) 28$''$. 2) 41$''$. 3) 54$''$, nous aurons le midi

1750. Juin.	18^j	0^h	51$'$	57$''$ de tems moyen
	19	0	52	50½
	20	0	53	44

Par ces Obſervations il eſt évident, que la pendule avance par jour ſur le tems moyen du Soleil de 0$'$ 53$''$½

Après ces préparatifs neceſſaires, quand le tems de l'Eclipſe approcha, il y avoit fort peu d'eſperance de la bien obſerver, le Ciel étant trop chargé de vapeurs & couvert de nuages; ſurtout cette crainte fut redoublée par la conſidération du chemin que la Lune parcouroit alors, étant dans les ſignes auſtraux du Zodiaque, & par conſéquent ne s'elevant pas aſſez haut ſur l'Horiſon; comme cela arrive dans toutes les Eclipſes qui ſe font en Eté chez nous. Effectivement la Lune en ſe levant ne permettoit aucune obſervation qu'on en vouloit faire, quoiqu'elle parut déjà un peu eclipſée, quand elle perçoit quelquefois pour un moment les nuages; mais dans la ſuite, quand elle monta plus haut, je fus aſſez heureux pour ſaiſir les momens les

plus

plus importans & les plus utiles pour l'uſage aſtronomique. Le Ciel s'éclaircit peu à peu, & l'immerſion totale de la Lune dans l'ombre de la Terre pût être exactement obſervée; elle arriva

1750 Juin 19^{j} 10^{h} 6$^{\prime}$ 49$^{\prime\prime}$ à la pendule
& l'emerſion à 11 32 50
la fin de l'Eclipſe 12 40

& faiſant les corrections néceſſaires du tems à cauſe de l'accélération de la pendule ſur le tems moyen, & de celui-ci ſur le vrai de 19^{j} à 20 de Juin, nous aurons l'immerſion totale à 9^{h} 12$^{\prime}$ 48$^{\prime\prime}$ du tems vrai

l'emerſion à 10 38 0

la durée de la Lune dans l'ombre de la Terre

1^{h} 25$^{\prime}$ 12$^{\prime\prime}$

& la fin de l'Eclipſe à 11^{h} 46$^{\prime}$

Pendant le tems de l'obſcuration totale, la Lune ne diſparut qu'une fois pour un moment, & cette diſparition entiere étoit ſans doute cauſée par les nuages; hors ce cas la elle parut continuellement, & même d'une lumiere un peu plus forte que dans d'autres Eclipſes totales, dont les Aſtronomes nous ont laiſſé des deſcriptions exactes. Cette lumiere ſurpaſſoit encore conſidérablement celle qui couvre la partie obſcure de la Lune quelques jours aprés la nouvelle Lune.

SECONDE

Obſervation d'une Eclipſe partiale de Lune
1749. *Dec.* 23^{j}.

Pour l'obſcuration de cette Eclipſe j'ai pris les mêmes précautions, & j'ai corrigé la pendule par des hauteurs correſpondantes d'*Aldebaran*, aprés avoir exactement déterminé ſon paſſage par le Meridien, ou ſon lieu par l'*aberration* & la *nutation*. Comme le Ciel fut presque toujours couvert de nuages, il n'a pas été poſſible de bien obſerver les *appulſes* de l'ombre de la Terre aux parties du disque de la Lune, & on vit à peine le commencement arriver

1749 Dec. 23^{j} 7^{h} 41$^{\prime}\frac{1}{3}$ de tems vrai,

Mais la fin pût etre plus diſtinctement obſervée, & elle ſe fit à $10^h\ 13'\frac{1}{2}$ de tems vrai.

TROISIEME

Obſervation de l'Eclipſe de ☌ ♄ par la Lune l'an 1748. Sept. 23.

Aprés les mêmes corrections de la pendule dont je m'etois ſervi pour la premiere Eclipſe,
l'immerſion de ☌ ♄ arriva

1748 Sept. 23	à	8^h	$46'$	$55''$	de tems vrai
l'emerſion	—	9	56	34	
durée	—	1	9	39	

Pour tirer tout l'avantage poſſible de ces Obſervations, je les ai comparées avec le calcul fondé ſur les Tables aſtronomiques de *Flamſteed*; & comme l'obſervation des Eclipſes de Lune ne differe pas beaucoup du calcul, elle juſtifie en même tems l'exactitude de ces Tables, qui donnent le lieu de la Lune vrai dans les *Syzygies*; mais hors ces cas, c'eſt à dire, dans les *quadratures* & *octans* de la Lune, elles ſont encore fort défectueuſes. L'occultation de ☌ ♄ par la Lune nous en fournit un exemple manifeſte, & comme le calcul des Eclipſes de Soleil & des Etoiles fixes par la Lune eſt fort pénible & ennuyant par la répétition de la parallaxe de la Lune en longitude & latitude, je m'en vais donner ici une methode nouvelle de calculer avec facilité ces parallaxes. Les Aſtronomes rapportent tous les lieux des Aſtres à la route que le Soleil par ſon mouvement annuel paroit décrire entre les Etoiles fixes, & ils marquent de combien de degrés & de parties de degrés chaque Aſtre eſt éloigné de ce plan; cette diſtance de l'Aſtre à l'Ecliptique eſt appellée la latitude. La longitude d'une Etoile eſt ſa diſtance du point de l'Ecliptique où le dernier Equinoxe du Printems s'eſt fait; & de cette maniere le lieu de chaque Aſtre eſt exactement déterminé. On marque de cette façon le lieu des Planetes dans les Ephemerides pour le midi de chaque jour, en fixant leurs longitudes & la-

& latitudes ; & s'il y a un nouveau phenomene qui paroiſſe au Ciel, une Etoile fixe qu'on n'ait pas vû auparavant, ou une Comete, les Aſtronomes ſe donnent tous les ſoins poſſibles pour déterminer leurs lieux par rapport à l'Ecliptique.

Mais quand les Aſtronomes fixent la longitude & la latitude des Aſtres, ils ſouſentendent toujours celles que l'Aſtre auroit, ſi on le regardoit du centre de la Terre ; car comme la longitude & la latitude d'un Aſtre fort proche de la Terre pourroit être très differente, ſuivant qu'on le regarde d'un autre point de la ſurface de la Terre, on prend le centre de la Terre comme un point fixe, d'où l'on détermine le lieu des Aſtres par rapport à l'Ecliptique ; & ſuivant ce principe on a conſtruit des Tables aſtronomiques, par leſquelles on peut calculer la longitude & la latitude des Planetes, ſi on les regardoit du centre de la Terre. S'il paroit donc un nouveau phenomene au Ciel, les Aſtronomes déterminent ſon lieu obſervé au centre de la Terre ; car il eſt facile à concevoir, que le lieu d'un Aſtre qui n'eſt pas fort éloigné de la Terre, differe beaucoup, s'il eſt obſervé au centre ou à la ſurface de la Terre. La difference du lieu d'une Etoile obſervé à la ſurface & au centre de la Terre eſt nommée *parallaxe*, qu'on diſtingue en parallaxe de longitude, ou de latitude. La methode ordinaire de calculer ces parallaxes ſuppoſe toujours la parallaxe de hauteur de l'Aſtre ; mais comme ce calcul ſe fait par pluſieurs détours, parce qu'il faut chercher par la longitude & latitude de l'Aſtre ſon aſcenſion droite & ſa déclinaiſon, & par elles & la théorie du Soleil, ſa hauteur ſur l'horiſon, & à la fin ſa parallaxe en longitude & latitude, on pourra épargner beaucoup de peine, ſi l'on s'y prend de la manière ſuivante.

Qu'on détermine par la théorie du Soleil & de la Planete pour le tems propoſé la diſtance de la Planete à la Terre en demi-diametres de la Terre, qu'on cherche par là ſa parallaxe horiſontale, que je ſuppoſerai donc donnée, & que je nommerai α. Qu'on cherche après par la théorie du Soleil pour le tems & le lieu donnés, quel point de l'Ecliptique ſe leve ſur l'Horiſon, & l'angle que ce point fait avec l'Horiſon,

ou la hauteur du nonageſime; & enfin la longitude de l'Aſtre vu au centre de la terre étant donnée, on aura ſa vraie diſtance du nonageſime. *Voy. Planche I. Fig. IV.* Soit donc HOR l'Horiſon, ECL l'Ecliptique, C le nonageſime de l'Ecliptique, Z le zenith du lieu, M le pole de l'Ecliptique, s le lieu de la planete vuë au centre de la Terre, ou le lieu vrai, S le lieu apparent ſur la ſurface de la Terre; par conſéquent la parallaxe de la longitude ſera $=$ Tt, & celle de latitude $=$ Is. Comme donc les ſinus des parallaxes ſont proportionels aux coſinus des hauteurs de l'Aſtre, nous aurons, en mettant le ſinus total $=$ I

Ss $=$ α. ſin Zs, & dans le triangle rectiligne ISs

IS $=$ α. ſin Zs. ſin ZsM

Is $=$ IS. cotang ZsM, mais

$$\text{cotang. } Z\,s\,M = \frac{\text{ſin } M\,s - \text{coſ } Z\,M\,s.\ \text{coſ } M\,s.\ \text{tang. } Z\,M}{\text{ſin } Z\,M\,s.\ \text{tang. } Z\,M.}$$

donc Is $=$ α. coſ ZM. ſin Ms $-$ α coſ ZMs. coſ Ms. ſin ZM

ou Is $=$ α. coſ OC. coſ st $-$ α coſ ZMs. ſin st. ſin OC

Donc la parallaxe de la planete en longitude ſera $=$

$$\frac{\text{parallax. horiz.} \times \text{ſin. diſt. au nonag.} \times \text{ſin haut. du nonag.}}{\text{coſin. de la vraie latit. de la planete.}}$$

& la parallaxe en latitude $=$

$$\left(\frac{\text{cotang. lat.}}{\text{tang. haut. du non.}} - \text{coſ. diſt. au nonag.}\right)\left(\begin{array}{l}\text{parall. hor.} + \text{ſin haut. du}\\ \text{non.} + \text{ſin de la latit. vraie}\end{array}\right)$$

Poſons st $=$ o, c'eſt à dire, l'Aſtre dans l'Ecliptique, & ſin. st ſera $=$ o donc la parallaxe de la Planete en latitude ſera $=$ α. coſ OC, & la parallaxe de la Planete en longitude $=$ $\frac{\alpha.\ \text{ſin } Z\,M\,s.\ \text{ſin } O\,C}{\text{coſin } st}$ & comme dans ce cas coſ st $=$ 1, on aura Ts $=$ α. ſin ZMs. ſin OC.

Mettons ZMs $=$ 90° au cas où la Planete eſt à l'Horiſon, la parallaxe de la Planete en longitude dépendra de l'angle que le point de l'Ecliptique ſe levant fait avec l'Horiſon, & de la latitude de la Planete; & d'au-

& d'autant plus grands que ſeront ces deux arcs, d'autant plus grande ſera la parallaxe de la Planete en longitude. Comme cet angle que je viens de nommer, croit continuellement quand la Planete ſe meut dans les ſignes Boréaux du Zodiaque, & devient le plus grand quand la Planete eſt au commencement du ſigne de la Balance, la parallaxe de la longitude dépend beaucoup du mouvement de la Planete dans les ſignes du Zodiaque.

Si $ZM\gamma = 0$ au cas où l'Aſtre eſt dans le nonageſime même de l'Ecliptique, que ſa latitude evanouïſſe ou non, la parallaxe de la longitude ſera $= 0$.

Si $ZM\gamma = 90°$ & $OC = 90°$, la parallaxe de la Planete en longitude eſt la plus grande qui ſoit poſſible; c'eſt un cas qui ne peut arriver qu'aux endroits dont la latitude eſt égale à l'Obliquité de l'Ecliptique, & la parallaxe de la Planete en latitude ſera infiniment petite aux mêmes lieux, ſi $ZM\gamma = 90°$, c'eſt à dire, quand le vertical qui paſſe par la Planete ſe confond avec l'Ecliptique.

Si le vertical dans quelque endroit qui paſſe par la planete fait un angle droit à l'Ecliptique, la parallaxe de la longitude ſera infiniment petite, & l'effet de la parallaxe n'affectera que la latitude; car en poſant $OC = 0$, il ſera $T\tau = 0$.

Si $OC = 90°$, la parallaxe de la latitude ſera negative, & dans ce cas la latitude de la Planete ſera diminuée.

Après la conſidération de tant de cas de la ſituation d'une Planete, où nous avons taché de trouver la parallaxe de ſon lieu par rapport à l'Ecliptique, dévelopons à preſent le cas le plus rare, qui pourroit arriver. Qu'un nouvel Aſtre paroiſſe, par exemple, au pole de l'Ecliptique, & on demande ſa longitude & latitude. Je ſuppoſe premièrement qu'on donne ſa théorie, de ſorte qu'on puiſſe trouver pour chaque tems propoſé ſa diſtance à la Terre ſans une erreur trop groſſiere, & partant qu'on ſache ſa parallaxe horiſontale, qu'on calcule pour le tems de l'Obſervation la hauteur du pole de l'Ecliptique ſur l'Horiſon; & partant la difference du calcul & de l'Obſervation ſera connoître la quan-

quantité de la parallaxe de hauteur. De la même maniere on calculera l'azimuth du pole de l'Ecliptique qui eſt le même avec celui de la Comete; mais l'azimuth & la hauteur d'un aſtre étant donnés, avec le tems de l'obſervation dans un lieu dont la poſition eſt exactement déterminé, on obtient aiſément l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de l'Aſtre, & par la la longitude & latitude, poſant l'obliquité de l'Ecliptique donnée. Car ſi nous mettons l'aſcenſion droite de l'Aſtre $= a$, ſa déclinaiſon $= b$, l'obliquité de l'Ecliptique $= e$, qu'on cherche un arc dont la tangente $= \text{ſin}\frac{b+e}{2} \times \frac{\text{cotang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}a)}{\text{ſin}\frac{b-e}{2}}$

& un autre dont la tangente $= \frac{\text{coſin}\frac{b+e}{2} \times \text{cotang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}a)}{\text{coſin}\frac{b-e}{2}}$

qu'on nomme le premier arc $= x$, & le ſecond $= y$, & la longitude de l'Aſtre ſera $= 90^\circ - x - y$ & le coſinus de ſa latitude $= \frac{\text{cof}\,b.\ \text{cof}\,a}{\text{ſin}\,(x+y)}$

J'ai ſuppoſé juſqu'à preſent qu'on ſache la théorie de la planete dont on cherche la parallaxe en longitude & latitude, mais ſi les élémens de ſes mouvemens ne ſont pas connus, il nous reſte à voir comment il faut corriger par la parallaxe les lieux d'une Comete vuë de la ſurface de la Terre, pour en obtenir ſes lieux obſervés du centre de la Terre. Il y a pluſieurs methodes que les Aſtronomes ont propoſées pour ce but, mais elles ſont plus ingénieuſes que propres à les mettre en pratique; & ſi la petiteſſe de la parallaxe qui n'eſt quelquefois que de quelques ſecondes ne rendoit inutile toute la peine des Obſervateurs, il faudroit avouër qu'il ne reſteroit plus rien à découvrir dans ces opérations. Mais comme ces methodes ſont ſi difficiles à pratiquer,

que

que ni la juſteſſe des Inſtrumens, ni l'habileté de l'Obſervateur, ne ſuffiſent pas pour découvrir ces petites erreurs, il ſera plus convenable, ſi un nouvel Aſtre paroit, de prendre ſes lieux obſervés de la ſurface de la Terre pour ſes lieux véritables, & de déterminer ſa route autour du Soleil, avec autant de préciſion qu'il eſt poſſible, ſelon des methodes expoſées ailleurs; qu'on calcule aprés par cette orbite déterminée ſes diſtances à la Terre pour le tems de chaque Obſervation, & partant on trouvera ſa parallaxe horizontale; qu'on corrige par ces parallaxes les Obſervations, & qu'on détermine de nouveau par les Obſervations corrigées les élémens de ſes mouvemens, & ainſi de ſuite, jusqu'à ce que les Obſervations & la Theorie ſoient très exactes.

Pour éclaircir notre methode par un exemple, cherchons les parallaxes de la Comete vuë en 1742. Le 28 Febr. à $6^h\ 49'$ le logarithme de ſa diſtance à la Terre étoit 4.5996372, & quoique cette quantité ne ſoit pas fort exacte, l'erreur n'en cauſera point dans la recherche de la parallaxe. Comme les parallaxes de deux phenomenes inégalement eloignés de la Terre ſont réciproquement comme leurs diſtances, mettant leur hauteur ſur l'Horiſon la même: Soit donc la parallaxe horizontale du Soleil $10''$, & nous aurons pour

28 Fev. $6^h\ 49'$ — 4.5996372
6.0000000
1.4003628

& le nombre $25''$ = à la parallaxe horizontale de la Comete.

Mars $6^j\ 14^h\ 15'$ — 4.7171258 log. diſt. à la ☉
6.0000000
1.2828742

le nombre $19''$ = à la parallaxe horiſontale

Mars $3^j\ 15^h\ 10'$ = 4.6680145
6.0000000
1.3319855

le nombre $21''$ = a la parallaxe horiſontale

Ayant trouvé les parallaxes horiſontales pour les tems des trois Obſervations, ſur lesquelles le calcul de la théorie eſt fondé, qu'on corrige à préſent les Obſervations mêmes faites à Petersbourg.

Lieux de la Comete 1742 vuë à Petersbourg, ſelon le vieux Stile & le tems moyen.

				longit.			latit.	
Fevr.	28^j	8^h	51$'$	10^s	9°	3$'$	70°	30$'$
Mars	3	17	12	11	24	24	79	31
Mars	6	16	17	1	12	44	77	37

Si l'on cherche pour ces tems le nonageſime de l'Ecliptique & ſa hauteur avec l'angle que forme le point ſe levant de l'Ecliptique avec l'Horiſon, nous trouverons pour les Obſervations rapportées à l'aide de nos formules 1.) la parallaxe de la Comete en longitude $= 36''$ en latitude $= 20''$, 2.) la parallaxe de longitude $= 10''$ de la latitude $= 12''$. 3.) la par. de la long. $= 26''$ & de la latitude $= 9''$. Si l'on corrige donc les Obſervations par les parallaxes que nous venons de trouver, on déterminera l'orbite de la Comete de nouveau par les Obſervations corrigées, & ainſi de ſuite, à moins qu'on n'ait commis de plus grandes erreurs dans l'obſervation que celles qu'il faut craindre par l'omiſſion de la parallaxe.

Suivant cette methode que je viens d'éclaircir par pluſiers exemples, j'ai examiné l'Eclipſe de σ ♑ par la Lune, & aprés un calcul aſſez long & pénible, j'ai trouvé que l'obſervation differe encore du calcul fait ſelon les Tables de *Flamſt. ed* de 8$'$ du tems, ce qui produit une erreur de 4$'$ dans le lieu de la Lune.

SUR

SUR LE POINT DE REBROUSSEMENT DE LA SECONDE ESPECE

*de Mr. le Marquis de l'*HÔPITAL,

PAR M. EULER.

§. I.

J'ai déjà fait voir dans quelques pieces, que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Academie Royale, que même la Geometrie n'eſt pas exemte des controverſes, & des contradictions apparentes, quoiqu'on ſoutienne fort ſouvent le contraire. Mais j'ai auſſi fait remarquer ce grand avantage de la Geometrie, que ces difficultés peuvent être applanies, en ſorte qu'il n'y reſte plus le moindre doute ; pourvu qu'on examine bien à fond toutes les circonſtances du ſujet, ſur lequel les controverſes roulent. Dans ce diſcours je m'en vais entretenir l'Aſſemblée encore ſur une controverſe de la pure Geometrie, qui regarde une certaine eſpece de points de rebrouſſement, ſemblables à un bec d'oiſeau, & formés de deux branches d'une courbe, qui tournent leur concavité du même coté, au lieu que les deux branches d'une courbes, qui forment des points de rebrouſſement ordinaires, ſont courbées en divers ſens. Planches II. & III.

§. 2. Mr. le Marquis de l'Hopital, dans ſon Analyſe des infiniment petits, nomme ces points de rebrouſſement à bec d'oiſeau, *de la ſeconde eſpece*, & il ſoutient qu'il y a une infinité de courbes tant algebriques que tranſcendantes, qui ſont pourvuës d'un tel point de rebrouſſement. Il prouve cela par la Theorie de l'evaluation en cette maniere. Soit A B C une courbe quelconque, qui ait en B un point *Fig* 1.

d'infléxion,& qu'on plie autour de cette courbe un fil, qu'on develope enſuite en le tirant au point A ſucceſſivement, juſqu'à ce qu'il vienne ſe détacher du point d'infléxion B, & l'extremité A décrira par cette évolution l'arc AD, auquel le fil détaché BD ſera perpendiculaire & ſon rayon de courbure,comme on ſait par la theorie de l'evolution. Mais ſi l'on continue cette évolution au delà du point B, le fil BD rebrouſſera chemin, & venant dans la ſituation MN, ſon extremité décrira l'arc DN, qui ſera par conſéquent la continuation de l'arc AD. Or ces deux arcs AD, DN, qui au point D forment un angle infiniment petit, tournent leur concavité du même coté. Donc cette courbe ADN décrite par l'évolution de la ligne ABC aura au point D un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece; comme le Marquis de l'Hopital l'apelle.

§. 3. Quelque ſolide que paroiſſe cette démonſtration, M. Guà de Malves dans ſon traité : *Uſage de l'Analyſe de Des-Cartes pour decouvrir les propriétés des lignes geometriques de tous les Ordres :* eſt d'un ſentiment tout à fait contraire, & ſoutient qu'il n'y a aucune courbe, dont une branche s'etant étenduë de A & D, puiſſe ſubitement rebrouſſer chemin, & venir dans la ſituation DN, ſans qu'elle change en meme tems de courbure, ou ſans qu'elle devienne convexe, ayant auparavant été concave en même ſens. Pour l'epreuve que M. le Marquis de l'Hopital donne, il ne nie pas, que la courbe formée de cette façon n'ait la figure repréſentée: mais il prétend, que la branche DN n'eſt pas la continuation de la branche AD, bien qu'elle ſoit décrite par le même mouvement d'evolution. Il eſt donc obligé de dire, qu'il n'eſt pas permis de juger de la continuité d'une courbe, par la continuité de ſa deſcription. Cette exception paroitra ſans doute fort étrange, & j'avouë que, ſi elle étoit fondée, elle renverſeroit la pluſpart des marques, par leſquelles nous croyons pouvoir avec aſſurance juger de la figure des lignes courbes.

§. 4. M. Guà ne reconnoit que l'équation analytique, de laquelle on puiſſe tirer une exacte connoiſſance de la figure d'une ligne courbe,

be, du nombre de ſes branches & de leur continuité. Il croit avoir démontré dans ſon Ouvrage, que toutes les fois qu'il ſe trouve un tel point de rebrouſſement dans une ligne courbe, elle eſt encore défectueuſe: & que ſi l'on en acheve la deſcription ſuivant l'équation qui exprime ſa nature, la figure provient toujours telle, que la 2 fig. repréſente: c'eſt à dire, que le bec d'oiſeau deviendra doublé A D M & a D n, & que ce n'eſt plus l'arc D N, qui ſoit la continuation de l'arc A D, mais l'arc D *a*; de ſorte que le point D ne ſoit que l'interſection de deux branches, A D *a* & N D *n*, qui ſe coupent en D ſous un angle infiniment petit, & qui tournent leur concavité du même coté. On pourroit auſſi dire, que ce ſont deux branches d'une même ligne courbe A D *n* & N D *a*, qui ſe touchent enſemble au point D, & alors il ſeroit incertain, ſi l'arc D *n* ou l'arc D *a* ſeroit la continuation de l'arc A D. *Fig. 2.*

§. 5. Pour prouver cette theſe, il tire par le point D la tangente E D *e*, qu'il prend pour l'axe, ſur lequel il poſe l'abſciſſe D P = *x* & l'appliquée P M = *y*. Maintenant quelle que ſoit l'équation pour la courbe, ſi l'on prend l'abſciſſe *x* fort petite, la valeur de *y* ſe pourra toujours exprimer par une ſerie convergente de cette forme: *Fig. 3.*

$$y = \frac{xx}{2a} \pm Ax^{m} \pm Bx^{n} \pm Cx^{k} \text{ \&c.}$$

où les expoſans *m*, *n*, *k* &c. croiſſent de plus en plus, & ſont des nombres, ou entiers, ou rompus; & s'il y en a des fractions, dont le dénominateur eſt un nombre pair, les valeurs de ces termes ſeront ambigues, & ce ſera le cas où pluſieurs branches de la courbe viennent toucher l'axe E *e* au point D. Or le premier terme où la plus baſſe puiſſance de *x* ſera $\frac{xx}{2a}$, ſi le rayon de la courbure en D eſt ſuppoſé = *a*.

§. 6. Cela remarqué il ſuppoſe l'abſciſſe *x* infiniment petite pour connoitre le train de la courbe au point D, & dans ce cas, dit-il, évanouïront tous les termes Ax^{m}, Bx^{n}, Cx^{k} &c. par rapport au

premier $\frac{xx}{2a}$, puisque leurs expoſans ſont plus grands que 2; de ſorte que pour la courbe au point D il ne reſte que l'équation $y = \frac{xx}{2a}$ qui en exprimera le train ou la route, que la courbe ſuit en deçà & en delà du point D, pourvû que l'abſciſſe x demeure infiniment petite. Or dans ce cas il eſt clair, que l'équation $y = \frac{xx}{2a}$ reſte la même, ſoit qu'on prenne x affirmative ou negative: & partant il conclud, que la courbe aura toujours auprès du point D la forme M D m; & que par-conſéquent l'arc A D doit prendre ſa continuation vers D m. Cela doit s'entendre, lorsque la courbure en D eſt finie, ce qui arrive dans notre cas; car ſi la courbure étoit, ou infinie, ou infiniment petite, ce raiſonnement perdroit ſa force.

§. 7. Ce ſont les raiſons dont M. Guà de Malves combat l'idée de M. le Marquis de l'Hopital ſur les points de rebrouſſement de la ſeconde eſpece; & ſi l'on peſe les argumens de part & d'autre, on les trouvera ſi forts, qu'il paroit presque inévitable de reconnoitre une contradiction entre la deſcription faite par l'evolution, & l'équation de la courbe; l'une nous montrant très clairement que la continuation de
Fig. 2. l'arc A D doit paſſer en rebrouſſant par D N; tandisque l'autre nous perſuade, que cette continuation doit abſolument ſe faire par D n ou D a. Néanmoins je prouverai par des raiſons inconteſtables, qu'il n'y a pas ici la moindre diſſenſion entre la deſcription mecanique & le calcul; mais qu'il s'eſt gliſſé dans le raiſonnement de M. Guà, tout ſolide qu'il puiſſe paroitre d'ailleurs, une petite inadvertence; qui étant remarquée, cette contradiction disparoitra d'abord entierement.

§. 8. Car quoiqu'il ſoit vrai, que dans une telle équation $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} +$ &c. où les expoſans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ &c. ſont des nombres affirmatifs allant en croiſſant, on peut négliger par rapport au premier terme les ſuivans, lorsqu'on ſuppoſe x infini-

infiniment petit, tant affirmatif que negatif, & que dans ce cas on n'a qu'à conſiderer cette équation $y = A x^{\alpha}$; néanmoins il faut bien remarquer, que cette omiſſion des termes ne peut avoir lieu, qu'aux cas, où ces termes ont tous des valeurs réelles, quoiqu'elles ſoient infiniment petites. Car ſi un ſeul terme de ceux qu'on rejette étoit imaginaire, toute l'expreſſion, & par conſéquent la valeur de y le ſeroit auſſi: donc on auroit grand tort, ſi l'on mettoit $y = A x^{\alpha}$ ou à une quantité réelle. Et partant la régle reçue, par laquelle on fait évanouïr par raport au premier terme les ſuivans, demande cette reſtriction, que les termes à omettre ne ſoient pas imaginaires.

§. 9. Mr. Guà de Malves n'a pas pris garde à cette limitation abſolument néceſſaire, & c'eſt de là, que ſa pretenduë contradiction dans le point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece a tiré ſon origine. Pour éclaircir cela mieux, ſoit propoſée cette équation $y = x + x x \sqrt{-1}$; & on verra d'abord que la valeur de y eſt toujours imaginaire, excepté le ſeul cas ou $x = o$, auquel devient auſſi $y = o$. Ainſi cette équation ne déſigne qu'un ſeul point ſitué ſur l'axe au commencement des abſciſſes x. Mais ſi nous voulions juger de la courbe exprimée par cette équation, ſuivant la methode de Mr. Guà, en ſuppoſant l'abſciſſe x infiniment petite, nous n'aurions qu'à conſidérer cette équation $y = x$, & nous en conclurrions, que cette courbe ſe confond au commencement avec une droite exprimée par $y = x$; ce qui ſeroit pourtant contraire à la vérité. Cependant cette concluſion ſeroit bien juſte, ſi le coëfficient de $x x$, au lieu d'etre imaginaire, eut été une quantité réelle quelconque.

§. 10. Or il peut arriver, qu'une branche de la courbe évanouït, ou devient imaginaire, quand même aucun terme de l'équation n'eſt affecté ouvertement par une quantité imaginaire. Car conſidérons la courbe dont l'équation eſt $y = x + x \sqrt{x}$, & ſuppoſons x infiniment petit tant affirmatif, que negatif. Dans le premier cas le terme $x \sqrt{x}$ étant réel, & infiniment plus petit que x, on le pourra négliger pour avoir

avoir $y = x$, qui repréſente le commencement de la courbe vers la région des abſciſſes poſitives. Mais dès qu'on prend x negatif, quoiqu'infiniment petit, le terme $x\sqrt{x}$ devenant imaginaire, rendra auſſi la valeur de y imaginaire; & partant dans ce cas il ne ſera plus permis d'enviſager l'équation $y = x$ au lieu de $y = x + x\sqrt{x}$. Cette courbe ne s'étend donc pas dans la région des abſciſſes negatives, mais elle aura deux branches vers la région des affirmatives ſelon la double valeur de $\pm x\sqrt{x}$, qui forment un point de rebrouſſement de la premiere eſpece. Il eſt clair que c'eſt la parabole cubique ſeconde.

§. 11. Un tel point de rebrouſſement ordinaire ſe trouvera auſſi dans cette équation plus générale $y = \alpha x + \mathcal{C} x^{1+\frac{m}{n}}$, toutes les fois que m ſera un nombre impair, & n pair affirmatif. Car dans ce cas la valeur du terme $\mathcal{C} x^{1+\frac{m}{n}}$ ſera ambiguë, & on aura $y = \alpha x \pm \mathcal{C} x^{1+\frac{m}{n}}$. Pour trouver la forme de cette courbe, on n'a qu'à tirer la droite AL, que prenant l'abſciſſe $AP = x$, l'appliquée PL devienne $= \alpha x$. Enſuite qu'on prenne ſur PL prolongée $LM = LN = \mathcal{C} x^{1+\frac{m}{n}}$, qui ſera infiniment plus petit que x, ſi x eſt infiniment petit, & la courbe paſſera par les points M & N, qui ſe réüniſſent au point A. Donc la courbe aura deux branches AM & AN, dont chacune eſt convexe vers AL, & qui formeront par conſéquent un point de rebrouſſement MAN de la premiere eſpece: car cette courbe ne s'etendra pas dans la région des abſciſſes negatives, puisque mettant x negative, l'appliquée y devient imaginaire.

Fig. 4.

§. 12. La meme choſe peut arriver dans des courbes, qui ſemblent à M. Guà ne pouvoir admettre un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. On n'a qu'à conſidérer cette équation $y = \alpha x x \pm \mathcal{C} x x \sqrt{x}$, laquelle devient imaginaire dès qu'on met x negatif, & partant

partant il eſt ſur, que cette courbe n'a aucune partie dans la région des abſciſſes negatives. Pour connoitre la figure de cette courbe, on n'a qu'à conſtruire ſur l'axe AP une parabole AL, qui répond à l'équation $y = \alpha xx$, & nommant $AP = x$ on aura $PL = \alpha xx$. Qu'on prenne enſuite $LM = LM = 6xx\sqrt{x}$, & les points M & N ſeront dans la courbe cherchée; & puisqu'en ſuppoſant x infiniment petit, les parties LM & LN ſont infiniment plus petites que PL, l'une & l'autre branche AM & AN ſe confondra au commencement A avec la parabole AL, & aura la même courbure, & tournera par conſéquent ſa convexité vers l'axe AP; deſorte que ces deux branches MA & NA formeront en A un vrai point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. *Fig. 5.*

§. 13. De là il eſt clair, que quoiqu'on ſuppoſe l'abſciſſe x infiniment petite, il n'eſt pas permis de négliger le terme $6xx\sqrt{x}$ par rapport à αxx, que lorsque x eſt priſe affirmative; & qu'au cas, que x eſt priſe negative, l'équation $y = \alpha xx$ ne pourra plus être employée pour $y = \alpha xx \pm \beta xx\sqrt{x}$; puisque celle-là montreroit une valeur réelle de y, qui eſt pourtant, à cauſe du ſecond terme, imaginaire. Par conſéquent le raiſonnement de M. Guà n'a plus lieu dans ce cas, quand il prétend, que l'équation $y = \alpha xx$ puiſſe être employée pour connoitre la forme de la courbe près du point A; d'où il s'enſuivroit ſans doute, que la courbe s'étendroit dans la region des abſciſſes negatives: car l'autre terme négligé $\beta xx\sqrt{x}$ nous fait connoitre, que les appliquées y deviennent alors imaginaires. Il n'eſt donc pas permis de négliger ce terme par rapport à αxx, que tandis que ſa valeur ne devient pas imaginaire, quoiqu'on prenne x infiniment petite.

§. 14. Ayant ainſi trouvé une courbe, qui a un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, il ſera facile de s'imaginer une infinité d'autres courbes, dans lesquelles il ſe trouve un pareil point de rebrouſſement. Car à l'équation $y = \alpha xx \pm \beta xx\sqrt{x}$ on pourra ajouter autant de puiſſances de x qu'on voudra, pourvû que leurs expoſants ſoient des nombres affirmatifs plus grands que 2; puisque tous ces termes évanouiſront egalement par rapport au premier αxx, pourvu qu'on

qu'on ſuppoſe x infiniment petite, mais affirmative. Car pour les valeurs negatives de x le ſeul terme $\beta x x \sqrt{x}$ rend cette hypotheſe inutile. De plus on pourra encore ajouter ce terme xxP, pour avoir

$$y = \alpha x x \pm \beta x x \sqrt{x} + xxP$$

ſi P marque une fonction quelconque de x, qui évanouïſſe en faiſant $x = 0$.

§. 15. Il eſt à remarquer, que toutes ces courbes, qui ſont contenuës dans cette équation generale, auront au point de rebrouſſement A leur courbure finie, ou le rayon de la dévelopée y ſera fini; tout comme cela arrive dans les courbes, que M. le Marquis de l'Hopital a formées pour démontrer l'exiſtence du point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. Il ſera à propos de rapporter ici quelques courbes des plus ſimples de cette nature.

$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt{x}$ du 5me ordre
$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt{x}$ du 7me ordre
$y = \alpha x x + \beta x^4 \sqrt{x}$ du 9me ordre
$y = \alpha x x + \beta x^5 \sqrt{x}$ du 11me ordre
&c.

qui toutes ont au commencement où $x = 0$, un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, & le rayon de la developée eſt dans ce point d'une quantité finie.

§. 16. On peut rendre ces formules encore plus générales ſans augmenter le nombre des termes, en employant un autre ſigne radical, dont l'expoſant eſt un nombre pair, afin que la valeur ſoit ambigue: ainſi nous aurons ces équations:

	ou
$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt[4]{x}$	$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt[6]{x}$
$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt[4]{x^3}$	$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt[6]{x^5}$
$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt[4]{x}$	$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt[6]{x}$
$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt[4]{x}$	$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt[6]{x^5}$
&c.	&c.

Toutes

Toutes ces formules ſeront compriſes dans cette générale $y = \alpha xx + \beta x^{2+\frac{m}{n}}$, où m marque un nombre affirmatif impair, & n un nombre affirmatif pair quelconque. Le rayon de la dévelopée ſera dans toutes ces courbes au point de rebrouſſement fini.

§. 17. Au lieu du premier terme αxx on pourra auſſi prendre une autre puiſſance de x plus haute, & alors le rayon de la dévelopée au point de rebrouſſement ſera infiniment grand, comme dans ces formules

$$y = \alpha x^3 + \beta x^{3+\frac{m}{n}}$$

$$y = \alpha x^4 + \beta x^{4+\frac{m}{n}}$$

$$y = \alpha x^5 + \beta x^{5+\frac{m}{n}}$$

&c.

ou plus généralement $y = \alpha x^k + \beta x^{k+\frac{m}{n}}$, où k marque un nombre entier plus grand que 1, & les valeurs de m & n demeurent comme dans l'article précédent. Car ſi k étoit $= 1$, le point de rebrouſſement deviendroit de la première eſpece. Il n'eſt pas auſſi néceſſaire que k ſoit un nombre entier, il peut être un nombre rompu, pourvû que la puiſſance x^k n'acquerre pas une valeur ambigue, qui puiſſe être auſſi bien negative qu'affirmative.

§. 18. L'expoſant k peut auſſi être un tel nombre rompu moindre que 2, pourvu qu'il ſoit plus grand que 1, & dans ces cas le rayon de la dévelopée au point A, où ſe trouve le point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, deviendra infiniment petit. On pourra même prendre k plus petit que l'unité, pourvu que la puiſſance x^k ne devienne pas ambigue, ce qui arrive, ſi k eſt une fraction dont le dénominateur eſt un nombre impair. Mais alors la tangente de la courbe au point de rebrouſſement A deviendra perpendiculaire à l'axe AP, au *Fig. 6*

lieu que dans les cas précédens elle tomboit ſur l'axe AP même. Dans ces cas il faut remarquer, que le rayon de la dévelopée au point A ſera fini ſi $k = \frac{1}{2}$, (cas qui ſe trouve exclus,); infiniment petit ſi $k > \frac{1}{2}$ & infiniment grand ſi $k < \frac{1}{2}$. Ainſi cette équation $y = \alpha \sqrt[3]{x} + \beta \sqrt[2]{x}$ marquera une telle courbe MAN, qui aura au point A un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, où le rayon de la dévelopée ſera infiniment grand.

§. 19. Il eſt auſſi poſſible que l'expoſant k ſoit $= \frac{1}{2}$, ſans que la puiſſance $\alpha x^{\frac{1}{2}}$ devienne ambigue : l'ambiguité étant détruite par le terme ſuivant, comme dans cette équation $y = \alpha \sqrt{x} + \beta \sqrt{x}\sqrt{x}$, où le premier terme $\sqrt{x}$ ſe trouve dans le ſecond encore après le ſigne radical, de ſorte que ſi l'on prenoit le premier terme $\sqrt{x}$ negatif, le ſecond en deviendroit imaginaire. Et en effet puiſque x a dans le ſecond terme plus de dimenſions que dans le premier, cette courbe aura au commencement auſſi un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. Or cette courbe appartiendra au quatrième ordre, puiſque ſon équation étant délivrée des radicaux devient

$$y^4 - 2\alpha\alpha xy^2 - 4\alpha\beta\beta xxy + \alpha^4 xx - \beta^4 x^3 = 0$$

qui paroit être la plus ſimple courbe douée d'un tel point de rebrouſſement.

§. 20. Car il eſt aſſez évident qu'un tel point de rebrouſſement ne peut pas avoir lieu dans les lignes du troiſieme ordre : puiſqu'il eſt poſſible de tirer une ligne droite, par un tel point de rebrouſſement, qu'elle faſſe quatre interſections, ce qui demande au moins une ligne du quatrième ordre. Or je ferai voir bientôt, qu'il y a une infinité de lignes du quatrième ordre, qui ont un tel point de rebrouſſement, & il ſera encore incertain laquelle d'entr'elles pourroit être jugée la plus ſimple : ſi l'on ne veut regarder dans ce jugement, que l'équation entre les coordonnées, la déciſion ne ſera plus difficile, dès qu'on conſidérera l'équation générale du quatrième ordre

dre, qui renferme toutes les courbes de cette nature. Par là il eſt aiſé de juger, que dans le cinquième ordre & les ſuivants le nombre de telles courbes ſera encore infiniment plus grand, de ſorte qu'on ne ſauroit plus avoir le moindre doute ſur l'exiſtence de ce point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece de M. le Marquis de l'Hôpital.

§. 21. La derniere formule $y = \alpha\sqrt{x} + \beta\sqrt{x}\sqrt{x}$ ne differe des precédentes, qu'en ce qu'ici l'axe AP eſt perpendiculaire à la courbe, au lieu que dans les précedentes équations elle étoit la tangente même. Car on n'a qu'à changer y & x pour avoir $x = \sqrt{y} + \sqrt{y}\sqrt{y}$, & prenant les quarrés on aura $xx = y + 2y\sqrt[4]{y} + y\sqrt{y}$. Donc ſi x & y ſont infiniment petits, on rejettera le dernier terme, & ayant $y = xx$, cette valeur ſubſtituée dans le terme $y\sqrt[4]{y}$ donnera $xx\sqrt{x}$, de ſorte que $xx = y + xx\sqrt{x}$ ou $y = xx \pm xx\sqrt{x}$, qui eſt une des équations precédentes. De même de l'equation générale $y = xx^k + \mathfrak{G}x^{k+\frac{m}{n}}$ (17), changeant les coordonnées x & y, on aura $x = y^k + y^{k+\frac{m}{n}}$. Or puisque x & y ſont ſuppoſées infiniment petites, il y aura $y^k = x$ & $y = x^{\frac{1}{k}}$; donc $x = y^k + x^{1+\frac{m}{nk}}$, & $y = \sqrt[k]{(x - x^{1+\frac{m}{nk}})} = x^{\frac{1}{k}} + .x^{\frac{m+n}{nk}}$ ou $y = \alpha x^{\frac{1}{k}} + \mathfrak{G}x^{\frac{m+n}{nk}}$, équation pour une courbe qui aura au commencement un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, qui eſt perpendiculaire à l'axe.

§. 22. De ces formules il eſt aiſé d'en tirer d'autres, qui contiennent des points de rebrouſſement de cette ſeconde eſpece, dont la tangente faſſe un angle quelconque oblique avec l'axe AP. Pour commencer des cas les plus ſimples, ſoit propoſée cette équation $y =$

Fig. 7. $\alpha x + \beta xx + \gamma xx\sqrt{x}$, & on verra premierement, que la droite AK ſera la tangente de cette courbe au point A, ſi poſant AP $=x$, ſera PK $=\alpha x$. Enſuite qu'on conſtruiſe la parabole AL de ſorte que PL $=\alpha x + \beta xx$, & qu'on prenne LM $=$ LN $=\gamma xx\sqrt{x}$; on obtiendra deux branches AM & AN, qui ſe réüniſſant en A, y auront pour tangente la droite AK, & leur courbure ſera la même, que celle de la parabole AL; de ſorte que la convexité de ces deux branches au
Fig. 8. point A ſera tournée vers l'axe AP. Or ſi le coëfficient β eſt negatif, cette équation $y = \alpha x - \beta x + \gamma xx\sqrt{x}$ repréſentera un point de rebrouſſement MAN, dont la concavité ſera tournée vers l'axe AP.

§. 23. Cette formule peut être renduë plus générale de cette maniere: $y = \alpha x + \beta xx + \gamma x^{2+\frac{m}{n}}$ en ſuppoſant m un nombre impair & n un nombre pair: on y pourra encore ajouter autant de puiſſances de x qu'on voudra, pourvu que leurs expoſants ſoient plus grands que 2, & dans tous ces cas le rayon de la dévelopée au point de rebrouſſement ſera fini. Or il ſera infiniment grand dans cette équation:

$$y = \alpha x + \beta x^{k} + \gamma x^{k+\frac{m}{n}}$$

ſi l'expoſant k eſt plus grand que 2; mais infiniment petit, ſi cet expoſant k eſt moindre que 2, mais pourtant plus grand que 1: ou il eſt à remarquer, qu'il peut auſſi être un nombre rompu, pourvu que la puiſſance x^k n'en devienne pas ambigue.

§. 24. Pour rendre ces formules encore plus générales, ſoit P une fonction quelconque de x, qui n'ait aucune ambiguité, laquelle devienne $= o$ en ſuppoſant $x = o$. Enſuite ſoit Q une telle fonction ambigue, qu'elle renferme auſſi bien une valeur negative qu'affirmative, ou qui ſoit $\pm$ Q, mais qui devienne imaginaire en prenant x negatif, au moins tandis qu'il eſt infiniment petit: & de plus que Q évanouiſſe en faiſant $x = o$. Cela poſé, il eſt clair, que cette équation:

$= y$

$y = \alpha x + x\,P\,(1 \pm Q)$ désignera une courbe, qui aura au commencement un point de rebroussement de la seconde espece: & cette équation peut être renduë encore plus générale en supposant $y = \alpha x + x\,P\,(1 \pm Q)^n$, n marquant un nombre quelconque tant affirmatif que negatif. La fonction P pourra aussi être ambigue, pourvu que son ambiguité soit détruite par la fonction Q, ce qui arrive si elle renferme $\sqrt{P}$, puisqu'alors P ne peut pas recevoir la valeur negative.

§. 25. On pourroit rendre cette formule encore plus générale en ajoutant à y des fonctions de y, qui évanouïssent par rapport à Px, si l'on met x infiniment petit, mais je ne m'y arrêterai pas, puisque cette formule est déjà suffisante pour trouver une infinité de telles lignes courbes de tous les ordres après le troisieme. Je remarquerai seulement que faisant $n = -1$, $P = x$ & $Q = \sqrt{x}$, on obtient encore une autre courbe du quatriéme ordre: $y = \frac{\alpha x x}{1 \pm \beta \sqrt{x}}$: qui sera comprise dans cette équation $(y - \alpha x x)^2 = \beta\beta y y x$, & qui paroit encore plus simple que la précedente. En changeant les constantes pour remplir l'uniformité, elle sera $a a y y - 2 a y x x + x^4 = b x y y$.

§. 26. Par le moyen de ces formules il sera donc aisé de fournir une infinité de lignes courbes, qui auront un tel point de rebroussement de la seconde espece. Mais il n'en sera pas de même de la question inverse, si l'on veut juger, l'équation pour une courbe étant donnée, si cette courbe aura un tel point de rebroussement, ou non? Pour déterminer le point de rebroussement ordinaire, on a coutume de chercher l'endroit, où le differentiel second de l'une des coordonnées, ou évanouït, ou devient infini; puisque dans cet endroit là le rayon de la courbure est toujours, ou infini, ou egal à zero Mais dans le point de rebroussement de la seconde espece le rayon de la courbure est tantôt fini, tantôt infiniment grand, tantôt infiniment petit; de sorte que ce point n'est pas attaché à une certaine proprieté des differentiels seconds.

On

On ne ſauroit non plus rien conclure des differentiels du troiſiéme ou de quelqu'ordre plus haut, puisqu'on pourra toujours aſſigner de tels points de rebrouſſement, où tous ces differentiels ont des valeurs quelconques.

§. 27. Ne voyant donc aucune methode ſûre pour découvrir cette eſpece de points de rebrouſſement, par quelque propriété des differentiels, on ſera obligé de ſe tenir à l'analyſe des finis, ou de tirer le jugement de l'équation en termes finis de la courbe. Or d'abord il eſt évident, que ce point de rebrouſſement eſt un point double de la courbe, & partant il faut commencer par chercher tous les points doubles qui peuvent ſe trouver dant la courbe propoſée, & enſuite le jugement, ſi un tel point double eſt en même tems un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, ne ſera plus difficile. Or pour reconnoitre les points doubles on peut faire uſage des differentiels; car ayant differentié l'équation propoſée entre les coordonnées x & y, on ſuppoſera ſéparément égaux à zero, tant les termes qui contiennent les dx, que les dy: & les cas, où ces deux équations jointes à l'équation même de la courbe, auront les mêmes racines, montreront tous les points doubles, qui ſe trouvent dans la courbe propoſée.

§. 28. Par cette methode ayant decouvert les points doubles de la courbe propoſée, on jugera de chacun, s'il eſt un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, ou non, de la maniere ſuivante. On tirera par le point double à volonté une droite, qu'on regardera comme l'axe, ſur lequel on prendra depuis le point double les abſciſſes, qui ſoient $= x$, & les appliquées $= y$, qu'on fera, ou perpendiculaires, ou inclinées ſous un angle quelconque à l'axe. Cela fait, l'équation pour la courbe entre x & y ſera toujours telle, qu'il ne s'y trouvera, ni aucun terme conſtant, ni les termes où x & y n'ont qu'une ſeule dimenſion, & partant l'équation, qui réſulte, ſera toujours compriſe dans cette forme générale.

$$0 = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^2 y + \zeta x y^2 + \eta y^3 + \vartheta x^4 + \iota x^3 y + \&c.$$

Car

Car toutes les fois que dans l'équation manquent le terme conſtant & les termes x & y, c'eſt une marque ſeure, que la courbe aura au commencement, où $x = 0$ & $y = 0$, un point double, ou une interſection de deux branches.

§. 29. Enſuite on ſuppoſera x & y infiniment petits pour avoir cette équation $0 = \alpha xx + \beta xy + \gamma yy$, dont les racines $y = -\frac{\beta x}{2\gamma} \pm x\sqrt{\left(\frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma}\right)}$ marqueront les tangentes des branches, qui s'entrecoupent au commencement. Donc ſi ce point double eſt un point de rebrouſſement, il faut que ces deux tangentes ſoient les mêmes, ce qui arrive ſi $\beta\beta = 4\alpha\gamma$. Par conſéquent s'il n'y a pas $\beta\beta = 4\alpha\gamma$, ou ſi l'equation, en ſuppoſant x & y infiniment petits, n'aura point deux racines égales, ce ſera une marque ſure, que le point double n'eſt pas un point de rebrouſſement, ſoit de la première ou de la ſeconde eſpece. Il ne reſte donc que le cas de deux racines égales pour entrer dans le jugement, s'il y a un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece ou non.

§. 30. Mais ſi les deux tangentes conviennent, on pourra prendre cette commune tangente pour axe, & alors l'équation pour la courbe aura cette forme.

$$0 = Ayy + Bx^3 + Cx^2y + Dxy^2 + Ey^3 + Fx^4 + Gx^3y + \&c.$$

Maintenant il faut voir, ſi les deux branches ont tourné leur courbure du même coté. Pour cet effet il faut, que dans la ſuppoſition de x infiniment petit, en négligeant tous les termes, qui évanouiſſent par rapport aux autres, la valeur de y ne devienne pas ambigue, c'eſt à dire, il faut qu'il ſoit ou $y = \alpha xx$, ou $y = \alpha x^3$; ou $y = \alpha x^4$ &c. Soit $y = \alpha xx$, ce qui eſt le cas où le rayon de la developée devient fini, & alors on aura en négligeant les dimenſions plus hautes que la quatrième.

$$0 = \alpha^2 Ax^4 + Bx^3 + \alpha Cx^4 + Fx^4$$

donc il faut qu'il ſoit $B = 0$, & que α n'obtienne pas une valeur double de l'equation $\alpha^2 A + \alpha C + F = 0$, ou que $CC = 4AF$, de ſorte que $Ayy + Cxxy + Fx^4$ devienne un quarré.

§. 31. Donc à moins que l'équation n'ait pas cette forme

$$(y - \alpha xx)^2 = Bxy^2 + Cy^3 + Dx^3y + Exxyy + Fxy^3 + \&c$$

la courbe n'aura pas un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. Mais cela ne ſuffit pas encore; il faut outre cela, que dans l'expreſſion $Bxy^2 + Cy^3$ &c. ſi l'on met $y = \alpha xx$, la plus baſſe puiſſance de x ſoit impaire. Par là on comprend aiſément, que ſi l'équation étoit $(y - \alpha x^3)^2 = Bxy^2 +$ &c. cette partie doit avoir toujours la même propriété, qu'après avoir fait $y = \alpha x^3$ la plus baſſe dimenſion de x ſoit impaire & plus haute que x^6 ; & cette même maxime ſe doit obſerver dans les équations plus compliquées ; de ſorte que le jugement du point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece ne ſera jamais difficile en ſe ſervant de cette maniere.

§. 32. De là nous pourrons donner une équation générale pour toutes les lignes du quatrieme ordre, qui auront un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece ; laquelle ſera

$$(y - \alpha xx)^2 = Axy^2 + By^3 + Cx^3y + Dxxyy + Exy^3 + Fy^4.$$

Car cette derniere partie $Axy^2 + By^3 + Cx^3y$ &c. deviendra au commencement où $y = \alpha xx$ égale à

$$\alpha^2 Ax^5 + \alpha^3 Bx^6 + \alpha Cx^5 + \alpha^2 Dx^6 + \alpha^3 Ex^7 + \alpha^4 Fx^8$$

& partant en négligeant les plus hautes puiſſances de x, l'équation ſera pour le commencement

$$(y - \alpha xx)^2 = \alpha\ (\alpha A + C)\, x^5 \quad \text{ou} \quad y = \alpha xx \pm xx\sqrt{\alpha(\alpha A + C)x}.$$

Donc

Donc pourvu que $\alpha A + C$ ne ſoit pas égal à zero, les lignes compriſes dans l'équation générale donnée auront un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. Par conſéquent cette propriété aura lieu toutes les fois, qu'il n'y a pas $C = -\alpha A$; & alors ce point de rebrouſſement ſera de cette nature $y = \alpha xx + \delta xx\sqrt{x}$.

§. 33. Mais quand $C = -\alpha A$, il y aura encore des cas, où l'équation :

$$(y-\alpha xx)^2 = Axy(y-\alpha xx) + By^3 + Dxxyy + Exy^3 + Fy^4$$

contient des courbes d'un tel point de rebrouſſement. Pour trouver ces cas, on n'a qu'a ſuppoſer, pendant que x eſt conſidéré comme infiniment petit :

$$y = \alpha xx + \beta x^3 + \gamma x^3\sqrt{x}.$$

& apres avoir déterminé β & γ on parviendra à cette equation :

$$(y-\alpha xx-\tfrac{1}{2}Axy)^2 = Byy(y-\alpha xx)+Exy^3+Fy^4$$

qui renferme encore une infinité d'autres courbes, qui ont toutes un tel point de rébrouſſement. Donc en regardant la ſimplicité de l'équation, il n'y a aucun doute que cette ligne $(y-\alpha xx)^2 = Axyy$ ou $y = \frac{\alpha xx}{1-\sqrt{Ax}}$ ne ſoit la plus ſimple qui ait cette propriété.

§. 34. Soit propoſée pour donner un exemple de la methode, que je viens d'expliquer, cette ligne du cinquiéme ordre, dont l'équation eſt :

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)(aa-zz)^2 = 2aaxx - x^4 - 2xxzz.$$

Pour trouver ſi cette courbe a un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, je cherche premierement, ſi elle a un point double. Pour cet effet l'équation propoſée donnera par la différentiation en ſuppoſant x conſtant :

$$-4\left(1-\frac{x}{a}\right)(aa-zz)\,2dz+4xxzdz=0.$$

Or en ſuppoſant z conſtant nous aurons :

$$-\frac{dx}{a}(aa-zz)^2=4aaxdx-4x^3dx-4xzzdx.$$

A ces trois équations ſatisfont ces valeurs :

$$x=0 \quad \& \quad z=\pm a.$$

§. 35. Cette courbe aura donc deux points doubles, & pour chercher la nature de chacun, je ſuppoſerai $z=a-y$, car il eſt clair de l'équation propoſée, puiſqu'elle a un diametre ſur lequel ſont priſes les abſciſſes x, que ces deux points doubles ſeront ſemblables entr'eux. Or poſant $z=a-y$, nous aurons cette équation :

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)yy(2a-y)^2=2aaxx-x^4-2xx(a-y)^2$$

ou bien :

$$4aayy-4ay^3+y^4-4axyy+4xy^3-\frac{xy^4}{a}-2aaxx+x^4=0$$
$$-4axxy+2xxyy+2aaxx$$

& partant.

$$(2ay-xx)^2=4ay^3+4axyy+y^4+4xy^3+2xxyy-\frac{xy^4}{a}$$

D'où il eſt clair que cette courbe a deux points de rebrouſſement de la ſeconde eſpece.

§. 36. Pour connoitre la figure de cette courbe, on n'a qu'à chercher la valeur de zz de l'équation propoſée, qu'on trouvera $zz=aa-\frac{axx\pm x^2\sqrt{ax}}{a-x}$, ou $zz=aa-\frac{xx\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{x}}$. De laquelle on tire les endroits où l'appliquée z evanouït, par le moïen de cette équation $aa\sqrt{a}\mp aa\sqrt{x}-xx\sqrt{a}=0$ ou $(aa-xx)^2=a^3x$ qui a deux racines réelles qui ſont :

$$x=0,5248876a; \ \& \ x=1,4902162a.$$

Enſuite

Enſuite la valeur de dz ſera $= 0$, dans le cas $\sqrt{x} = \frac{4}{3}\sqrt{a}$ ou $x = \frac{16}{9}a = 1,7777\,a$; & la valeur de dx ſera $= 0$, où $z = 0$, c. à. d. où la courbe coupe l'axe. Mais ſi nous ſuppoſons $x = \frac{16}{9}a$, nous aurons ou $zz = \frac{283}{27}aa$ ou $zz = -\frac{57}{189}aa$, dont la derniere valeur eſt imaginaire. Enfin on voit que la courbe aura auſſi une aſymtote perpendiculaire à l'axe, ou $x = a$.

§. 37. Cette courbe eſt repréſentée dans la 9me figure, où CO eſt l'axe & en même tems le diametre de la courbe, C le commencement des abſciſſes x. Les points A, A ſont les deux points de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, que nous venons de trouver étant $AC = a$. Les deux branches qui conſtituent ces points de rebrouſſement, forment la lunule ABADA. Outre cela prenant $CE = a$, la droite FEF perpendiculaire à l'axe CO ſera une aſymtote de deux autres branches IHK & IHK, qui de K, K vont en divergeant à l'infini, ayant en H, H leur plus petite diſtance à l'axe CO. On voit auſſi qu'on peut tirer une droite, qui coupe cette ligne courbe en 5 points, ſuivant la nature des lignes du 5me ordre. *Fig. 9.*

RECHERCHES
SUR LES RACINES IMAGINAIRES
DES EQUATIONS
PAR M. EULER.

§. 1.

Toute équation algébrique étant délivrée des fractions & des ſignes radicaux, ſe réduit toujours à cette forme générale:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \ldots + N = 0$$

où les lettres A. B. C. D. ... N marquent des quantités conſtantes réelles, ou affirmatives ou negatives ſans en exclure le zero. Les racines d'une telle équation ſont les valeurs, qui étant miſes pour x produiſent une équation identique $0 = 0$. Or ſi $x + \alpha$ eſt un diviſeur ou facteur de la formule propoſée, l'autre facteur étant indiqué par X, de ſorte que l'équation ait cette forme $(x + \alpha)\,X = 0$, il eſt clair que cela arrive ſi $x + \alpha = 0$, ou $x = -\alpha$. D'où l'on voit que les racines d'une équation ſe trouvent en cherchant les diviſeurs ou facteurs de cette meme équation; & toutes les racines d'une équation ſe tireront de tous ſes diviſeurs ſimples de la forme $x + \alpha$.

§. 2. Donc pour trouver toutes les racines d'une équation propoſée, on n'a qu'à chercher tous les facteurs ſimples de la quantité: $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + N$; & ſi nous poſons ces facteurs:

$$(x + \alpha)\ (x + \beta)\ (x + \gamma)\ (x + \delta)\ \&c.$$

il eſt d'abord clair que le nombre de ces facteurs doit être egal à l'expoſant n; & partant le nombre de toutes les racines qui ſeront:

$x =$

$x = -\alpha$; $x = -\beta$; $x = -\gamma$; $x = -\delta$; &c. ſera auſſi égal à ce même expoſant n, puiſqu'un tel produit $(x+\alpha)\ (x+\beta)\ (x+\gamma)\ (x+\delta)$ &c. ne ſauroit devenir égal à zero, à moins qu'un de ſes facteurs n'evanouïſſe. Toute équation donc de quelque degré qu'elle ſoit, aura toujours autant de racines, que l'expoſant de ſa plus haute puiſſance contient d'unités.

§. 3. Or il arrive fort ſouvent que toutes ces racines ne ſont pas des quantités réelles, & que quelques unes, ou peut-être toutes, ſont des quantités imaginaires. On nomme quantité imaginaire, celle qui n'eſt ni plus grande que zero, ni plus petite que zero, ni égale à zero; ce ſera donc quelque choſe d'impoſſible, comme par exemple $\sqrt{-1}$, ou en général $a+b\sqrt{-1}$; puiſqu'une telle quantité n'eſt ni poſitive, ni negative, ni zero. Ainſi cette équation $x^3 - 3xx + 6x - 4 = 0$ ayant ces trois racines $x = 1$; $x = 1+\sqrt{-3}$; & $x = 1-\sqrt{-3}$, les deux dernieres ſont imaginaires, & il n'y aura qu'une racine réelle $x = 1$. D'où l'on voit, que ſi l'on ne vouloit comprendre ſous le nom de racines que celles qui ſont réelles, leur nombre ſeroit ſouvent beaucoup plus petit que le plus haut expoſant de l'équation. Et partant quand nous diſons que chaque équation a autant de racines, que l'expoſant de ſon degré indique, cela ſe doit entendre de toutes ſes racines tant réelles qu'imaginaires.

§. 4. Nous concevons donc, que de quelque degré que ſoit l'équation propoſée

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + N = 0$$

elle puiſſe toujours être repréſentée par une telle forme;

$$(x+\alpha)\ (x+\beta)\ (x+\gamma)\ (x+\delta)\ \ldots\ (x+\nu) = 0$$

où le nombre de ces facteurs ſimples ſoit $= n$. Et puiſque ces facteurs étant multipliés actuellement enſemble doivent produire l'équation propoſée, il eſt évident que les quantités A, B, C, D, ... N ſeront tellement déterminées par les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \nu$, qu'il ſera:

A =

A = à la ſomme de ces quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots . \nu$
B = à la ſomme de tous leurs produits de deux à deux
C = à la ſomme de leurs produits de trois à trois.
D = à la ſomme de leurs produits de quatre à quatre

⋮

& enfin

N = au produit de toutes enſemble, $\alpha \beta \gamma \delta \ldots \nu$.

Donc puiſque le nombre des ces égalités eſt = n, les valeurs des lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots . \nu$ en ſeront réciproquement déterminées.

§. 5. Quoiqu'il ſemble que la connoiſſance des racines imaginaires d'une équation ne puiſſe avoir aucune utilité, vu qu'elles ne fourniſſent point de ſolutions de quelque probleme que ce ſoit: neantmoins il eſt fort important dans toute l'analyſe de ſe rendre familier le calcul des quantités imaginaires. Car non ſeulement nous en acquerons une connoiſſance plus parfaite de la nature des équations; mais l'Analyſe des infinis en tire des ſecours très conſiderables. Car toutes les fois qu'il ſe preſente à intégrer une fraction, il en faut réſoudre le dénominateur dans tous ſes facteurs ſimples ſoit réels ou imaginaires, & de là on tire enfin l'intégrale, qui quoiqu'elle renferme des logarithmes imaginaires, on a des moyens de les réduire à des arcs de cercle réels. Outre cela il arrive ſouvent qu'une expreſſion, qui renferme des quantités imaginaires, ſoit neantmoins réelle, & dans ces cas le calcul des imaginaires eſt abſolument néceſſaire.

§. 6. Il eſt démontré dans l'Algebre, que lorſqu'une équation a des racines imaginaires, leur nombre eſt toujours pair, de ſorte que toute équation ou n'aura point du tout des racines imaginaires, ou elle en aura deux, ou quatre, ou ſix, ou huit &c. & jamais le nombre de toutes les racines imaginaires d'une équation ne ſauroit être impair. Mais on ſoutient de plus, que les racines imaginaires vont tellement de pair en pair, que tant la ſomme que le produit de deux devient réel. Ou ce qui revient au même, ſi $x + y\sqrt{-1}$ eſt un des facteurs imaginaires d'une équation, on ſoutient qu'il ſe trouvera toujours parmi les autres

un

un tel facteur $x-y\sqrt{-1}$ auſſi imaginaire, qui étant multiplié par celui-là $x+y\sqrt{-1}$ donne un produit réel. Or le produit de $x+y\sqrt{-1}$ par $x-y\sqrt{-1}$ étant $=xx+yy$, & la ſomme $=2x$, il eſt clair que l'un & l'autre ſont des quantités réelles.

§. 7. Pour mieux éclaircir cela, ſoit $2m$ le nombre des facteurs ſimples imaginaires d'une équation quelconque, puiſqu'on ſait que ce nombre eſt pair; & on ſoutient qu'on peut toujours ranger ces facteurs tellement deux à deux, que leurs produits deviennent réels. Ainſi ces facteurs imaginaires au nombre de $2m$ ſe réduiront à des facteurs réels au nombre de m, & ces derniers facteurs ne ſeront plus ſimples, mais de la forme $xx+px+q$: ils ſeront donc du ſecond degré. On dit donc que toute équation, ne pouvant etre réſoluë en des facteurs ſimples rééls, a toujours des facteurs réels du ſecond degré. Cependant perſonne, à ce que je ſache, n'a encore demontré aſſés rigoureuſement la verité de ce ſentiment: je tacherai donc d'en donner une démonſtration, qui ne ſoit aſſujettie à aucune exception.

§. 8. Or d'abord il eſt evident, que lorſqu'une équation n'a que deux facteurs ſimples imaginaires, leur produit eſt néceſſairement réel. Car le produit de ces deux facteurs multiplié par le produit de tous les autres, qu'on ſuppoſe réels, doit produire l'équation propoſée, c. à d. une quantité réelle, ce qui ſeroit impoſſible, ſi le produit des deux facteurs imaginaires n'étoit pas réel. On voit de même, que ſi une équation a quatre racines imaginaires, toutes les autres étant réelles, le produit de ces quatre facteurs imaginaires ſera auſſi réel. Et en général quel que ſoit le nombre des facteurs imaginaires d'une équation, leur produit doit etre néceſſairement une quantité réelle; donc ſi le nombre des facteurs imaginaires d'une équation eſt $=2m$, le produit de tous ces facteurs multipliés enſemble ſera de cette forme: $x^{2m}+ax^{2m-1}+bx^{2m-2}+cx^{2m-3}+$ &c. où tous les coëfficiens $a, b, c,$ &c. ſont des quantités réelles.

§. 9. Il faut donc commencer par prouver, qu'une équation du quatrième dégré $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, dont

toutes les racines ſont imaginaires, eſt toujours réſoluble en deux facteurs réels du ſecond degré $(xx+px+r)\ (xx+qx+s)=0$; car ſi toutes les racines ſont réelles, ou deux au moins, une telle réſolution n'a aucune difficulté. Mais ſi toutes les quatre ſont imaginaires la choſe eſt non ſeulement moins evidente, mais il y a même des cas, qui ne paroiſſent pas admettre une telle réſolution. Un très ſavant Géometre me propoſa autrefois cette équation:

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

par laquelle il vouloit prouver, que la réſolution en deux facteurs réels n'étoit pas toujours poſſible. Et en effet il paroit d'abord fort difficile de combiner de ces quatre facteurs ſimples imaginaires tellement deux à deux enſemble, que leurs produits deviennent réels.

§. 10. Le doute tiré de cette équation étant trop important, pour que je le puiſſe paſſer en donnant une démonſtration générale de la propriété, dont il s'agit, je m'en vai développer plus ſoigneuſement ce cas, avant que d'entreprendre cette demonſtration. Et d'abord puisque les coëfficiens de cette équation, qui ſont 1, 2, 4, 2, 1 tiennent le même ordre, en commençant par le devant ou par l'arriere, il eſt certain que l'équation propoſée eſt réſoluble en deux facteurs de cette forme:

$$(xx+px+1)\quad(xx+qx+1)$$

dont le produit $x^4+(p+q)\,x^3+(pq+2)\,xx+(p+q)\,x+1$ étant comparé avec la forme propoſée $x^4+2x^3+4x^2+2x+1$ fournit ces deux égalités $p+q=2$ & $pq+2=4$ ou $pq=2$. Donc il y aura $(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=4-4.\ 2=-4$, & partant $p-q=\sqrt{-4}=2\sqrt{-1}$: d'où nous tirons ces valeurs:

$$p=1+\sqrt{-1} \qquad \& \qquad q=1-\sqrt{-1}$$

de ſorte que l'équation propoſée:

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

eſt

eſt maintenant réduite à ces deux facteurs du ſecond degré:

$$\left(xx+(1+\sqrt{-1})x+1\right)\ \left(xx+(1-\sqrt{-1})x+1\right)=0$$

qui ſont à la verité imaginaires.

§. 11. Mais pour décider s'il eſt poſſible ou non, de réduire cette équation à deux facteurs réels du ſecond degré, il faut chercher ſes quatre facteurs ſimples, pour voir ſi l'on en peut combiner autrement deux à deux, afin qu'on parvienne à des produits rééls. Or le premier facteur double $xx+(1+\sqrt{-1})x+1$ donne ces deux facteurs ſimples:

$$x+\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-1})+\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}=0$$
$$x+\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-1})-\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}=0$$

& l'autre facteur double $xx+(1-\sqrt{-1})x+1$ donne ces deux facteurs ſimples:

$$x+\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-1})+\tfrac{1}{2}\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}=0$$
$$x+\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-1})-\tfrac{1}{2}\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}=0.$$

Il s'agit donc de voir, ſi le premier facteur ſimple étant multiplié par le troiſieme ou le quatrieme produit un facteur double réel ou non? puiſque nous voyons déjà, que le produit du premier par le ſecond eſt imaginaire.

§. 12. Cependant il n'eſt pas ſi aiſé de reconnoitre ſi les produits, qu'on trouve par ces multiplications du premier facteur par le 3me ou le 4me ſont réelles ou imaginaires, & la difficulté nait des termes imaginaires $\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}$ & $\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}$, donc on ne peut pas comparer l'imaginaire avec celui des autres nombres $1+\sqrt{-1}$ & $1-\sqrt{-1}$. Or je remarque que la formule $\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}$ peut ſe réduire à une telle forme $u+v\sqrt{-1}$, & alors l'autre formule $\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}$ deviendra égale à $u-v\sqrt{-1}$. Car faiſant ces égalités:

$$\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}=u+v\sqrt{-1}\ \&\ \sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}=u-v\sqrt{-1}$$

& prenant les quarrés, on obtiendra celles-cy:

$2\sqrt{-1}-4=uu-vv+2uv\sqrt{-1}$ & $-2\sqrt{-1}-4=uu-vv-2uv\sqrt{-1}$

d'où l'on tirera: $-4=uu-vv$ & $2\sqrt{-1}=2uv\sqrt{-1}$, ou bien $vv-uu=4$ & $uv=1$. Et enſuite on formera:

$(vv+uu)^2=(vv-uu)^2+4uuvv=16+4=20$; deſorte que $vv+uu=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. De là on trouvera enfin

$vv=\sqrt{5}+2$, $uu=\sqrt{5}-2$ & par conſéquent

$$v=\sqrt{(\sqrt{5}+2)} \quad \& \quad u=\sqrt{(\sqrt{5}-2)}.$$

§. 13. Ces deux valeurs de v & u étant réelles, ſubſtituons les dans les expreſſions des quatre facteurs ſimples trouvés cy-deſſus; & ces facteurs deviendront:

I. $x+\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1})+\frac{1}{2}(u+v\sqrt{-1})=x+\frac{1}{2}(1+u)+\frac{1}{2}(1+v)\sqrt{-1}$

II. $x+\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1})-\frac{1}{2}(u+v\sqrt{-1})=x+\frac{1}{2}(1-u)+\frac{1}{2}(1-v)\sqrt{-1}$

III. $x+\frac{1}{2}(1-\sqrt{-1})+\frac{1}{2}(u-v\sqrt{-1})=x+\frac{1}{2}(1+u)-\frac{1}{2}(1+v)\sqrt{-1}$

IV. $x+\frac{1}{2}(1-\sqrt{-1})-\frac{1}{2}(u-v\sqrt{-1})=x+\frac{1}{2}(1-u)-\frac{1}{2}(1-v)\sqrt{-1}$

Maintenant il eſt clair que le produit du premier par le troiſieme devient effectivement réél, de même que celui du ſecond par le quatrieme. Car on aura

le produit du I par le III $=(x+\frac{1}{2}(1+u))^2+\frac{1}{4}(1+v)^2$

le produit du II par le IV $=(x+\frac{1}{2}(1-u))^2+\frac{1}{4}(1-v)^2$

Voilà donc l'équation propoſée:

$$x^4+2x^3+4x^2+2x+1=0$$

réduite à ces deux facteurs rééls du ſecond degré

$$xx+(1+u)x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(u+v)+\tfrac{1}{4}(vv+uu)=0$$

$$xx+(1-u)x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(u+v)+\tfrac{1}{4}(vv+uu)=0$$

où eſt $v=\sqrt{(\sqrt{5}+2)}$; $u=\sqrt{(\sqrt{5}-2)}$ & $vv+uu=2\sqrt{5}$.

§. 14.

§. 14. Cet exemple nous conduit à un probleme plus général, qui ne manquera pas de nous éclaircir déjà conſidérablement ſur le ſujet en queſtion. *Ce probleme regarde cette équation du quatrieme degré, plus générale :*

$$x^4 + ax^3 + (b+2)xx + ax + 1 = 0$$

qu'il faut réſoudre en deux facteurs doubles ou du ſecond degré, qui ſoient réels.

Poſons dabord ces deux facteurs de la forme ſuivante

$$(xx + px + 1)\ (xx + qx + 1) = 0$$

& on voit d'abord qu'il faut qu'il ſoit:

$$p + q = a \ \& \ pq = b \text{ d'où l'on tirera}$$

$$p = \frac{a + \sqrt{(aa - 4b)}}{2} \ \& \ q = \frac{a - \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$$

Donc toutes les fois que $aa > 4b$ le probleme eſt reſolu, vu que les deux facteurs ſuppoſés deviennent réels.

§. 15. Mais lorsque $aa < 4b$, ces deux facteurs ſeront imaginaires, & ne ſatisferont pas à la queſtion. Dans ces cas il faut conſiderer les facteurs ſimples qui ſeront:

I. $x + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{(pp-4)} = 0$
II. $x + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{(pp-4)} = 0$
III. $x + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{(qq-4)} = 0$
IV. $x + \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{(qq-4)} = 0$

Poſons $4b = aa + cc$, puisque $aa < 4b$ & on aura

$$p = \frac{a + c\sqrt{-1}}{2} \quad \& \ q = \frac{a - c\sqrt{-1}}{2} \text{ donc:}$$

$$\sqrt{(pp-4)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - cc - 16 + 2ac\sqrt{-1})} \ \&$$
$$\sqrt{(qq-4)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - cc - 16 - 2ac\sqrt{-1})}$$

Ces deux formules étant imaginaires, ſoit:

$$V(aa-cc-16+2acV-1) = u+vV-1 \;\&$$
$$V(aa-cc-16-2acV-1) = u-vV-1$$

& de là nous tirerons:

$$uu-vv = aa-cc-16 \quad \& uv = ac$$

§. 16. Ces égalités nous fourniſſant celle-ci;

$(uu+vv)^2 = (aa-cc-16)^2 + 4aacc = (aa+cc)^2 - 32(aa-cc) + 256$

donc $vv+uu = V\left((aa+cc)^2 - 32(aa-cc) + 256\right)$

or cette quantité irrationelle renfermant aprés le ſigne radical la ſomme de deux quarrés, ſera toujours réelle, & meme ſa valeur ſera plus grande que $aa-cc-16 = uu-vv$ ou que $vv-uu = 16+cc-aa$. Nous aurons donc les valeurs ſuivantes réelles pour v & u, ſavoir:

$$v = V\frac{V\left((aa+cc)^2-32(aa-cc)+256\right)+16+cc-aa}{2}$$

$$u = V\frac{V\left((aa+cc)^2-32(aa-cc)+256\right)-16-cc+aa}{2}$$

& remettant pour cc ſa valeur $4b-aa$, on aura

$$v = V\left(V(4bb-16(aa-2b)+64)+8+2b-aa\right)$$
$$u = V\left(V(4bb-16(aa-2b)+64)-8-2b+aa\right)$$

ou bien:

$$v = V\left(2V((b+4)^2-4aa)+8+2b-aa\right)$$
$$u = V\left(2V((b+4)^2-4aa)-8-2b+aa\right)$$

§. 17. Ayant trouvé ces valeurs réelles pour v & u dans le cas où $4b > aa$ ou $4b = aa+cc$, nos quatre facteurs ſimples imaginaires ſeront.

I. $x+$

I. $x+\frac{1}{4}(a+c\sqrt{-1})+\frac{1}{4}(u+v)\sqrt{-1}=x+\frac{1}{4}(a+u)+\frac{1}{4}(c+v)\sqrt{-1}$

II. $x+\frac{1}{4}(a-c\sqrt{-1})-\frac{1}{4}(u+v)\sqrt{-1}=x+\frac{1}{4}(a-u)+\frac{1}{4}(c-v)\sqrt{-1}$

III. $x+\frac{1}{4}(a+c\sqrt{-1})+\frac{1}{4}(u-v)\sqrt{-1}=x+\frac{1}{4}(a+u)-\frac{1}{4}(c+v)\sqrt{-1}$

IV. $x+\frac{1}{4}(a-c\sqrt{-1})-\frac{1}{4}(u-v)\sqrt{-1}=x+\frac{1}{4}(a-u)-\frac{1}{4}(c-v)\sqrt{-1}$

d'où il eſt clair que les produits du I. facteur par le III & du II par le IV ſont réels, devenant :

$xx+\frac{1}{2}(a+u)x+\frac{1}{16}(aa+cc)+\frac{1}{16}(uu+vv)+\frac{1}{8}(au+cv)$

$xx+\frac{1}{2}(a-u)x+\frac{1}{16}(aa+cc)+\frac{1}{16}(uu+vv)-\frac{1}{8}(au+cv)$

où il faut remarquer que $aa+cc=4b$; $vv+uu=4\sqrt{((b+4)^2-4aa)}$

§. 18. Pour exprimer plus commodément la valeur de $au+cv$ cherchons en celle du quarré, $aauu+ccvv+2acuv$.

$$aauu=2aa\sqrt{((b+4)^2-4aa)}-8aa-2aab+a^4$$

$$ccvv=\left.\begin{matrix}+8b\\-2aa\end{matrix}\right\}\sqrt{((b+4)^2-4aa)}+32b+8bb-4aab-8aa-2aab+a^4$$

$2acuv=2aacc=8aab-2a^4$; donc nous aurons

$$(au+cv)^2=8b\sqrt{((b+4)^2-4aa)}+32b-16aa+8bb$$

& la racine quarrée ſe trouvera:

$$au+cv=2\sqrt{\left(2bb+8b-4aa+2b\sqrt{((b+4)^2-4aa)}\right)}$$

& partant les deux facteurs réels cherchés ſeront dans le cas $4b>aa$:

$$xx+\tfrac{1}{2}ax+\tfrac{1}{2}x\sqrt{\left(2\sqrt{((b+4)^2-4aa)}-8-2b+aa\right)}$$
$$+\tfrac{1}{4}b+\tfrac{1}{4}\sqrt{((b+4)^2-4aa)}+\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(2bb+8b-4aa+2b\sqrt{((b+4)^2-4aa)}\right)}$$

$$xx+\tfrac{1}{2}ax-\tfrac{1}{2}x\sqrt{\left(2\sqrt{((b+4)^2-4aa)}-8-2b+aa\right)}$$
$$+\tfrac{1}{4}b+\tfrac{1}{4}\sqrt{((b+4)^2-4aa)}-\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(2bb+8b-4aa+2b\sqrt{((b+4)^2-4aa)}\right)}$$

§. 19. Par ce cas particulier on comprendra plus aiſément ce que je veux prouver en général, c'eſt que toute équation, de quelque degré

degré qu'elle ſoit, eſt toujours réſoluble en des facteurs réels ou ſimples ou doubles. Ou puisque deux facteurs ſimples joints enſemble produiſent un facteur double, il faut démontrer que toute équation d'un degré pair comme

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \&c. \ldots + N = 0$$

eſt réſoluble en m facteurs rééls doubles de la forme $xx + px + r$, & qu'une équation d'un degré impair comme

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \ldots + N = 0$$

a premièrement un facteur ſimple réel, & enſuite m facteurs doubles auſſi tous réels. Pour cet effet je développerai les propoſitions ſuivantes, qui conduiront à la démonſtration de ce que je viens d'avancer.

Theoreme. I.

§. 20. *Toute équation d'un degré impair dont la forme généra'e eſt:*

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots + N = 0$$

a toujours une racine reelle au moins, & ſi elle en a pluſieurs, leur nombre ſera impair.

DEMONSTRATION.

Qu'on poſe $x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \ldots + N = y$ & qu'on conſidére la ligne courbe exprimée par cette équation: & il eſt évident qu'a chaque abſciſſe x ne répond qu'une ſeule appliquée y qui ſera toujours réelle; & que là où l'appliquée y evanouit, la valeur de l'abſciſſe x ſera une racine de l'équation propoſée. Donc cette équation aura autant de racines réelles qu'il y a d'endroits, où l'appliquée y évanouit, ce qui arrive là, où la courbe traverſe l'axe des abſciſſes; deſorte que le nombre des racines réelles ſera egal au nombre des interſections de la courbe avec l'axe, ſur lequel on prend les abſciſſes. Pour juger donc du nombre de ces interſections, poſons premierement l'abſciſſe x poſitive & infiniment grande ou $x = \infty$, & il

eſt

eſt clair, qu'il deviendra alors $y = \infty^{2m+1} = \infty$, d'où il s'enſuit que la branche de la courbe, qui répond aux abſciſſes poſitives infinies, ſe trouve au deſſus de l'axe, puiſque ſes appliquées y ſont poſitives. Or poſant les abſciſſes negatives & auſſi infinies ou $x = -\infty$, il ſera $y = (-\infty)^{2m+1} = -\infty$; donc les appliquées ſeront ici negatives, & la branche de la courbe ſe trouvera au deſſous de l'axe. Cette branche étant continue avec l'autre ſituée au deſſus de l'axe, il faut abſolument que la courbe traverſe quelque part l'axe, & ſi elle le traverſe en pluſieurs points, le nombre de ces points doit être impair. D'où il s'enſuit que l'équation propoſée aura neceſſairement une racine réelle au moins, & ſi elle en a pluſieurs, que leur nombre ſera toujours impair, C.Q.F.D.

COROLLAIRE.

§. 21. Donc puiſque le nombre de toutes les racines de l'équation propoſée eſt $= 2m+1$ ou impair, & que le nombre des racines réelles eſt auſſi impair, il s'enſuit que le nombre des racines imaginaires, s'il y en a, ſera toujours pair.

Theoreme. II.

§. 22. *Toute équation d'un degré pair, dont la forme générale eſt:*

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \ldots + N = 0$$

ou n'aura aucune racine réelle, ou ſi elle a des racines réelles, leur nombre ſera toujours pair.

DEMONSTRATION.

Conſidérons encore la courbe exprimée par cette équation

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \ldots + N = y$$

qui ne conſiſtera que d'un ſeul trait continu, puisque à chaque abſciſſe x il répond toujours une ſeule appliquée. Poſons $x = +\infty$ & il ſera auſſi $y = +\infty$; donc la branche de la courbe, qui répond aux abſciſſes poſitives infinies, ſera ſituée au deſſus de l'axe. Or poſant $x = -\infty$, on aura pareillement $y = (-\infty)^{2m} = +\infty$, de ſorte que la branche de la courbe, qui repond aux abſciſſes negatives infinies, ſe trouvera auſſi au deſſus de l'axe. Donc il ſera poſſible que la courbe ne traverſe nulle part l'axe des abſciſſes; & ſi elle paſſe quelque part par l'axe, pour deſcendre dans la région au deſſous, il faut qu'elle y repaſſe pour retourner dans celle de deſſus. Par conſéquent ſi la courbe traverſe l'axe, il faut que le nombre de toutes les interſections ſoit pair. Donc puisque chaque interſection donne une racine réelle de l'équation propoſée, il s'enſuit ou qu'elle n'aura point du tout de racines réelles, ou ſi elle en a, que leur nombre ſera toujours pair. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

§. 23. Puisque le nombre de toutes les racines, tant réelles qu'imaginaires, de l'équation propoſée eſt $= 2m$, & partant pair, & que le nombre des racines réelles, ſi elle en a, eſt auſſi pair, il s'enſuit que le nombre des racines imaginaires, ſi elle en a, eſt auſſi pair.

SCHOLIE.

§. 24. Ces deux Theoremes avec leurs démonſtrations ſont déjà ſi connus, que j'aurois pu m'y rapporter ſans les détailler. Mais comme ils renferment le fondement de toute la Theorie, dont il s'agit ici: que le nombre de toutes les racines imaginaires d'une équation quelconque eſt toujour pair: j'ai cru en devoir tirer le commencement; & cela d'autant plus que le theoreme ſuivant, qui n'eſt pas ſi généralement connu, demande une démonſtration ſemblable.

Theoreme III.

§. 25. *Toute équation d'un degré pair quelconque, où le dernier terme, ou l'abſolu, a une valeur negative, comme*

x^{2m}

$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \ldots\ldots - OO = o$

a toujours deux racines réelles au moins, l'une poſitive & l'autre negative.

DEMONSTRATION.

Poſant $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \ldots\ldots - OO = y$ pour conſidérer la courbe exprimée par cette équation, nous venons de voir, que cette courbe s'etend des deux cotés à l'infini au deſſus de l'axe. Or poſant $x = o$, nous aurons $y = -OO$, & partant le point de la courbe qui répond à $x = o$, ſera au deſſous de l'axe: il faut donc que la courbe paſſe de ce point de l'un & l'autre coté par l'axe pour monter au deſſus. Donc puisque chaque interſection donne une racine réelle de l'équation propoſée, & que de ces deux interſections l'une doit répondre à une abſciſſe x affirmative, l'autre à une negative, il eſt certain que l'équation propoſée aura au moins deux racines réelles, l'une poſitive, l'autre negative. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

§. 26. Cette démonſtration nous fait auſſi comprendre, que quand une équation ſemblable à la propoſée aura pluſieurs racines réelles poſitives, leur nombre ſera impair, de même le nombre de toutes les racines réelles negatives ſera auſſi impair.

Theoreme IV.

§. 27. *Toute équation du quatriéme degré, comme*

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = o.$$

ſe peut toujours décompoſer en deux facteurs réels du ſecond degré.

DEMONSTRATION.

On ſait que poſant $x = y - \frac{1}{4}A$, cette équation ſe change dans une autre du même degré, ou le ſecond terme manque; & comme cette transformation ſe peut toujours faire, ſuppoſons que dans l'équation

propoſée le ſecond terme manque déjà, & que nous ayons cette équation

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

à réſoudre en deux facteurs réels du ſecond degré; & il eſt d'abord clair, que ces deux facteurs ſeront de cette forme

$$(xx + ux + \alpha)\ (xx - ux + \beta) = 0$$

dont comparant le produit avec l'équation propoſée, nous aurons :

$$B = \alpha + \beta - uu;\ C = (\beta - \alpha)u;\ D = \alpha\beta$$

d'où nous tirerons :

$$\alpha + \beta = B + uu;\ \beta - \alpha = \frac{C}{u}$$

& partant $2\beta = uu + B + \frac{C}{u}$, & $2\alpha = uu + B - \frac{C}{u}$

ayant donc $4\alpha\beta = 4D$, nous obtiendrons cette équation

$$u^4 + 2Buu + BB - \frac{CC}{uu} = 4D \quad \text{ou bien}$$

$$u^6 + 2Bu^4 + (BB - 4D)uu - CC = 0$$

d'où il faut chercher la valeur de u. Or puiſque le terme abſolu $-CC$ eſt eſſentiellement negatif, nous venons de démontrer, que cette équation a au moins deux racines réelles ; prenant donc l'une ou l'autre pour u, les valeurs α & β ſeront également réelles, & par conſéquent les deux facteurs ſuppoſés du ſecond degré $xx + ux + \alpha$ & $xx - ux + \beta$ ſeront réels. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 28. Toute expreſſion donc du quatriéme degré,

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

quoique tous ſes quatre facteurs ſimples ſoient imaginaires, ſe peut toujours décompoſer en deux facteurs réels du ſecond degré : ou bien

chacun

chacun des quatre facteurs ſimples a parmi les autres ſon compagnon, par lequel étant multiplié il produit un produit réel.

COROLL. II.

§. 29. Et, ſi une expreſſion d'un degré quelconque n'a que quatre facteurs ſimples imaginaires, puisque leur produit eſt réel, & compris dans cette forme $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, il eſt auſſi certain, que ce produit eſt réſoluble en deux facteurs réels du ſecond degré, dont chacun renferme deux facteurs ſimples imaginaires.

COROLL. III.

§. 30. De là il eſt auſſi évident, qu'une équation quelconque du cinquiéme degré eſt toujours réſoluble en trois facteurs réels, dont un eſt ſimple & deux doubles ou du ſecond degré. Car cette équation ayant une racine réelle, aura un facteur ſimple réel, & l'autre facteur étant du quatriéme degré, ſe décompoſe en deux facteurs doubles réels.

COROLL. IV.

§. 31. La réſolution des équations en facteurs réels, ou ſimples ou doubles, eſt donc prouvée pour les équations du cinquiéme degré & pour tous les degrés inferieurs. Mais ce theoreme n'eſt pas ſuffiſant à prouver cette réſolution pour aucun degré ſuperieur, à moins que le nombre des racines imaginaires ne ſoit plus petit que 6. Car alors ce nombre ſera ou 4, ou 2, ou 0, & dans tous ces cas la poſſibilité de cette réſolution eſt evidente.

SCHOLIE I.

§. 32. J'ai déja prouvé cy deſſus que cette équation du quatriéme degré, $x^4 + ax^3 + (b+2)x^2 + ax + 1 = 0$, qui n'eſt qu'un cas particulier de la générale de ce degré, que je viens de conſidérer ici, eſt toujours réſoluble en deux facteurs réels du ſecond degré. Or cette réſolution, qui a été aſſez embarraſſante dans le cas $4b > aa$, ſe déduit immediatement de la methode employée dans ce theoreme, ſans avoir égard à la forme des racines imaginaires. Cet uſage me paroit aſſez important, pour que je faſſe l'application de la

réſolution générale à ce cas. Or pour éviter les fractions poſons $a = 4c$ & $b > 4cc$, de ſorte que l'équation à réſoudre ſoit:

$$x^4 + 4cx^3 + (b+2)xx + 4cx + 1 = 0.$$

Maintenant pour ôter le ſecond terme ſoit $x = y - c$ & notre équation prendra cette forme:

$$y^4 + (2+b-6cc)y^2 + (8c^3 - 2bc)y + 1 - 2cc + bcc - 3c^4 = 0$$

dont ſuppoſant les facteurs réels du ſecond degré

$$(yy + uy + \alpha)\ (yy - uy + \beta) = 0$$

à cauſe de

$$B = 2 + b - 6cc;\ C = 8c^3 - 2bc;\ \&\ D = 1 - 2cc + bcc - 3c^4$$

pour trouver u nous aurons cette équation à réſoudre:

$$u^6 + (4 + 2b - 12cc)u^4 + (bb + 4b - 16bcc - 16cc + 48c^4)u^2 - 4cc(4cc - b)^2 = 0$$

qui étant diviſée par $uu + b - 4cc$ donne

$$u^4 + (4 + b - 8cc)u^2 + 16c^4 - 4bcc = 0$$

Or le premier facteur $uu + b - 4cc$ étant poſé $= 0$, ne donne que des valeurs imaginaires pour u, à cauſe de $b > 4cc$: donc il faut chercher quelque valeur réelle de l'autre équation, d'où l'on tire

$$uu = -2 - \tfrac{1}{2}b + 4cc \pm \sqrt{((2+\tfrac{1}{2}b)^2 - 16cc)}$$

& la valeur réelle de u ſera:

$$u = \sqrt{\left(\sqrt{((2+\tfrac{1}{2}b)^2 - 16cc)} - 2 - \tfrac{1}{2}b + 4cc\right)}$$

ou bien remettant aa pour $16cc$

$$u = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)} - 8 - 2b + aa\right)}$$

d'où l'on trouve les mêmes facteurs, qui ont été aſſignés cy-deſſus.

SCHOLIE II.

§. 33. La force de la démonſtration de ce Theoreme revient à ce que l'inconnue u ſe detérmine par une équation du 6me degré, & que le dernier terme de cette équation eſt eſſentiellement negatif.

L'une

L'une & l'autre de ces deux circonſtances ſe peut découvrir par le ſeul raiſonnement, ſans qu'on ait beſoin de chercher l'équation même, qui renferme l'inconnue u. Donc puisque dans la ſuite, où je paſſerai à des équations de plus hauts degrés, il ſeroit trop difficile & même impoſſible de trouver l'équation, par laquelle l'inconnue u eſt déterminée; il ſera important de découvrir les deux circonſtances mentionnées par le ſeul raiſonnement, pour l'équation propoſée du quatriéme degré, afin de frayer le chemin pour mettre en uſage ce même raiſonnement, lorsque l'équation propoſée ſera d'un plus haut degré.

Soit donc l'équation propoſée dégagée déjà du ſecond terme

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

& poſant les quatre racines de cette équations

$$x = \mathfrak{a}\,; \quad x = \mathfrak{b}\,; \quad x = \mathfrak{c}\,; \quad x = \mathfrak{d}$$

il eſt d'abord clair que la ſomme de ces quatre racines

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} \text{ ſera égale à zero.}$$

Enſuite poſant en général un des facteurs doubles de cette équation $xx - ux + \beta$ ou $xx - ux + \beta = 0$, il eſt certain que u ſera la ſomme de deux racines quelconques des quatre ſuppoſées $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$. Donc cette lettre u regardée comme notre inconnüe peut avoir autant de valeurs differentes, qu'il y a de diverſes combinaiſons de deux lettres priſes de ces quatre $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$. Or ce nombre de combinaiſons étant comme on ſait $= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$, la lettre u eſt ſuſceptible de 6 valeurs differentes, & non de pluſieurs. Donc la lettre u ſera déterminée par une équation du 6me degré, qui aura les ſix racines ſuivantes:

I. $u = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$; II. $u = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}$; III. $u = \mathfrak{a} + \mathfrak{d}$

IV. $u = \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$; V. $u = \mathfrak{b} + \mathfrak{d}$; VI. $u = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$

Donc puisque $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = 0$, ſi nous poſons les trois premiéres de ces ſix racines:

I. $u = p$; II. $u = q$; III. $u = r$

les

les trois derniéres ſeront :

$$\text{IV. } u = -p\,; \quad \text{V. } u = -q\,; \quad \text{VI. } u = -r$$

de ſorte que le negatif de chaque valeur de u ſera auſſi une valeur de u.

Sachant maintenant ces ſix racines, l'équation qui les fournira toutes ſera :

$$(u-p)\ (u-q)\ (u-r)\ (u+p)\ (u+q)\ (u+r) = 0$$

ou combinant par toutes les deux enſemble, dont l'une eſt la negative de l'autre, nous aurons :

$$(uu-pp)\quad (uu-qq)\quad (uu-rr) = 0.$$

ce qui donnera une équation du ſixieme degré, ou toutes les puiſſances impaires de u manquent, tout comme nous l'avons trouvée dans la démonſtration du Theoreme.

Mais je remarque de plus, que le dernier terme conſtant de cette équation ſera $= -pp.-qq.-rr. = -ppqqrr$, lequel étant donc un quarré avec le ſigne $-$, ſera eſſentiellement negatif. D'où il s'enſuit que cette équation aura neceſſairement au moins deux racines réelles, dont l'une ou l'autre priſe pour u donnera un facteur réel double de l'équation propoſée. Voila donc une autre demonſtration du Theoreme propoſé, à laquelle ſeront ſemblables celles des theoremes ſuivans.

Or on m'objectera ſans doute, que j'ai ſuppoſé ici, que la quantité pqr étoit une quantité réelle, & que ſon quarré $ppqqrr$ étoit affirmatif ; ce qui étoit encore douteux, vu que les racines $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, étant imaginaires, il pourroit bien arriver, que le quarré de la quantité pqr, qui en eſt compoſée, fût negatif. Or je reponds à cela, que ce cas ne ſauroit jamais avoir lieu ; car quelque imaginaires que ſoient les racines $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, on ſait pourtant qu'il doit y avoir

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d} = 0$$
$$\mathfrak{ab}+\mathfrak{ac}+\mathfrak{ad}+\mathfrak{bc}+\mathfrak{bd}+\mathfrak{cd} = B$$
$$\mathfrak{abc}+\mathfrak{abd}+\mathfrak{acd}+\mathfrak{bcd} = C$$
$$\mathfrak{abcd} = D$$

ces

ces quantités B. C. D. étant réelles. Mais puisque $p = a + b$; $q = a + c$; $r = a + b$, leur produit

$$pqr = (a+b)\ (a+c)\ (a+b)$$

eſt déterminable, comme on ſait, par les quantités B, C, D, & ſera par conſéquent réel: tout comme nous avons vu, qu'il eſt effectivement $pqr = C$, & $pp\,qq\,rr = CC$. On reconnoitra aiſément de même, que dans les plus hautes équations cette même circonſtance doit avoir lieu, & qu'on ne ſauroit me faire des objections de ce coté contre les démonſtrations ſuivantes.

Theoreme V.

§. 34. *Toute équation du 8me degre eſt toujours réſoluble en deux facteurs réels du quatriéme degré.*

DEMONSTATION.

Ayant fait évanouir le ſecond terme, l'équation propoſée du 8me degré aura cette forme:

$$x^8 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H = 0$$

dont les deux facteurs du quatriéme degré en général ſeront

$$x^4 - ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$
$$x^4 + ux^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta = 0$$

Si nous égalons le produit de ces deux facteurs à l'équation propoſée, nous obtiendrons 7 egalités, c'eſt à dire préciſément autant qu'il y a de coëfficiens inconnus u, α, β, γ, δ, ε, ζ. De ces égalites on eliminera ſucceſſivement les lettres α, β, γ, δ, ε, ζ, ce qui ſe pourra faire, comme on ſait, ſans qu'on ait beſoin d'aucune extraction de racine; de ſorte que les valeurs de ces lettres ſeront toutes exprimées réellement par les quantités connuës B, C, D, E, F, G, H, & l'inconnuë u: & enfin on parviendra à une équation, qui ne renfermera plus que l'inconnuë u avec les quantités connuës, de laquelle il faut chercher la valeur de u; & cette valeur étant trouvée réelle, les valeurs des lettres eliminées

α, β, γ, &c. ſeront auſſi réelles, & partant les deux facteurs ſuppoſés du quatriéme degré également réels.

Il s'agit donc de trouver l'équation, qui nous détermine la valeur de u. Or en général u exprimera la ſomme de quatre racines quelconques de l'équation propoſée, dont le nombre de toutes les racines étant $= 8$, la lettre u aura autant de valeurs differentes, qu'il y a de diverſes combinaiſons de 4 racines priſes des huit de l'équation; ainſi le nombre de toutes les valeurs de u ſera $= \frac{8.7.6.5.}{1.2.3.4.} = 70$. & partant l'inconnuë u ſera déterminée par une équation du 70me degré. De plus ſi nous ſuppoſons que p ſoit une des valeurs de u, p ſera la ſomme de quelques quatre racines de l'équation propoſée, & la ſomme des autres quatre ſera $= -p$, puiſque la ſomme de toutes les huit racines eſt $= 0$. Ainſi ſi $u - p$ eſt un facteur de l'équation du 70me degré, $u + p$ en ſera un auſſi, & partant joignant ces deux facteurs enſemble, $uu - pp$ ſera un facteur double ou du ſecond degré de ladite équation du 70me degré. Par conſéquent cette équation aura 35 facteurs de la forme $uu - pp$, ou elle ſera un tel produit

$$(uu - pp)\ (uu - qq)\ (uu - rr)\ (uu - ss)\ \&c.$$

le nombre de ces facteurs étant $= 35$. Donc le dernier terme ou le terme abſolu de cette équation ſera le produit de 35 quarrés negatifs, & par conſéquent auſſi un quarré negatif comme $-ppqqrrss$ &c. à cauſe du nombre 35 impair. Or la racine de ce quarré, $pqrs$ &c. eſt une quantité réelle déterminable par les coëfficiens B, C, D, E, &c de l'équation propoſée, & partant ſon quarré $ppqqrrss$ &c. une quantité poſitive. Donc le coëfficient inconnu u étant déterminé par une équation du 70me degré, dont le dernier terme eſt eſſentiellement negatif, cette équation aura au moins deux valeurs réelles, dont l'une étant poſée pour u fournira un facteur réel du 4me degré de l'équation propoſée, qui ſera par conſéquent réſoluble en deux facteurs réels du 4me degré. C. Q. F. D.

COROLL.

COROLL. I.

§. 35. Or chaque facteur du 4me degré étant réſoluble en deux facteurs réels du ſecond degré, il s'enſuit que toute équation du huitiéme degré eſt toujours réſoluble en quatre facteurs réels du ſecond degré de la forme $xx + px + q$.

COROLL. II.

§. 36. On voit auſſi que toute équation du neuviéme degré eſt réſoluble en un facteur ſimple réel & quatre facteurs doubles ou du ſecond degré également réels.

COROLL. III.

§. 37. Cette propoſition nous fait auſſi voir, que la même réſolution en facteurs réels ou ſimples ou doubles, doit avoir lieu dans toutes les équations du 6me ou 7me degré. Car on n'a qu'à multiplier une telle équation, ou par xx, ou par x, pour la réduire au huitiéme degré.

SCHOLIE. I.

§. 38. Ayant multiplié une équation du ſixiéme degré par xx, pour avoir une du 8me degré, les deux facteurs du 4me degré de celle-cy renfermeront ce multiplicateur xx, qu'il en faut par conſéquent retrancher, pour avoir les facteurs de l'équation propoſée du 6me degré. Or il arrivera, ou que l'un des deux facteurs du 4me degré contiendra xx, ou que chacun en contienne x: dans le premier cas on aura aprés la diviſion par xx un facteur réel du ſecond degré & un du 4me; qui étant ſéparé en deux du ſecond, on aura les trois facteurs doubles de l'équation propoſée. Or dans l'autre cas diviſant chaque facteur par x, on obtiendra deux facteurs réels du 3me degré, dont chacun renferme un facteur ſimple réel: de ſorte que dans l'un & l'autre cas l'équation du 6me degré ſe réſout en facteurs réels, ou ſimples, ou doubles. On verra de même, que les équations du 7me degré ſont également réſolubles en tels facteurs, puiſqu'on ſait que ces équations ont toujours un facteur ſimple réel, par lequel étant diviſées elles ſeront réduites à des équations du 6me degré.

SCHOLIE. 2.

§. 39. S'il paroit encore douteux, ſi après avoir trouvé une valeur réelle de u, les autres coëfficiens $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. ſeront auſſi déterminés par des expreſſions réelles ; vu qu'il pourroit arriver que quelques uns renfermeroient des quantités irrationelles, qui pourroient devenir imaginaires. Mais pour lever ce doute, on n'a qu'à regarder u comme une quantité deja connuë, deſorte que le nombre des égalites, auxquelles il faut ſatisfaire, ſurpaſſe d'une unité le nombre des inconnuës $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. qui ſont à déterminer. Ainſi on éliminera l'une après l'autre de ces quantités, tant que cela ſe pourra faire ſans extraire des racines; cela étant fait, il reſtera un certain nombre d'égalités, & le nombre des inconnuës ſera d'une unité moindre. Suppoſons qu'il reſte encore à déterminer quelques inconnuës, dont chacune monte dans les équations a pluſieurs dimenſions. Dans ce cas on peut toujours combiner deux égalités tellement enſemble, qu'il en réſulte une, où l'inconnuë à déterminer n'aura pas plus d'une dimenſion, & de là on tirera ſa valeur par une expreſſion rationelle. Suivant cette methode on parviendra enfin à deux égalités, qui contiennent la derniere quantité inconnuë, & à quelque dignité qu'elle y monte, on a dans l'algébre des moyens d'en former par la voïe de combinaiſon d'autres équations, où les puiſſances de l'inconnuë ſeront ſucceſſivement abbaiſſées, & enfin on parviendra à une équation, dans laquelle ne ſe trouvera que la premiere puiſſance de l'inconnuë, qui en ſera par conſéquent déterminée par une expreſſion rationelle; laquelle étant ſubſtituée dans les valeurs des autres coëfficiens déja trouvées, fournira auſſi pour ceux-cy des expreſſions rationelles. De ſorte que lorsqu'on aura trouvé pour u une valeur réelle, les valeurs de tous les autres coëfficiens le deviendront auſſi néceſſairement.

Theoreme VI.

§. 40. *Toute équation du* 16me *degré eſt toujours réſoluble en deux facteurs réels du* 8me *degré.*

DEMON-

DEMONSTRATION.

Ayant fait évanouïr le ſecond terme de l'équation, elle aura cette forme $x^{16} + Bx^{14} + Cx^{13} + Dx^{12} + \&c. \ldots\ldots = 0.$ & le nombre des coëfficients B, C, D, &c. ſera $= 15$. Suppoſant donc ſes deux facteurs du 8me degré.

$$x^8 - ux^7 + \alpha x^6 + \beta x^5 + \gamma x^4 + \delta x^3 + \varepsilon x^2 + \zeta x + \eta = 0$$
$$x^8 + ux^7 + \theta x^6 + \iota x^5 + \varkappa x^4 + \lambda x^3 + \mu x^2 + \nu x + \xi = 0$$

ſi l'on égale le produit de ces deux facteurs à l'équation propoſée, on obtiendra 15 egalités, desquelles il faut chercher les valeurs des coëfficients $u, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. dont le nombre eſt auſſi $= 15$, de ſorte que c'eſt un probleme déterminé. Donc ſi nous pour le commencement regardons le coëfficient u comme connu, nous aurons une egalité de plus, que des inconnües $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. & partant on en pourra tirer leurs valeurs déterminées par u & B, C, D, E, &c. ſans avoir beſoin d'aucune extraction de racine: ces valeurs ſeront donc rationnelles & par conſéquent auſſi réelles pourvu qu'on ait une valeur réelle pour u. Tout revient donc à démontrer, qu'il eſt toujours poſſible de trouver une valeur réelle pour le coëfficient u. Or ayant eliminé ſucceſſivement toutes les lettres α, β, γ, δ, &c. on parviendra enfin à une équation compoſée des coëfficiens connus B, C, D, E, &c. & de l'inconnuë u, qui y montera à un certain degré de dimenſions, dont l'expoſant ſe conclura par ce raiſonnement. La quantité u marquant en général la ſomme de 8 racines quelconques priſes des 16 racines de l'équation propoſée, il eſt clair par les regles des combinaiſons, que la quantité u eſt ſuſceptible d'autant de valeurs differentes, qu'il y a d'unités dans cette formule:

$$\frac{16.15.14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6.7.8} = 12870$$

Donc l'équation, qui déterminera les valeurs de l'inconnuë u ſera néceſſairement du 12870me degré. Or puisque la ſomme de toutes les 16

racines de l'équation propoſée eſt = 0, ſi la ſomme de 8 quelconques, c. à. d. une valeur de u eſt $= p$, la ſomme des 8 autres ſera $= -p$, & partant $-p$ eſt auſſi une valeur de u. Ou bien ſi $u-p$ eſt un facteur de l'équation, qui détermine u, $u+p$ en ſera auſſi un facteur, donc leur produit $uu-pp$ renfermant les deux racines p & $-p$ en ſera auſſi un facteur. Par conſéquent cette équation ſera compoſée de $\frac{1}{2}.12870 = 6435$ facteurs de la forme $uu-pp$, ou elle ſera le produit de tels facteurs :

$$(uu-pp)\ (uu-qq)\ (uu-rr)\ (uu-ss)\ \&c. = 0$$

le nombre de ces facteurs étant $= 6435$. Or ce nombre étant impair le dernier terme ou l'abſolu de cette équation ſera $= -pp\,qq\,rr\,ss$ &c. Poſant donc $pqrs$ &c. $=$ P, il eſt certain, que P eſt déterminable par les coëfficiens B, C, D, E, &c. en ſorte qu'il en eſt une fonction rationnelle, & partant réelle. Donc le dernier terme de notre équation, qui doit ſervir à déterminer u, ſera $= -$ PP, c. à. d. il ſera eſſentiellement negatif. De là il s'enſuit que cette équation aura néceſſairement au moins deux racines réelles, l'une affirmative & l'autre negative, qui par conſéquent étant priſes pour $+u$ & $-u$ fourniront deux facteurs réels du 8me degré de l'équation propoſée. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 41. Donc puisque chacun de ces deux facteurs du 8me degré eſt réſoluble en 4 facteurs réels du 2 degré, il eſt clair que toute équation du 16 degré eſt réſoluble en 8 facteurs doubles réels : & une équation du 17me degré ayant certainement un facteur ſimple réel, elle aura outre cela encore 8 facteurs doubles réels.

COROLL. II.

§. 42. La même réſolubilité en facteurs réels, ou ſimples, ou doubles, aura auſſi lieu en toutes les équations d'un degré inferieures que le 16me. Car multipliant une telle équation par x, ou x^2, ou x^3 &c. pour l'elever au 16 degré, on en cherchera les 8 facteurs doubles réels, desquels retranchant les facteurs x, qui y ont été introduits par

la

la multiplication, on aura les facteurs réels de la propoſée, qui ſeront ou ſimples ou doubles.

COROLL. III.

§. 43. Il eſt donc démontré, que toutes les équations, qui ne ſurpaſſent pas le 17me degré, ſont toujours réſolubles en facteurs réels, ou ſimples, ou doubles.

SCHOLIE.

§. 44. Si nous examinons la force de ces démonſtrations, nous trouverons qu'elle conſiſte en ce que l'équation finale qui renferme la ſeule inconnüe u, devient d'un degré pair & que ſon dernier terme eſt un quarré negatif; ce qui eſt arrivé dans la réſolution des équations du 4me, 8me & 16me degré. On s'appercevra de même, que la derniere circonſtance du terme abſolu negatif ne ſauroit avoir lieu, à moins que l'expoſant du degré de l'équation pour u ne ſoit un tel nombre pair comme $2n$, que ſa moitié n eſt un nombre impair: car le dernier terme étant le produit de n quarrés negatifs, deviendroit poſitif, ſi n étoit un nombre pair. Et c'eſt la raiſon que notre démonſtration ne ſauroit être appliquée à des équations du 12me ou 20me degré; car ſi nous voulions opérer de la même maniere ſur une équation par exemple du 20 degré, en la décompoſant en deux facteurs du 10 degré comme $x^{10} + ux^9 +$ &c. & $x^{10} - ux^9 +$ &c. aprés avoir fait évanouïr le ſecond terme, on verroit que la quantité u dût etre déterminée par une équation du

$$\frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} = 4.11.13.17.19 \text{ degré}$$

dont la moitié étant encore un nombre pair, produiroit le dernier terme de l'équation affirmatif, & on n'en ſauroit plus tirer la concluſion dont nous avons beſoin. Or pour peu que nous réflechiſſons ſur cette circonſtance, nous trouverons, que le dernier terme ne devient néceſſairement negatif, que lorsque l'équation propoſée eſt d'un degré, dont l'expoſant eſt une puiſſance de 2, & partant la maniere de démon-

montrer, dont je me ſers ici, n'aura lieu aprés, que dans les équations du 32me & 64me & 128me &c. degré. Or ces cas ſont ſuffiſans pour notre deſſein, puiſqu'ayant démontré la réſolubilité en facteurs réels pour des équations d'un degré quelconque, elle vaut auſſi pour toutes les équations d'un degré inferieur.

Theoreme VII.

§. 45. *Toute équation d'un degré, dont l'expoſant eſt une puiſſance du binaire comme* 2^n (*n étant un nombre entier plus grand que* 1) *eſt réſoluble en deux facteurs réels du degré* 2^{n-1}.

DEMONSTRATION.

Ayant fait évanouir le ſecond terme l'équation dont il s'agit, ſera de cette forme :

$$x^{2^n} + Bx^{2^n-2} + Cx^{2^n-3} + Dx^{2^n-4} + \&c. = 0.$$

où le nombre des coëfficiens B, C, D, &c. eſt $= 2^n - 1$. Suppoſons maintenant les deux facteurs cherchés :

$$x^{2^{n-1}} - ux^{2^{n-1}-1} + \alpha x^{2^{n-1}-2} + \beta x^{2^{n-1}-3} + \&c. = 0$$

$$x^{2^{n-1}} + ux^{2^{n-1}-1} + \lambda x^{2^{n-1}-2} + \mu x^{2^{n-1}-3} + \&c. = 0$$

où le nombre des coëfficiens à déterminer u, α, β, &c. eſt auſſi $= 2^n - 1$. Or la comparaiſon du produit de ces deux facteurs avec la propoſée fournit autant d'égalités, de ſorte que toutes les lettres α, β, γ, &c. ſe pourront déterminer par les connuës B, C, D, &c. & u reellement ſans extraction de racines ; or enfin pour déterminer l'inconnuë u, on parviendra à une équation, qui aura pour expoſant de ſon degré,

$$\frac{2^n (2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)(2^n-4)\ldots(2^{n-1}+1)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5 \quad \ldots \quad 2^{n-1}}$$

comme

comme on ſait par les regles de combinaiſon. Soit N cet expoſant du degré de l'équation pour u, & en renverſant l'ordre des facteurs du denominateur, on aura:

$$N = \frac{2^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^2-1}{2^{n-1}-1} \cdot \frac{2^n-2}{2^{n-1}-2} \cdot \frac{2^n-3}{2^{n-1}-3} \cdot \frac{2^n-4}{2^{n-1}-4} \cdots \frac{2^{n-1}+1}{1}.$$

& abaiſſant chaque fraction aux plus petits termes:

$$N = 2 \cdot \frac{2^n-1}{2^{n-1}-1} \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}-1} \cdot \frac{2^n-3}{2^{n-1}-3} \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}-1} \cdots \frac{2^{n-1}+1}{1}.$$

Or il eſt ſeur que ce nombre N eſt entier, & puisque tant le produit des numerateurs que des denominateurs eſt impair, ce nombre ſera impairement pair, ou ſa moitié un nombre impair: il ſera donc en commençant par la derniere fraction:

$$\tfrac{1}{2}N = \frac{2^{n-1}+1}{1} \cdot \frac{2^{n-3}+1}{1} \cdot \frac{2^{n-1}+3}{3} \cdot \frac{2^{n-3}+1}{1} \cdot \frac{2^{n-1}+5}{5} \cdots \frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}.$$

Mais puisque le ſecond terme de l'équation propoſée manque, ſi p eſt une racine u, il en ſera $-p$ auſſi une racine, & partant $uu-pp$ un facteur double, & le nombre de tous les facteurs de cette forme ſera $= \frac{1}{2}N$ c. à. d. un nombre impair. Par conſéquent le dernier terme de l'équation pour u ſera un quarré negatif, ce qui eſt une marque que cette équation renferme au moins deux valeurs réelles, l'une pour u & l'autre pour $-u$; d'où l'on formera deux facteurs réels du degré 2^{n-1} de l'équation propoſée. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 46. Toute équation donc du 32me degré eſt réſoluble en deux facteurs réels du 16me degré, & partant par le theoreme précédent auſſi réſoluble en 16 facteurs réels du ſecond degré. Ce qui doit s'entendre auſſi de toutes les équations au deſſous du 32me degré, qu'on pourra par ce moyen décompoſer en facteurs réels ou ſimples ou doubles.

COROLL. II.

§. 47. Puisque enſuite toute équation du 64me degré eſt réſoluble en deux facteurs réels du 32me degré, toutes les équations, qui n'excedent pas le 64me ou 65me degré, ſeront auſſi réſolubles en facteurs réels tous, ou ſimples, ou doubles.

COROLL. III.

§. 48. De la même maniere on étendra cette réſolubilité en facteurs réels, ou ſimples, ou doubles, ſucceſſivement aux équations du 128me, 256me, 512me &c. degré; de ſorte qu'il eſt à préſent certain, que toute équation de quelque haut degré qu'elle ſoit, eſt toujours réſoluble en facteurs réels, ou ſimples, ou du ſecond degré.

SCHOLIE.

§. 49. Voilà donc une démonſtration complette de la propoſition, qu'on ſuppoſe communément dans l'analyſe & principalement dans le calcul integral; par laquelle on prétend, que toute fonction rationnelle d'une variable x comme $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} +$ &c. ſe peut toujours réſoudre en facteurs réels ou ſimples de la forme $x+p$ ou doubles de la forme $xx+px+q$. C'eſt de la poſſibilité de cette réſolution, qu'on a tiré cette belle & importante conſéquence, que l'integrale d'une telle formule differentielle $\frac{P\,dx}{Q}$, où P & Q marquent des fonctions rationnelles quelconques de x, ſe peut toujours exprimer, ou algébriquement, ou par des logarithmes, ou par des arcs de cercle. Or pour ce qui regarde la ſolidité de la démonſtration, que je viens de donner de cette belle propriété des équations, je crois qu'on n'y trouvera rien à redire, après qu'on aura bien peſé les remarques, que j'y ai ajoutées; cependant en cas qu'on voulut faire des difficultés de reconnoitre la bonté de ces démonſtrations, je m'en vai ajouter quelques propoſitions rélatives à ce ſujet, qui ne ſont pas dépendantes des précedentes, & dont la verité ſervira à lever tous les doutes qu'on pourroit encore avoir.

Theo-

Theoreme VIII.

§. 50. *Toute équation du 6me degré a au moins un facteur réel du ſecond degré, indépendamment des démonſtrations précedentes.*

DEMONSTRATION.

Soit l'équation propoſée du 6me degré

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex \mp F = 0$$

dont un facteur double quelconque ſoit $xx - ux + v$; l'autre facteur ſera donc du quatrieme degré comme;

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

& on comprend, que ſi l'un eſt réel, l'autre le doit être auſſi. Le produit de ces deux facteurs devant être egal à la propoſée, on parviendra à 6 égalités, d'ou il faut déterminer les coëfficiens ſuppoſés u, v, α, β, γ, δ, & cette détermination ſe pourra faire, comme j'ai deja remarqué par des expreſſions rationelles, jusques à la derniere, qui ſoit du coëfficient u, dont il faudra tirer la valeur d'une équation d'un certain nombre de degrés; de ſorte que ſi l'on pourra trouver une valeur réelle de u, celles des autres coëfficiens α, β, γ, &c. deviendront auſſi réelles, & partant auſſi les facteurs ſuppoſés mêmes. Il s'agit donc de conſiderer l'équation, qui déterminera u, pour voir ſi elle contient des valeurs réelles. Or il eſt clair, qu'en général u eſt la ſomme de deux racines quelconques de l'équation propoſée; & partant elle ſera ſusceptible d'autant de valeurs differentes, qu'il y a d'unités dans cette formule $\frac{6.5}{1.2} = 15$. Donc il faut abſolument que l'équation pour déterminer u contienne 15 valeurs differentes, ni plus ni moins; & ainſi cette équation ſera du 15me degré, c. à. d. d'un degré impair. Elle aura donc ſeurement une racine réelle, qui étant poſée pour u nous fournira un facteur réel du ſecond degré $xx - ux + v$ de l'équation propoſée du 6me degré. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

§. 61. Toute équation donc du ſixiéme degré peut toujours ſe réſoudre en deux facteurs réels, dont l'un eſt du ſecond & l'autre du quatriéme degré: & puisque celui-cy eſt réſoluble en deux facteurs réels du ſecond degré, on aura trois facteurs réels doubles, dont l'équation du 6me degré eſt compoſée.

SCHOLIE.

§. 52. Je ſuppoſe ici la poſſibilité de réſoudre une équation du 4me degré en deux facteurs réels doubles, quoique mon deſſein ſoit de rendre cette propoſition & quelques ſuivantes indépendantes des démonſtrations precedentes. Car quand même on douteroit de leur ſolidité, ce doute ne ſauroit rouler, que ſur les équations du 8me, 16me &c. degré; puisque la démonſtration pour les équations du 4me degré eſt tout à fait accomplie, ayant même déduit l'équation, d'où il faut déterminer l'inconnuë u, par les opérations algébriques, ce qui ne pouvoit pas s'executer dans les équations d'un plus haut degré, où il faloit avoir recours à quelques principes particuliers. Il eſt donc remarquable, que la réſolution d'une équation du 6me degré eſt prouvée ici par celle du 4me degré, au lieu que ſuivant les theoremes precedens, il n'a pas été permis de reconnoitre la poſſibilité de cette réſolution, qu'après avoir démontré celle des équations du 8me degré. Maintenant donc nous ſommes convaincus, que toute équation du ſixiéme degré eſt réſoluble en trois facteurs doubles réels, quand même il ſeroit impoſſible de réſoudre pareillement les équations du 8me degré. Or la methode dont je me ſuis ſervi ici pour prouver la réſolution des équations du 6me degré, s'etend également à toutes les équations d'un degré, dont l'expoſant eſt un nombre impairement pair, ou dont la moitié eſt un nombre impair; comme je ferai voir dans le theoreme ſuivant. Au reſte il eſt ici encore à remarquer, qu'en vertu de ce theoreme auſſi toute équation du 7me degré eſt réſoluble en un facteur ſimple & trois doubles, tous réels.

Theo-

Theoreme IX.

§. 53. *Toute équation d'un degré, dont l'expoſant eſt un nombre de cette forme* $4n+2$, *a toujours au moins un facteur réel du ſecond degré, & cela indépendamment des démonſtrations ſuperieures.*

DEMONSTRATION.

L'équation propoſée étant de cette forme:

$$x^{4n+2} + A x^{4n+1} + B x^{4n} + C x^{4n-1} + \&c..... = 0$$

ſoit un de ſes facteurs doubles quelconque $xx - ux + v$, & il eſt certain que u ſera la ſomme de deux racines quelconques de l'équation propoſée. Or le nombre de toutes les racines étant $= 4n+2$, ſi l'on en combine deux, le nombre de toutes les combinaiſons poſſibles ſera $= \frac{(4n+2)}{1}\frac{(4n+1)}{2} = (2n+1)(4n+1)$; & la lettre u ſera ſusceptible d'autant de valeurs; ou bien u ſe déterminera par une équation d'un degré dont l'expoſant $= (2n+1)(4n+1)$, qui étant impair cette équation aura néceſſairement une racine réelle, qui étant miſe pour u donnera le facteur doub le $xx - ux + v$ réel. D'où il s'enſuit que toute équation d'un degré $4n+2$ a toujours au moins un facteur réel du ſecond degré. C.Q.F.D.

COROLL. I.

§. 54. Donc ſi une équation du huitiéme degré eſt réſoluble en 4 facteurs doubles réels, toute équation du 10me degré pourra être réſolue en 5 facteurs doubles réels, & pour prouver cela on n'a pas beſoin de recourir aux équations du 16me degré, comme auparavant.

COROLL. II.

§. 55. Et ſi toute équation du degré 2^m eſt réſoluble en 2^{m-1} facteurs doubles réels, ce theoreme prouve la réſolubilité en facteurs doubles réels des équations du degré $2^m + 2$. Et de plus les équations des degrés $2^m + 1$ & $2^m + 3$ permetront auſſi la réſolution en

facteurs réels, ou ſimples, ou doubles, puiſqu'étant d'un degré impair elles ont au moins un facteur ſimple réel.

Theoreme X.

§. 56. *Toute équation d'un degré, dont l'expoſant eſt un nombre de la forme* $8n+4$, *a au moins un facteur réel du quatrieme degré; & cela indépendamment des démonſtrations ſuperieures.*

DEMONSTRATION.

Si l'on poſe un facteur quelconque du 4me degré

$$x^4 - ux^3 + \alpha x^2 + \xi x + \gamma$$

le coëfficient u ſera la ſomme de 4 racines quelconques de l'equation propoſée. Or cette équation ayant $8n+4$ racines, le nombre de toutes les valeurs poſſibles, dont la quantité u eſt ſuſceptible, eſt $= \frac{(8n+4)}{1}\frac{(8n+3)}{2}\frac{(8n+2)}{3}\frac{(8n+1)}{4}$

$= \frac{(2n+1)(8n+3)(4n+1)(8n+1)}{3}$, & partant la quantité u ſera déterminée par une équation du même degré: & il eſt clair que l'expoſant de ce degré étant un nombre entier ſera impair. Donc cette équation aura au moins une racine réelle, qui étant miſe pour u les autres coëfficiens α, ξ, γ, en ſeront auſſi déterminés réellement, & on obtiendra un facteur réel du quatrième degré. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 57. Donc puiſqu'un facteur réel du 4me degré eſt inconteſtablement réſoluble en deux facteurs réels du ſecond degré, toute équation d'un degré $8n+4$ aura certainement deux facteurs doubles réels, au moins, & les équations du $8n+5^{me}$ degré auront outre cela un facteur ſimple réel de plus.

COROLL. II.

§. 58. Les équations du 12me degré étant de ce nombre, auront donc deux facteurs doubles réels, & le troiſiéme facteur ſera du 8me degré.

degré. Donc ſi celui-ci eſt réſoluble en 4 facteurs doubles réels, on aura en tout 6 facteurs doubles réels, ſans qu'on ait beſoin de monter aux équations du 16me degré pour prouver cela.

SCHOLIE.

§. 59. On prouvera par un ſemblable raiſonnement, que toute équation d'un degré $16n+8$ a un facteur réel du 8me degré au moins, & on paſſera de même aux équations de $32n+16$, $64n+32$, $128n+64$ &c. dimenſions pour prouver qu'elles ont au moins un facteur réel du 16me, ou du 32me, ou du 64me degré, &c. De là on tirera cette conſéquence, que toutes les équations depuis le 8me degré jusqu'au 16me ſe peuvent réſoudre en facteurs réels, ou ſimples, ou doubles, en ne ſuppoſant que la réſolution des équations du 4me & 8me degré, & en general la réſolution de toute équation ſe pourra faire, ſans qu'on ait beſoin de la réduire à un degré plus haut, comme nous avons été obligé de faire, en n'employant que la réſolution des équations, dont l'expoſant du degré eſt une puiſſance du binaire. Combinant donc ces deux manieres de démontrer enſemble, on ne balancera plus d'accorder ce Theoreme général, que toute équation algébrique, de quelque degré qu'elle ſoit, eſt toujours réſoluble en facteurs réels, ou ſimples, ou doubles. Cependant il faut avouër, qu'il eſt pour la pluspart impoſſible d'executer cette réſolution, ou d'aſſigner actuellement ces facteurs réels; puisque dès qu'une équation paſſe le quatrième degré, les regles de l'algébre ne ſont plus ſuffiſantes à nous découvrir les racines. Mais pour le bût, qu'on a en vuë en établiſſant ce Theoreme général, il ſuffit qu'on ſoit aſſeuré, qu'une telle réſolution eſt toujours poſſible, quoiqu'on ne la puiſſe jamais executer.

Theoreme XI.

§. 60. *Si une équation algébrique, de quelque degré qu'elle ſoit, a des racines imaginaires, chacune ſera compriſe dans cette formule générale* $M+N\sqrt{-1}$, *les lettres* M & N *marquant des quantités réelles.*

DEMON-

DEMONSTRATION.

Soit l'équation propoſée quelconque du degré n:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

de ſorte que le nombre de toutes ſes racines ſoit $= n$. Qu'on décompoſe cette équation dans tous ſes facteurs réels, qui ſeront ou ſimples de la forme $x - p = 0$, ou du ſecond degré de la forme $xx - 2px + q = 0$; & toutes les racines ſe trouveront par la réſolution des égalités, que ces facteurs, étant poſés $= 0$, fourniſſent. Or chaque facteur ſimple ou l'équation $x - p = 0$ donne une racine réelle $x = p$; & chaque facteur double ou l'équation $xx - 2px + q = 0$ renferme deux racines

$$x = p + \sqrt{(pp - q)} \quad \& \quad x = p - \sqrt{(pp - q)}$$

qui ſeront auſſi réelles ſi $pp > q$. Mais ſi $pp < q$, ſoit $q = pp + rr$, & il ſera $\sqrt{(pp - q)} = \sqrt{-rr} = r\sqrt{-1}$; donc ces deux racines ſeront imaginaires, ſavoir:

$$x = p + r\sqrt{-1} \quad \& \quad x = p - r\sqrt{-1}$$

Ayant donc démontré, qu'il eſt toujours poſſible de réſoudre toute équation en facteurs, ou ſimples, ou doubles réels, toutes les racines ſeront auſſi, ou réelles, ou imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$, où M & N ſont des quantités réelles, de ſorte que l'imaginaire, qui y entre, n'eſt contenu que dans la forme $\sqrt{-1}$. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 61. Si donc parmi les racines imaginaires d'une équation quelconque, ſe trouve une $x = p + r\sqrt{-1}$, il s'y trouvera auſſi certainement celle-cy $x = p - r\sqrt{-1}$; ce qui eſt evident tant de la démonſtration de ce theoreme, que de la nature du ſigne radical $\sqrt{-1}$, qui renferme eſſentiellement auſſi bien le ſigne $+$ que le ſigne $-$: de ſorte que connoiſſant une racine imaginaire d'une équation quelconque, l'autre ſe découvre d'elle-meme.

COROL-

COROLL. II.

§. 62. Ayant déjà fait voir que le nombre de toutes les racines imaginaires, qu'une équation quelconque contient, eſt pair, chaque racine imaginaire $x = p + r\sqrt{-1}$ aura parmi les autres ſon compagnon $x = p - r\sqrt{-1}$, qui lui appartient plus que toutes les autres; vu que tant la ſomme de ces deux racines $2p$, que leur produit $pp + rr$, ſont des quantités réelles.

COROLL. III.

§. 63. De là il eſt auſſi clair que ſi $x - p - r\sqrt{-1}$ eſt un facteur imaginaire d'une équation quelconque, la formule $x - p + r\sqrt{-1}$ en ſera auſſi un facteur. Et ces deux facteurs joints enſemble donneront un facteur double réel de la même équation, lequel ſera $xx - 2px + pp + rr$.

SCHOLIE.

§. 64. On comprend de là réciproquement, que ſi l'on pouvoit démontrer, que toutes les racines imaginaires d'une équation quelconque euſſent néceſſairement la forme $M + N\sqrt{-1}$, il ſeroit aiſé d'en démontrer, que toute équation fut auſſi réſoluble en facteurs réels, ou ſimples, ou du ſecond degré. Car les racines réelles fourniroient toujours autant de facteurs ſimples réels, & chaque racine imaginaire $x = p + r\sqrt{-1}$, étant jointe avec ſa compagne $x - p - r\sqrt{-1}$ produiroit un facteur double réel $xx - 2px + pp + rr$; de ſorte que ſi une équation du degré $n = \alpha + 2\beta$, avoit α racines réelles, & 2β racines imaginaires, dont chacune fut de la forme $M + N\sqrt{-1}$, il ſeroit démontré, que cette équation eut α facteurs ſimples réels, & β facteurs doubles réels. Or il paroit très vraiſemblable que toute racine imaginaire, quelque compliquée qu'elle ſoit, eſt toujours réductible à la forme $M + N\sqrt{-1}$, & Mr. d'Alembert a prouvé cela dans ſon excellente piece ſur le Calcul intégral, qui ſe trouve dans le II. Volume de nos Memoires, d'une telle maniere qu'il n'y reſte plus le moindre doute. Cependant comme il a emploïé dans ſa demonſtration des quantités infiniment petites, quoique cette conſidération n'en puiſſe

pas diminuer la force, je tacherai de tirer auſſi de cette ſource une démonſtration rigoureuſe du theoreme général, auquel cette piece eſt deſtinée, ſans avoir recours à des quantités infiniment petites. Or pour cet effet j'aurai beſoin de quelques Theoremes préliminaires.

Theoreme XII.

§. 65. *Toute fonction, qui eſt formée, ou par addition, ou par ſouſtraction, ou par multiplication, ou par diviſion d'autant de formules imaginaires de cette forme* $M+N\sqrt{-1}$ *que ce ſoit, ſera toujours compriſe dans la même forme* $M+N\sqrt{-1}$, *les lettres* M & N *marquant des quantités réelles.*

DEMONSTRATION.

Qu'on s'imagine pluſieurs formules imaginaires de la forme indiquée, leſquelles ſoient:

$$\alpha+\beta\sqrt{-1};\ \gamma+\delta\sqrt{-1};\ \varepsilon+\zeta\sqrt{-1};\ \eta+\theta\sqrt{-1};\ \&c.$$

& eſt il d'abord clair, qu'en ajoutant ces formules enſemble, ou en retranchant quelques unes, l'expreſſion qui en réſulte ſera toujours compriſe dans cette forme $M+N\sqrt{-1}$. Il eſt auſſi clair que ſi l'on multiplie deux ou pluſieurs de ces formules enſemble, le produit ſera toujours contenu dans la formule $M+N\sqrt{-1}$: car le produit de deux $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ & $\gamma+\delta\sqrt{-1}$ étant $\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{-1}$, a la forme $M+N\sqrt{-1}$, laquelle étant outre cela multipliée par $\varepsilon+\zeta\sqrt{-1}$ donnera encore cette forme, & ainſi de ſuite. Il ne s'agit donc plus que de la diviſion: or il eſt clair que ce cas ſe réduit toujours à une telle fraction $\frac{A+B\sqrt{-1}}{C+D\sqrt{-1}}$, où tant le numerateur que le denominateur eſt déjà compoſé par les trois premiéres opérations, l'addition, la ſouſtraction & la multiplication, d'autant de formules imaginaires de la forme $M+N\sqrt{-1}$ qu'on voudra. Or cette fraction ſe réduira à une autre, dont le denominateur ſera réel, en multipliant

en

en haut & en bas par $C-D\sqrt{-1}$; car alors on aura $\frac{AC+BD+(BC-AD)\sqrt{-1}}{CC+DD}$, de ſorte que poſant M pour $\frac{AC+BD}{CC+DD}$ & N pour $\frac{BC-AD}{CC+DD}$, on aura cette forme $M+N\sqrt{-1}$. Par conſéquent cette forme demeure inalterée, par quelques opérations qu'on joigne enſemble autant de formules imaginaires de la forme $M+N\sqrt{-1}$ qu'on voudra. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 66. De là il eſt auſſi evident que toutes les puiſſances, dont l'expoſant eſt un nombre entier poſitif, d'une formule imaginaire $A+B\sqrt{-1}$, auront toujours la même forme $M+N\sqrt{-1}$; puisque ces puiſſances ſe forment par la multiplication.

COROLL. II.

§. 67. Enſuite, puisque la puiſſance $(A+B\sqrt{-1})^n$ eſt contenuë dans la forme $M+N\sqrt{-1}$, ſi n eſt un nombre entier poſitif, la même forme aura lieu ſi n eſt un nombre entier negatif. Car ayant

$$(A+B\sqrt{-1})^{-n} = \frac{1}{(A+B\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{M+N\sqrt{-1}}$$

cette forme ſe réduit à $\frac{M-N\sqrt{-1}}{MM+NN}$.

COROLL. III.

§. 68. La forme générale $M+N\sqrt{-1}$ comprend auſſi toutes les quantités réelles, lorsqu'on poſe $N=0$. Donc joignant enſemble par les quatre opérations mentionnées, non ſeulement des formules imaginaires de la forme $M+N\sqrt{-1}$, mais auſſi des réelles, le produit ſera toujours compris dans la forme $M+N\sqrt{-1}$.

COROLL. IV.

§. 69. Il peut auſſi arriver que ce produit, quoiqu'il ſoit formé des formules imaginaires, devient réel, les imaginaires ſe détruiſant

mutuellement, ou rendant $N = 0$. Ainſi le produit de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ par $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ eſt réel ; & on ſait que $(-1 + \sqrt{-3})^3 = 8$.

Theoreme XIII.

§. 70. *De quelque puiſſance qu'on extraye la racine, ou d'une quantité réelle, ou d'une imaginaire de la forme* $M + N\sqrt{-1}$, *les racines ſeront toujours, ou réelles, ou imaginaires de la même forme* $M + N\sqrt{-1}$.

DEMONSTRATION.

Soit n l'expoſant de la puiſſance dont il faut extraire la racine, de ſorte qu'on ait à conſidérer les valeurs, ou de $\sqrt[n]{a}$, ou de $\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})}$. Or puiſque celle-cy ſe change en celle-là, ſi $b = 0$, il ſuffit de prouver que $\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})}$ ou $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$ eſt contenu dans la forme $M + N\sqrt{-1}$, quelque grand que ſoit le nombre n. Pour prouver cela, qu'on cherche un angle Φ tel que ſa tangente ſoit $= \frac{b}{a}$, ou poſant $\sqrt{(aa + bb)} = c$, qu'on prenne l'angle Φ tel, que ſon ſinus ſoit $= \frac{b}{c}$ & le coſinus $= \frac{a}{c}$: on aura donc $a + b\sqrt{-1} = c(\text{cof}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi)$, puiſque $\text{cof}\,\Phi = \frac{a}{c}$ & $\text{ſin}\,\Phi = \frac{b}{c}$. Or il eſt démontré qu'une puiſſance quelconque d'une telle forme, comme $(\text{cof}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi)^m$ eſt $= \text{cof}\,m\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,m\Phi$, quelque nombre qu'on ſignifie par la lettre m, ſoit qu'il ſoit affirmatif, ou negatif, ou entier, ou rompu, ou même irrationnel. Cela poſé on aura $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})} = c^{\frac{1}{n}}(\text{cof}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi)^{\frac{1}{n}} = \left(\text{cof}\,\frac{1}{n}\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\frac{1}{n}\Phi\right)\sqrt[n]{c}$. Donc puiſque $c = \sqrt{(aa + bb)}$ eſt une quantité réelle & poſitive, & l'angle Φ & partant auſſi ſa partie

tie $\frac{1}{n}\Phi$ avec ſon ſinus & coſinus auſſi des quantités réelles : il eſt evident que $\sqrt[n]{(a+bV-1)}$ ou $\left(\text{cof}\frac{1}{n}\Phi+V-1.\ \text{ſin}\frac{1}{n}\Phi\right)\sqrt[n]{c}$ appartient à la forme $M+NV-1$. Donc toutes les racines d'une quantité réelle ou imaginaire de cette forme $M+NV-1$, ſont toujours compriſes dans la formule générale $M+NV-1$. C.Q.F.D.

COROLL. I.

§. 71. Comme on ſait que toute quantité a deux racines quarrées, trois racines cubiques, quatre racines quarré-quarrées & ainſi de ſuite, on trouve par cette methode toutes les racines, dont le nombre eſt $= n$, puisque $\frac{1}{n}\Phi$ a autant de valeurs differentes.

COROLL. II.

§. 72. Car puisque Φ eſt l'angle donc le ſinus eſt $= \frac{b}{c}$ & le coſinus $= \frac{a}{c}$; au lieu de Φ on peut auſſi prendre les angles $4\varrho+\Phi$; $8\varrho+\Phi$; $12\varrho+\Phi$ &c. ϱ marquant l'angle droit, puisque tous ces angles ont le même ſinus & coſinus. Mettant donc dans la racine trouvée $\left(\text{cof}\frac{1}{n}\Phi+V-1.\ \text{ſin}\frac{1}{n}\Phi\right)\sqrt[n]{c}$ pour Φ ces angles Φ; $4\varrho+\Phi$; $8\varrho+\Phi$; $12\varrho+\Phi$ &c. on trouvera autant d'expreſſions differentes, qu'il y a d'unités dans l'expoſant n.

COROLL. III.

§. 73. Puisque n peut marquer un nombre quelconque, il s'enſuit de notre démonſtration, que non ſeulement $\sqrt[n]{(a+bV-1)}$ ou n eſt un nombre entier poſitif, mais en général que cette expreſſion $(a+bV-1)^m$, quelque nombre qui ſoit marqué par m ou poſitif, ou

negatif, ou entier, ou rompu, ou même irrationel, eſt toujours compriſe dans la forme générale $M+N\sqrt{-1}$.

COROLL. IV.

§. 74. Par conſéquent non ſeulement les quatre opérations de l'arithmetiqne, mais auſſi l'extraction des racines, de quelque degré qu'elles ſoient, ne changent point la forme $M+N\sqrt{-1}$ des quantités imaginaires, auxquelles on les applique d'une maniére quelconque.

SCHOLIE

§. 75. Si la quantité, dont on cherche toutes les racines d'un certain degré, eſt réelle ou $b=0$, il ſera $c=\sqrt{aa}$, d'où l'on aura pour c un valeur poſitive, quand même a auroit une negative; & l'angle Φ ſera ou $=0$, ou $=180°$, ſelon que le coſinus $\frac{a}{c}$ ſera ou $=+1$ ou $=-1$. Donc le premier cas ou a eſt poſitif & $c=a$: les valeurs de Φ ſeront donc $0, 4\varrho, 8\varrho, 12\varrho$ &c. & les racines du degré n du nombre a ſeront, poſant ϱ pour la marque d'un angle droit:

$$\sqrt[n]{a};\ \left(\text{cof}\ \frac{4\varrho}{n}+\sqrt{-1}.\ \text{ſin}\ \frac{4\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a};\ \left(\text{cof}\ \frac{8\varrho}{n}+\sqrt{-1}.\ \text{ſin}\ \frac{8\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a}\ \text{&c.}$$

Or ſi a eſt un nombre negatif, on aura les expreſſions ſuivantes, ou bien les valeurs de $\sqrt[n]{-a}$ ſeront:

$$\left(\text{cof}\ \frac{2\varrho}{n}+\sqrt{-1}.\ \text{ſin}\ \frac{2\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a};\ \left(\text{cof}\ \frac{6\varrho}{n}+\sqrt{-1}.\ \text{ſin}\ \frac{6\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a};\ \text{&c.}$$

mettant pour Φ ſucceſſivement $2\varrho, 6\varrho, 10\varrho, 14\varrho$ &c. Mais cette matiere étant déjà ſuffiſamment developpée, je me borne ici à cette unique conſéquence, que l'extraction des racines, tant des quantités réelles qu'imaginaires de la forme $M+N\sqrt{-1}$ produit toujours ou des quantités réelles, ou des imaginaires de la forme $M+N\sqrt{-1}$.

Theore-

Theoreme. XIV.

§. 76. *De quelque degré que ſoit une équation algébrique, toutes les racines imaginaires qu'elle peut avoir, ſont toujours compriſes dans cette forme générale* $M+N\sqrt{-1}$; *de ſorte que* M & N *ſont des quantités réelles.*

DEMONSTRATION.

Soit en general l'équation propoſée:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0.$$

& quoique nous ne ſoyons pas en état d'aſſigner la formule générale, qui en contient les racines, comme nous le ſommes pour les équations du ſecond, troiſiéme & quatriéme degré, il eſt pourtant certain, que cette formule ſera compoſée de pluſieurs ſignes radicaux, dont les quantités connuës A, B, C, D, E, &c. ſeront compliquées. On peut auſſi remarquer que cette expreſſion analytique d'une racine quelconque renfermera pluſieurs membres, dont chacun ſera la racine d'un certain degré d'une quantité, qui renferme encore des ſignes radicaux, & que ceux-cy auront après eux encore d'autres, et ainſi de ſuite, jusqu'à ce qu'on parvienne en chaque membre au dernier ſigne radical, qui n'affecte plus que des quantités réelles. Remontons de ces derniers ſignes ſucceſſivement, & il eſt évident que la quantité marquée par le dernier ſigne ſera, ou réelle, ou imaginaire de la forme $M+N\sqrt{-1}$. Enſuite devant cette quantité, jointe avec quelque valeur, ou réelle, ou imaginaire auſſi de la forme $M+N\sqrt{-1}$, ſe trouvera un nouveau ſigne radical, qui ſe réduira donc à $\sqrt[n]{(M+N\sqrt{-1})}$, dont la valeur eſt encore de la forme $M+N\sqrt{-1}$; & ſi nous remontons de cette maniére jusqu'aux premiers ſignes radicaux, qui diſtingue les membres, nous verrons, qu'aucune opération ne nous ſauroit écarter de cette forme, & que par conſéquent chaque membre aura enfin la même forme, quelque grand que ſoit le nombre des ſignes radicaux, qui y ſont ſont enveloppés. D'où il s'enſuit que l'expreſſion générale, qui renferme

ferme toutes les racines de l'équation propoſée, ſe réduira néceſſairement à la forme $M+N\sqrt{-1}$, de ſorte que toutes les racines imaginaires ne ſauroient avoir d'autre forme que celle-cy. C.Q.F.D.

SCHOLIE I.

§. 77. Voilà donc une nouvelle démonſtration du Theoreme général, que je me ſuis propoſé de prouver ici, & contre laquelle on ne ſauroit rien objecter, ſi ce n'eſt, que nous ne ſavons pas, comment les racines des équations des plus hauts degrés après le 4me ſont compliquées. Or cette objection n'aura aucune force, pourvu qu'on m'accorde, que les expreſſions pour les racines ne contiennent point d'autres opérations, que l'extraction des racines, outre les quatre opérations vulgaires: & l'on ne ſauroit ſoutenir que des opérations tranſcendantes s'y mêlaſſent. Mais ſi la conjecture, que j'ai autrefois avancée ſur la forme des racines des équations d'un ordre quelconque, eſt fondée, la démonſtration que je viens de donner ici, aura toute la force, qu'on peut ſouhaiter. Car ayant une équation quelconque du degré n, je dis qu'il y aura toujours une équation du degré $n-1$, dont les racines étant $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. au nombre de $n-1$, une racine quelconque de l'autre équation du degré n ſera $= a+\sqrt[*]{\alpha}+\sqrt[**]{\beta}+\sqrt[***]{\gamma}+\sqrt[****]{\delta}+$ &c. où a eſt une quantité réelle. Donc ſi les racines de l'équation du degré $n-1$ ſont, ou réelles, ou de la forme $M+N\sqrt{-1}$, les racines de l'équation du degré n auront auſſi cette forme. Par conſéquent puiſque les racines des équations du ſecond degré ſont, ou réelles, ou de la forme $M+N\sqrt{-1}$, les racines des équations du troiſiéme degré ſe réduiront auſſi à la même forme, & partant auſſi les racines des équations du 4me, 5me, 6me &c. à l'infini.

SCHOLIE II.

§. 78. De là on tirera encore cette importante conſéquence, que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle ſoit, eſt toujours réductible à cette formule $M+N\sqrt{-1}$; de ſorte que toute quantité imaginaire eſt toujours compoſée de deux membres, dont l'un

eſt

eſt une quantité réelle indiquée par M, et l'autre eſt le produit d'une quantité auſſi réelle comme N, multipliée par $\sqrt{-1}$; de maniere que $\sqrt{-1}$ eſt la ſeule ſource de toutes les expreſſions imaginaires. Car ſi nous regardons l'origine des quantités imaginaires, qui eſt l'extraction des racines ou la réſolution des équations, il eſt démontré, que toutes les quantités imaginaires qui en découlent, ſont toujours compriſes dans cette forme $M+N\sqrt{-1}$, & de plus j'ai fait voir, que de quelque maniere qu'on traite une ou pluſieurs quantités imaginaires de cette forme par les opérations de l'analyſe, l'addition, la ſouſtraction, la multiplication, la diviſion & l'extraction des racines, toutes les expreſſions qui en réſultent, ſe réduiſent toujours à la même forme $M+N\sqrt{-1}$. On ſera donc obligé d'accorder cette verité, entant que ce ne ſont que les opérations algébriques, par leſquelles les formules imaginaires ſont compliquées; mais on doutera peut-être, ſi les quantités imaginaires, qui dérivent des opérations tranſcendentes, comme ſont celles qui impliquent la nature des logarithmes ou des angles, ſont encore réductibles à la même forme. Or pour lever ce doute je ferai voir, que toutes les opérations tranſcendantes, qui ſont connües, n'ecartent point les quantités imaginaires qu'elles produiſent, de la forme marquée, & quoiqu'il ſoit impoſſible d'appliquer le même raiſonnement à toutes les opérations tranſcendantes, les propoſitions ſuivantes ôteront tout ſujet de douter davantage de la verité de cette propriété générale de toutes les quantités imaginaires, de quelque ſource qu'elles puiſſent tirer leur origine.

Probleme I.

§. 79. *Une quantité imaginaire étant élevée à une puiſſance, dont l'expoſant eſt une quantité réelle quelconque, déterminer la forme imaginaire qui en reſulte.*

SOLUTION.

Soit $a+b\sqrt{-1}$ la quantité imaginaire, & m l'expoſant réel de la puiſſance, de ſorte qu'il s'agit de déterminer M & N, pour qu'il ſoit

$$(a+b\sqrt{-1})^m = M+N\sqrt{-1}.$$

Poſons $\sqrt{(aa+bb)} = c$, & c ſera toujours une quantité réelle & poſitive, car nous ne regardons pas ici l'ambiguité du ſigne $\sqrt{}$. Enſuite cherchons l'angle Φ tel que ſon ſinus ſoit $= \frac{b}{c}$ & le coſinus $= \frac{a}{c}$, ayant ici égard à la nature des quantités a & b, ſi elles ſont affirmatives ou negatives ; & il eſt certain, qu'on pourra toujours aſſigner cet angle Φ, quelles que ſoient les quantités a, b ; pourvu qu'elles ſoient réelles, comme nous le ſuppoſons. Or ayant trouvé cet angle Φ, qui ſera toujours réel, on aura en même tems tous les autres angles, dont le ſinus $\frac{b}{c}$ & le coſinus $\frac{a}{c}$ ſont les mêmes : car poſant π pour l'angle de 180°, tous ces angles ſeront, Φ, $2\pi+\Phi$, $4\pi+\Phi$, $6\pi+\Phi$, $8\pi+\Phi$, &c. auxquels on peut ajouter ceux-cy : $-2\pi+\Phi$, $-4\pi+\Phi$, $-6\pi+\Phi$, $-8\pi+\Phi$, &c. Cela poſé il ſera $a+b\sqrt{-1} = c(\text{cof}\,\Phi+\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi)$, & la puiſſance propoſée $(a+b\sqrt{-1})^m = c^m\,(\text{cof}\,\Phi+\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi)^m$, où c^m aura toujours une valeur réelle poſitive, qu'il faut lui donner préferablement à toutes les autres valeurs, qu'il pourroit avoir. Enſuite il eſt démontré que $(\text{cof}\,\Phi+\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi)^m = \text{cof}\,m\,\Phi+\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,m\,\Phi$; où il faut remarquer, que puiſque m eſt une quantité réelle, l'angle $m\,\Phi$ ſera auſſi réel, & partant auſſi ſon ſinus & ſon coſinus. Donc nous aurons :

$$(a+b\sqrt{-1})^m = c^m\,(\text{cof}\,m\,\Phi+\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,m\,\Phi)$$

ou bien la puiſſance $(a+b\sqrt{-1})^m$ eſt contenüe dans la forme $M+N\sqrt{-1}$, en prenant $M = c^m\,\text{cof}\,m\,\Phi$ & $N = c^m\,\text{ſin}\,m\,\Phi$ où il y a $c = \sqrt{(aa+bb)}$ & $\text{cof}\,\Phi = \frac{a}{c}$ & $\text{ſin}\,\Phi = \frac{b}{c}$. C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 80. De même maniere qu'il eſt $(\text{cof}\,\Phi+\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi)^m = \text{cof}\,m\,\Phi+\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,m\,\Phi$, il ſera auſſi $(\text{cof}\,\Phi-\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi)^m =$

cof

$\cos m\,\Phi - \sqrt{-1}.\sin m\,\Phi$, & partant on aura $(a - b\sqrt{-1})^m = c^m(\cos m\,\Phi - \sqrt{-1}.\sin m\,\Phi)$, où Φ marque le même angle que dans le cas précedent.

COROLL. II.

§. 81. Si l'expoſant m eſt negatif, puisque $\sin -m\,\Phi = -\sin m\,\Phi$ & $\cos -m\,\Phi = \cos m\,\Phi$, il ſera donc :

$$(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin\varphi)^{-m} = \cos m\,\varphi \mp \sqrt{-1}.\sin m\,\varphi \quad \&$$
$$(a \pm b\sqrt{-1})^{-m} = c^{-m}(\cos m\,\varphi \mp \sqrt{-1}.\sin m\,\varphi).$$

COROLL. III.

§. 82. Si m eſt un nombre entier, ſoit affirmatif, ſoit negatif, la formule $(a + b\sqrt{-1})^m$ n'aura qu'une ſeule valeur: car quoiqu'on ſubſtitue pour φ tous les angles φ ; $\pm 2\pi + \varphi$; $\pm 4\pi + \varphi$; $\pm 6\pi + \varphi$; &c. on trouvera toujours pour $\sin m\,\varphi$ & $\cos m\,\varphi$ les mêmes valeurs.

COROLL. IV.

§. 83. Mais ſi l'expoſant m eſt un nombre rompu $\frac{\mu}{\nu}$, l'expreſſion $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\nu}}$ aura autant de valeurs differentes, qu'il y a d'unités en ν; car en ſubſtituant pour φ les angles marqués, on obtiendra autant de valeurs differentes pour $\sin m\,\varphi$ & $\cos m\,\varphi$, que le nombre ν contient d'unités.

COROLL. V.

§. 84. D'où il eſt clair, que ſi m eſt un nombre irrationnel ou incommenſurable à l'unité, l'expreſſion $(a + b\sqrt{-1})^m$ aura auſſi une infinité de valeurs differentes, car tous les angles Φ, $\pm 2\pi + \Phi$; $\pm 4\pi + \Phi$; $\pm 6\pi + \Phi$; &c. fourniront de diverſes valeurs pour $\sin m\,\Phi$ & $\cos m\,\Phi$.

SCHOLIE I.

§. 85. Le fondement de la ſolution de ce probleme eſt, que $(\cos\Phi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)^m = \cos m\,\varphi + \sqrt{-1}.\sin m\,\varphi$, dont la ve-

rité ſe prouve par les theoremes connus ſur la multiplication des angles. Car ayant deux angles quelconques φ & θ, il ſera $(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)(\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta) = \cos(\varphi+\theta) + \sqrt{-1}.\sin(\varphi+\theta)$, ce qui eſt clair par la multiplication actuelle, qui donne $\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi.\sin\theta + (\cos\varphi.\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)\sqrt{-1}$. Or on ſait qu'il y a $\cos\varphi.\cos\theta - \sin\varphi.\sin\theta = \cos(\varphi+\theta)$ & $\cos\varphi.\sin\theta + \sin\varphi.\cos\theta = \sin(\varphi+\theta)$. D'où l'on tire aiſément la conſéquence, qu'il eſt:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}.\sin.m\varphi.$$

lorsque l'expoſant m eſt un nombre entier. Mais que la même formule a lieu auſſi, quand m eſt un nombre quelconque, la differentiation aprés avoir pris les logarithmes le mettra hors de doute. Car prenant les logarithmes on aura:

$$m\,l(\cos\Phi + \sqrt{-1}.\sin\Phi) = l(\cos m\Phi + \sqrt{-1}.\sin m\Phi).$$

Maintenant traitant l'angle Φ comme une quantité variable on aura:

$$\frac{-m\,d\Phi\sin\Phi + m\,d\Phi\sqrt{-1}.\cos\Phi}{\cos\Phi + \sqrt{-1}.\sin\Phi} = \frac{-m\,d\Phi\sin m\Phi + m\,d\Phi\sqrt{-1}.\cos m\Phi}{\cos m\Phi + \sqrt{-1}.\sin m\Phi}$$

& multipliant les numerateurs par $-\sqrt{-1}$, on obtiendra:

$$\frac{m\,d\Phi(\cos\Phi + \sqrt{-1} - \sin\Phi)}{\cos\Phi + \sqrt{-1}.\sin\Phi} = \frac{m\,d\Phi(\cos m\Phi + \sqrt{-1}.\sin m\Phi)}{\cos m\Phi + \sqrt{-1}.\sin m\Phi} = m\,d\Phi$$

ce qui eſt une équation identique.

SCHOLIE II.

§. 86. Mais on demandera, comment on auroit pu parvenir à la transformation de la formule $(a + b\sqrt{-1})^m$ à la forme $M + N\sqrt{-1}$, ſi l'on n'avoit pas ſçu la propriété mentionnée des angles multiples, qui paroit d'abord tout à fait étrangére à ce deſſein. Pour cet effet je joindrai ici une autre ſolution du probleme, ſans emploier cette propriété; & la methode dont je me ſervirai, conduira auſſi à la ſolution

des

des problemes ſuivans. Comme il s'agit donc de convertir la forme $(a+b\sqrt{-1})^m$ en celle-cy $x+y\sqrt{-1}$, je poſe

$$(a+b\sqrt{-1})^m = x+y\sqrt{-1}.$$

& prenant les logarithmes on aura :

$$m\,l(a+b\sqrt{-1}) = l(x+y\sqrt{-1})$$

maintenant regardant a, b, x, y, comme variables, je prend les differentiels :

$$\frac{m\,da+m\,db\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}} = \frac{dx+dy\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}}$$

qui ſe réduiſent à cette équation :

$$\frac{mada-mbdb\sqrt{-1}+madb\sqrt{-1}+mbdb}{aa+bb} = \frac{xdx+xdy\sqrt{-1}-ydx\sqrt{-1}+ydy}{xx+yy}$$

où il faut que les membres réels & imaginaires ſoient ſéparément égaux entr'eux, puiſqu'il eſt impoſſible d'égaler une quantité réelle à une imaginaire. De là nous tirerons deux équations :

$$\frac{m\,a\,da+m\,b\,db}{a\,a+b\,b} = \frac{x\,dx+y\,dy}{xx+yy}$$

$$\&\quad \frac{m\,(a\,db-b\,da)}{a\,a+b\,b} = \frac{x\,dy-y\,dx}{xx+yy}$$

L'integrale de la prémiere eſt $m\,lV(aa+bb) = lV(xx+yy)+lC$. Soit donc $V(aa+bb) = c$, & il ſera $c^m = C\,V(xx+yy)$. Pour déterminer cette conſtante C, on n'a qu'à remarquer, que ſi $b = 0$ & $a = 1$, il faut qu'il y ait $y = 0$ & $x = 1$, d'où nous voyons, qu'il doit être $C = 1$. Donc poſant $V(aa+bb) = c$, nous aurons $V(xx+yy) = c^m$. Enſuite l'intégrale de l'autre équation eſt $m\,\mathrm{A\,tang}\,\frac{b}{a} = \mathrm{A\,tang}\,\frac{y}{x}+C$; où l'on voit que la conſtante C doit être $= 0$, puiſque ſi $b = 0$, il faut qu'il ſoit auſſi $y = 0$. Par conſéquent

quent nous aurons: m A tang $\frac{b}{a} = $ A tang $\frac{y}{x}$. Soit Φ l'angle dont la tangente $= \frac{b}{a}$, ou bien ſoit ſin $\Phi = \frac{b}{c}$ & cof $\Phi = \frac{a}{c}$, & ayant $m\Phi = $ A tang $\frac{y}{x}$, il ſera $\frac{y}{x} = $ tang $m\Phi$, ou $\frac{y}{V(xx+yy)} = $ ſin $m\Phi$ & $\frac{x}{V(xx+yy)} = $ cof $m\Phi$. Donc puiſque $V(xx+yy) = c^m$, nous aurons pour la ſolution du probleme:

$$x = c^m \text{ cof } m\Phi \quad \& \quad y = c^m \text{ ſin } m\Phi$$

prenant $c = V(aa+bb)$, & l'angle Φ étant tel, qu'il ſoit ſin $\Phi = \frac{b}{c}$ & cof $\Phi = \frac{a}{c}$: d'où l'on voit que l'angle Φ a une infinité de valeurs, comme j'ai déjà remarqué, qui ſont Φ; $\pm 2\pi + \Phi$; $\pm 4\pi + \Phi$; $\pm 6\pi + \Phi$; &c.

Probleme II.

§. 87. *Une quantité réelle poſitive étant élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt une quantité imaginaire, trouver la valeur imaginaire de cette puiſſance.*

SOLUTION.

Soit a la quantité réelle poſitive, & $m+nV-1$ l'expoſant de la puiſſance, de ſorte qu'il faut chercher la valeur imaginaire de a^{m+nV-1}. Soit donc

$$a^{m+nV-1} = x + yV-1$$

& il ſera $(m+nV-1)la = l(x+yV-1)$, dont prenant les differentiels en poſant a, x, & y variables, nous aurons

$$\frac{mda}{a} + \frac{ndaV-1}{a} = \frac{dx+dyV-1}{x+yV-1} = \frac{xdx+ydy}{xx+yy} + \frac{xdy-ydx}{xx+yy}V-1.$$

Egalant

Egalant donc ſéparément enſemble les membres réels & imaginaires, nous aurons ces deux équations:

$$\frac{mda}{a} = \frac{xdx+ydy}{xx+yy} \text{ \& } \frac{nda}{a} = \frac{xdy-ydx}{xx+yy}$$

dont les integrales priſes, comme il faut, ſeront:

$$V(xx+yy) = a^m \text{ \& A tang } \frac{y}{x} = nla, \text{ ou } \frac{y}{x} = \text{tang. } nla$$

où la marque le logarithme hyperbolique de la quantité réelle poſitive a, lequel aura par conſequent auſſi une valeur réelle. Prenant donc dans un cercle, dont le rayon $= 1$, un arc $= nla$, à cauſe de $V(xx+yy) = a^m$, nous obtiendrons:

$$x = a^m \text{ cof } nla \quad \& \quad y = a^m \text{ ſin } nla$$

& ces valeurs étant poſées pour x & y, on aura:

$$a^{m+nV-1} = x + y\,V - 1. \quad \text{C.Q.F.T.}$$

COROLL. 1.

§. 88. La quantité imaginaire a^{m+nV-1} ſera donc auſſi compriſe dans la forme générale $M+NV-1$, puiſque nous venons de trouver:

$$a^{m+nV-1} = a^m \text{ cof } nla + a^m V - 1. \text{ ſin } nla$$

lorsque a eſt une quantité réelle poſitive; car ſi a étoit une quantité negative quoique réelle, ſon logarithme ſeroit imaginaire, & partant auſſi cof nla & ſin nla imaginaires.

COROLL. 2.

§. 89. Puiſque $a^{m+nV-1} = a^m . a^{nV-1}$, il ſera:

$$a^{nV-1} = \text{cof } nla + V - 1. \text{ ſin } nla.$$

& prenant n negatif, il ſera auſſi

$$a^{-nV-1} = \text{cof } nla - V - 1. \text{ ſin } nla$$

COROLL.

COROLL. 3.

§. 90. De là il s'enſuit, que les formules ſuivantes ſont réelles:

$$\frac{a^{n\sqrt{-1}} + a^{-n\sqrt{-1}}}{2} = \text{cof. } n\,la \;\&$$

$$\frac{a^{n\sqrt{-1}} - a^{-n\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \text{ſin. } n\,la$$

Or ſi $a = 1$, il ſera tant $1^{n\sqrt{-1}} = 1$, que $1^{-n\sqrt{-1}} = 1$, à cauſe de $l\,1 = 0$.

COROLL. 4.

§. 91. Donc ſi l'on met $n = 1$ & $a = 2$, il ſera:

$\frac{2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2} = \text{cof } l\,2$ & $\frac{2^{\sqrt{-1}} - 2^{-\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \text{ſin } l\,2$. Or puisqu'il y a $l\,2 = 0,\ 693147180559$, on en tirera cof. $l\,2 = 0,\ 769238901354 = \frac{2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$. Mais l'arc même dont le coſinus $= l\,2$ ſe trouve $39°, 42^{I}, 51^{II}, 52^{III}, 9^{IV}$.

SCHOLIE.

§. 92. Le cas, où a eſt un nombre negatif, qui n'eſt pas compris dans cette ſolution, quoique a ſoit une quantité réelle, ſe réſoudra par le probleme ſuivant, où je prendrai pour la quantité, qui doit être élevée à un expoſant imaginaire, une quantité imaginaire quelconque de la forme $a + b\sqrt{-1}$, qui comprend ſous elle, en poſant $b = 0$, toutes les quantités réelles tant negatives que poſitives.

Probleme III.

§. 93. *Une quantité imaginaire étant elevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt auſſi imaginaire, trouver la valeur imaginaire de cette puiſſance.*

SOLU-

SOLUTION.

Soit $a+bV-1$ la quantité imaginaire, & $m+nV-1$ l'expoſant de la puiſſance, de ſorte qu'il faille trouver la valeur de cette formule $(a+bV-1)^{m+nV-1}$. Poſons donc pour cet effet:

$$(a+bV-1)^{m+nV-1} = x+yV-1$$

& prenant les logarithmes on aura:

$$(m+nV-1)\,l(a+bV-1) = l(x+yV-1)$$

Paſſons aux differentiels, & puisque, comme nous avons déjà vu,

$$d.l(x+yV-1) = \frac{x\,dx+y\,dy}{xx+yy} + \frac{(x\,dy-y\,dx)}{xx+yy}V-1$$

nous aurons:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{m(ada+bdb)}{aa+bb}+\frac{n(ada+bdb)V-1}{aa+bb}\\ &+\frac{m(adb-bda)V-1}{aa+bb}-\frac{n(adb-bda)}{aa+bb}\end{aligned}\right\} = \frac{xdx+ydy}{xx+yy}+\frac{(xdy-ydx)V-1}{xx+yy}$$

Egalant maintenant ſéparément les membres réels & imaginaires, nous aurons ces deux égalités:

$$\frac{m(ada+bdb)}{aa+bb} - \frac{n(adb-bda)}{aa+bb} = \frac{xdx+ydy}{xx+yy}$$

$$\frac{m(adb-bda)}{aa+bb} + \frac{n(ada+bdb)}{aa+bb} = \frac{xdy-ydx}{xx+yy}$$

Pour en prendre les integrales ſoit:

$$V(aa+bb) = c \quad \& \quad \text{A tang}\,\frac{b}{a} = \Phi;$$

ou bien $\text{ſin}\,\Phi = \frac{b}{c}$ & $\text{cof}\,\Phi = \frac{a}{c}$, d'où l'on peut toujours trouver l'angle Φ; or je ſuppoſe ici, que c eſt une quantité poſitive $= V(aa+bb)$. Cela remarqué, nos integrales ſeront:

$$m\,lc - n\Phi = lV(xx + yy)$$
$$m\Phi + n\,lc = \text{A tang. } \frac{y}{x}.$$

De là il s'enſuit, qu'il ſera $V(xx+yy) = c^m e^{-n\Phi}$ mettant e pour le nombre, dont le logarithme hyperbolique eſt $= 1$. Ainſi pour trouver les valeurs de x & y, de cette équation :

$$(a+bV-1)^{m+nV-1} = x + yV-1$$

ayant poſé $c = V(aa+bb)$, & pris l'angle Φ tel, qu'il ſoit $\text{cof}\,\Phi = \frac{a}{c}$ & $\text{ſin}\,\Phi = \frac{b}{c}$, on aura :

$$x = c^m\, e^{-n\Phi}\ \text{cof}\,(m\Phi + n\,lc)$$
$$y = c^m\, e^{-n\Phi}\ \text{ſin}\,(m\Phi + n\,lc)$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 94. Si $b = 0$ & a une quantité poſitive, on aura $c = a$, & l'angle $\Phi = 0$, ou $\pm 2\pi$, ou $\pm 4\pi$, ou en général $\Phi = 2\lambda\pi$, prenant λ pour un nombre entier quelconque ; donc il ſera :

$$a^{m+nV-1} = a^m\, e^{-2\lambda n\pi}\left(\text{cof}(2\lambda m\pi + nla) + V-1.\,\text{ſin}\,(2\lambda m\pi + nla)\right)$$

qui convient avec la forme précedente, ſi $\lambda = 0$; de ſorte que cette transformation eſt plus générale.

COROLL. II.

§. 95. Si $b = 0$, & a une quantité negative $-a$, il ſera encore $c = +a$, & à cauſe de $\text{cof}\,\Phi = \frac{-a}{c} = -1$, l'angle Φ ſera $\pm\pi$ ou $\pm 3\pi$ ou $\pm 5\pi$ &c. ou en général $\Phi = (2\lambda - 1)\,\pi$, prenant pour

pour λ un nombre quelconque entier, ou poſitif, ou negatif. Il ſera donc

$$(-a)^{m+n\sqrt{-1}} =$$
$$a^m e^{-(2\lambda-1)n\pi}\left(\text{cof}\,((2\lambda-1)m\pi+nla)+\sqrt{-1}.\text{ſin}\,((2\lambda-1)m\pi+nla)\right)$$

COROLL. III.

§. 96. En général donc, quelques quantités que ſoient a & b, donnant à c la valeur poſitive de $\sqrt{(aa+bb)}$, & prenant pour Φ un tel angle que $\text{ſin}\,\Phi = \frac{b}{c}$ & $\text{cof}\,\Phi = \frac{a}{c}$, puiſque pour Φ on peut également prendre en général l'angle $2\lambda\pi+\Phi$, où λ marque un nombre entier quelconque affirmatif ou negatif, on aura

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} =$$
$$c^m e^{-2\lambda n\pi - n\Phi}\left(\begin{matrix}+\,\text{cof}\,(2\lambda m\pi+m\Phi+nlc)\\ +\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,(2\lambda m\pi+m\Phi+nlc)\end{matrix}\right)$$

d'où l'on trouvera toutes les valeurs poſſibles, que cette formule $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ renferme, en donnant à λ ſucceſſivement toutes les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ &c. où il ſuffit de prendre pour c^m la ſeule valeur réelle & poſitive, qui y eſt renfermée.

COROLL. IV.

§. 97. Si $a=0$; $m=0$, & $b=1$, il ſera $c=1$ & $\Phi=\frac{1}{2}\pi$, d'où l'on tirera cette transformation :

$$(\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda n\pi-\frac{1}{2}n\pi}$$

ou bien $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda\pi-\frac{1}{2}\pi}$, qui eſt d'autant plus remarquable, qu'elle eſt réelle, & qu'elle renferme même une infinité de valeurs réelles differentes. Car poſant $\lambda=0$, on aura en nombres

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = 0,207879576350\ldots$$

COROLL. V.

§. 98. Si l'on poſe $a = \text{cof}\,\Phi$ & $b = \text{ſin}\,\Phi$, prenant $r = 1$, de ſorte que $lr = 0$; & on aura cette transformation remarquable:

$$(\text{cof}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi)^{m+n\sqrt{-1}} =$$

$$e^{-2\lambda n\pi - n\Phi}\left(\text{cof}\,m\,(2\lambda\pi + \Phi) + \sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,m\,(2\lambda\pi + \Phi)\right)$$

& ſi $m = 0$, cette formule ſera réelle

$$(\text{cof}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi)^{n\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda n\pi - n\Phi}.$$

SCHOLIE.

§. 99. Nous voyons donc par là, que toutes les quantités imaginaires, qui tirent leur origine non ſeulement des opérations algebriques, mais auſſi celles qui naiſſent de l'élevation à des expoſans quelconques, & même imaginaires, ſont toujours réductibles à la forme générale $M + N\sqrt{-1}$. Et on comprend de là auſſi, que ſi les expoſans étoient eux-mêmes de telles puiſſances à expoſans imaginaires, la valeur de toute la formule ſeroit néantmoins compriſe dans la forme $M + N\sqrt{-1}$. Car il eſt clair, ſi α, $\mathfrak{G}$, γ, marquent des quantités imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$, la quantité derivée $\alpha^{\mathfrak{G}^{\gamma}}$ y ſeroit auſſi toujours compriſe, puisque l'expoſant $\mathfrak{G}^{\gamma}$ eſt réductible à cette forme.

Probleme IV.

§. 100. *Un nombre imaginaire quelconque étant propoſé, trouver ſon logarithme hyperbolique.*

SOLUTION.

Soit $a + b\sqrt{-1}$ la quantité imaginaire, dont il faut chercher le logarithme, qui ſoit $= x + y\sqrt{-1}$; de ſorte qu'il y ait:

$$l(a + b\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1}$$

Prenant

Prenant les differentiels on aura:

$$\frac{a\,da+b\,db}{aa+bb}+\frac{(a\,db-b\,da)\sqrt{-1}}{aa+bb}=dx+dy\sqrt{-1}$$

Soit encore $\sqrt{(aa+bb)}=c$, & l'angle Φ tel, qu'il ſoit $\text{cof}\,\Phi=\frac{a}{c}$ & $\text{ſin}\,\Phi=\frac{b}{c}$; & par l'integration on trouvera: $x=l\sqrt{(aa+bb)}=lc$ & $y=\text{A tang}\,\frac{b}{a}=\Phi$. Donc nous aurons:

$$l(a+b\sqrt{-1})=l\sqrt{(aa+bb)}+\sqrt{-1}.\,\text{A cof}\,\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$$

ou $l(a+b\sqrt{-1})=l\sqrt{(aa+bb)}+\sqrt{-1}.\,\text{A ſin.}\,\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 101. Puisqu'il y a une infinité d'angles, auxquels répond le même ſinus $\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & coſinus $\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$, chaque nombre tant réel qu'imaginaire a une infinité de logarithmes, dont tous ſont imaginaires à l'exception d'un ſeul lorsque $b=0$, & a un nombre poſitif.

COROLL. II.

§. 102. Si nous poſons $\sqrt{(aa+bb)}=c$, & l'angle trouvé $=\Phi$, à cauſe de $a=c\,\text{cof}\,\Phi$ & $b=c\,\text{ſin}\,\Phi$, il ſera $lc(\text{cof}\,\Phi+\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi)=lc+\Phi\sqrt{-1}$; où au lieu de Φ il eſt permis de mettre $\pm 2\pi+\Phi$; $\pm 4\pi+\Phi$; $\pm 6\pi+\Phi$ &c. le caractere π marquant la ſomme de deux angles droits. On aura donc $l(\text{cof}\,\Phi+\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi)=\Phi\sqrt{-1}$.

Probleme. V.

§. 103. *Un logarithme imaginaire étant donné, trouver le nombre qui lui convient.*

SOLUTION.

Soit $a+b\sqrt{-1}$ le logarithme imaginaire propoſé, & $x+y\sqrt{-1}$ le nombre qui lui convient, de ſorte que

$$l(x+y\sqrt{-1}) = a+b\sqrt{-1}$$

Comparant cette équation avec celle, que nous venons de déduire dans l'article précedent:

$$lc(\text{cof}\,\Phi+\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,\Phi) = lc+\Phi\sqrt{-1}$$

nous aurons $\Phi = b$, & $lc = a$, donc $c = e^a$, ſuppoſant $le = 1$. D'où nous tirerons $x = e^a \text{cof}\,b$ & $y = e^a \text{ſin}\,b$. Par conſéquent le nombre, qui répond au logarithme $a+b\sqrt{-1}$, ſera $= e^a(\text{cof}\,b+\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,b)$. C. Q. F. Tr.

COROLL. I.

§. 104. Toutes les fois donc que b eſt ou zero, ou égale à $+\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, &c. ou bien en général $b = \pm\lambda\pi$, le nombre qui répond au logarithme $a+b\sqrt{-1}$ ſera réel & $= \pm e^a$. Il ſera poſitif, ſi λ eſt un nombre pair, & negatif, ſi λ eſt impair.

COROLL. II.

§. 105. On voit auſſi, qu'il n'y a qu'un ſeul nombre, qui convienne à un logarithme propoſé; & que toutes les fois que le logarithme eſt réel, le nombre ſera auſſi réel. Mais qu'il y a auſſi des cas, ou quoique le logarithme ſoit imaginaire, le nombre eſt pourtant réel. Mais ayant déjà ſuffiſamment expoſé cette matiere ailleurs, je paſſe aux quantités imaginaires, qui renferment des angles, ou leurs ſinus, coſinus, & tangentes.

Probleme. VI.

§. 106. *Un angle, ou arc de cercle imaginaire quelconque, étant propoſé, trouver ſon ſinus & coſinus, & tangente.*

SOLU-

SOLUTION.

Soit $a+b\sqrt{-1}$ l'angle propoſé, qui étant compoſé de deux parties, l'une réelle a, & l'autre imaginaire $b\sqrt{-1}$, nous n'avons qu'à chercher le ſinus & le coſinus de cet arc imaginaire. Or les ſeries connues nous donnent:

$$\text{cof. } b\sqrt{-1} = 1 + \frac{bb}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4} + \text{&c.} = \frac{e^b + e^{-b}}{2}$$

$$\text{ſin. } b\sqrt{-1} = b\sqrt{-1} + \frac{b^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{b^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} \text{ &c.} = \frac{e^b - e^{-b}}{2}\sqrt{-1}$$

& de là nous tirerons:

$$\text{ſin } (a+b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}(e^b + e^{-b}) \text{ ſin } a + \frac{\sqrt{-1}}{2}(e^b - e^{-b}) \text{ cof } a$$

$$\text{cof } (a+b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}(e^b + e^{-b}) \text{ cof } a - \frac{\sqrt{-1}}{2}(e^b - e^{-b}) \text{ ſin } a:$$

donc la tangente ſera:

$$\text{tang } (a+b\sqrt{-1}) = \frac{(e^b + e^{-b}) \text{ tang } a + (e^b - e^{-b})\sqrt{-1}}{(e^b + e^{-b}) - (e^b - e^{-b}) \text{ tang } a.\sqrt{-1}} \text{ ou bien}$$

$$\text{tang } (a+b\sqrt{-1}) = \frac{(e^{2b}+1) \text{ tang } a + (e^{2b}-1)\sqrt{-1}}{e^{2b} + 1 - (e^{2b}-1) \text{ tang } a.\sqrt{-1}}$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 107. Puiſque dans l'expreſſion de la tangente, tant le numerateur que le denominateur ſont imaginaires, ſi l'on en délivre le denominateur, on aura:

$$\text{tang } (a+b\sqrt{-1}) = \frac{2e^{2b} \text{ ſin } 2a + (e^{4b}-1)\sqrt{-1}}{e^{4b} + 2e^{2b} \text{ cof } 2a + 1}$$

COROLL.

COROLL. II.

§. 108. Le ſinus de l'angle $a + b\sqrt{-1}$ devient réel non ſeulement dans le cas $b = 0$, où l'angle meme eſt réél, mais auſſi dans les cas, où $\cos a = 0$, ce qui arrive, lorsque poſant ϱ pour la marque d'un angle droit, il eſt $a = (2\lambda - 1)\varrho$, où λ ſignifie un nombre entier où negatif. Car alors il ſera:

$$\sin\left((2\lambda-1)\varrho + b\sqrt{-1}\right) = \pm\tfrac{1}{2}\left(e^{b} + e^{-b}\right)$$

où le ſigne + a lieu, ſi λ eſt un nombre impair, & le ſigne −, ſi λ eſt un nombre pair.

COROLL. III.

§. 109. De méme le coſinus de l'angle $a + b\sqrt{-1}$ ſera réel non ſeulement lorsque $b = 0$, mais auſſi lorsque $\sin a = 0$, ce qui arrive ſi $a = 2\lambda\varrho$, & alors on aura $\cos(2\lambda\varrho + b\sqrt{-1}) = \pm\frac{1}{2}\left(e^{b} + e^{-b}\right)$, où le ſigne ſuperieur + a lieu, ſi λ eſt un nombre pair, & l'inferieur −, ſi λ eſt un nombre impair.

COROLL. IV.

§. 110. Pour la tangente de l'angle $a + b\sqrt{-1}$, elle ne ſauroit jamais devenir réelle, à moins qu'il ne fut $b = 0$, ou l'angle même réel.

COROLL. V.

§. 111. Les formules trouvées fourniſſent encore, en donnant à $\sqrt{-1}$ ſes deux ſignes + & −, qui lui conviennent également, les formules ſuivantes, qu'il ſera à propos de remarquer:

$$\sin(a+b\sqrt{-1}) + \sin(a-b\sqrt{-1}) = (e^{b} + e^{-b})\sin a$$
$$\sin(a+b\sqrt{-1}) - \sin(a-b\sqrt{-1}) = (e^{b} - e^{-b})\sqrt{-1}.\cos a$$
$$\cos(a+b\sqrt{-1}) + \cos(a-b\sqrt{-1}) = (e^{b} + e^{-b})\cos a$$
$$\cos(a+b\sqrt{-1}) - \cos(a-b\sqrt{-1}) = (e^{b} - e^{-b})\sqrt{-1}.\sin a.$$

Proble-

Probleme VII.

§. 112. *Le ſinus d'un angle étant réel, mais plus grand que le ſinus total, de ſorte que l'angle ſoit imaginaire, trouver la valeur de cet angle.*

SOLUTION.

Il y a ici deux cas, ſelon que ce ſinus donné eſt poſitif ou negatif:

I. Soit donc premierement le ſinus poſitif $= p$ & $p > 1$ prenant toujours l'unité pour le ſinus total, & ſoit l'angle imaginaire qui répond à ce ſinus $= a + b\sqrt{-1}$, & pour que le ſinus ſoit réel, il faut qu'il ſoit $a = (2\lambda - 1)\varrho$, prenant ϱ pour la marque d'un angle droit, & puisque ſelon le §. 108.

$$\text{ſin}\left((2\lambda-1)\varrho + b\sqrt{-1}\right) = \pm\tfrac{1}{2}\left(e^{b} + e^{-b}\right) = p$$

il faut qu'il ſoit λ un nombre impair. Soit donc $\lambda = 2\mu + 1$, & nous aurons:

$$\text{ſin}\left((4\mu+1)\varrho + b\sqrt{-1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{b} + e^{-b}\right) = p$$

cette équation étant toujours poſſible, on en tirera

$$e^{b} = p \pm \sqrt{(pp-1)} \quad \& \quad b = l\left(p \pm \sqrt{(pp-1)}\right)$$

donc l'angle cherché qui répond au ſinus p ſera

$$(4\mu+1)\varrho + \sqrt{-1}.\ l\left(p \pm \sqrt{(pp-1)}\right)$$

II. Soit le ſinus propoſé negatif $= -p$ & $p > 1$, & il faut que λ ſoit un nombre pair. Soit donc $\lambda = 2\mu$, & il ſera:

$$\text{ſin}\left((4\mu-1)\varrho + b\sqrt{-1}\right) = -\tfrac{1}{2}\left(e^{b} + e^{-b}\right) = -p$$

D'où l'on tire comme dans le cas précedent

$$e^{b} = p \pm \sqrt{(pp-1)} \quad \& \quad b = l\left(p + \sqrt{(pp-1)}\right)$$

Donc l'angle qui répond au ſinus negatif $-p$ ſera :

$$(4\mu-1)\varrho + \sqrt{-1}.\ l(p \pm \sqrt{(pp-1)}).\quad \text{C. Q. F. T.}$$

Probleme VIII.

§. 113. *Le coſinus d'un angle étant réel, mais plus grand que le ſinus total* $= 1$, *trouver l'angle imaginaire qui répond à ce coſinus.*

SOLUTION.

Soit $p > 1$, & que le coſinus propoſé ſoit $= +p$. L'angle répondant ſoit $= a + b\sqrt{-1}$ & par §. 109 il eſt clair qu'il doit être $a = 2\lambda\varrho$, pour qu'il ſoit

$$\text{coſ}\,(2\lambda\varrho + b\sqrt{-1}) = \pm\tfrac{1}{2}(e^b + e^{-b}) = p$$

donc il faut qu'il ſoit λ un nombre pair. Soit donc $\lambda = 2\mu$ & nous aurons :

$$\text{coſ}\,(4\mu\varrho + b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}(e^b + e^{-b}) = p:$$

d'où l'on tire $e^b = p + \sqrt{(pp-1)}$ & $b = l(p \pm \sqrt{(pp-1)})$ & partant au coſinus poſitif p répond l'angle

$$4\mu\varrho + \sqrt{-1}.\ l(p \pm \sqrt{(pp-1)}).$$

Si le coſinus donné eſt negatif $= -p$, de ſorte que $p > 1$, il faut prendre pour λ un nombre impair, ſoit donc $\lambda = 2\mu + 1$, & l'angle ou l'arc, qui répond au coſinus negatif $-p$, ſera

$$(4\mu+2)\varrho + \sqrt{-1}.\ l(p \pm \sqrt{(pp-1)}).\quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE.

§. 114. Il eſt indifferent de prendre $p + \sqrt{(pp-1)}$ ou $p - \sqrt{(pp-1)}$, l'un & l'autre étant une quantité poſitive. On n'a qu'à remarquer que $l(p + \sqrt{(pp-1)}) = -l(p - \sqrt{(pp-1)})$, de ſorte que cette ambiguité réjaillit ſur celle, qui eſt eſſentielle à $\sqrt{-1}$.

Proble-

Probleme IX.

§. 114. *Le ſinus d'un angle étant imaginaire, trouver la valeur de l'angle ou l'arc imaginaire, qui lui répond.*

SOLUTION.

Soit $p + q\sqrt{-1}$ le ſinus imaginaire propoſé, & que l'angle cherché ſoit $= a + b\sqrt{-1}$, de ſorte qu'il doit être

$$\text{ſin } (a + b\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1}.$$

Maintenant comparons cette forme $p + q\sqrt{-1}$ avec celle qui a été trouvée dans le probleme 6me, & on aura

$$p = \tfrac{1}{2}(e^b + e^{-b}) \text{ ſin } a \;\&\; q = \tfrac{1}{2}(e^b - e^{-b}) \text{ cof } a$$

& de là on tirera :

$$p \text{ cof } a + q \text{ ſin } a = e^b \text{ ſin } a \text{ cof } a \quad \text{ou bien}$$

$$e^b = \frac{p}{\text{ſin } a} + \frac{q}{\text{cof } a} \;\&\; e^{-b} = \frac{p}{\text{ſin } a} - \frac{q}{\text{cof } a}$$

Or puiſque $e^b e^{-b} = 1$ nous obtiendrons :

$$pp \text{ cof } a^2 - qq \text{ ſin } a^2 = \text{ſin } a^2 \text{ cof } a^2 \quad \text{ou bien}$$

$pp - (pp + qq) \text{ ſin } a^2 = \text{ſin } a^2 - \text{ſin } a^4$, d'où nous tirons

$$\text{ſin } a^2 = \tfrac{1}{2}(1 + pp + qq) \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}(1 + pp + qq)^2 - pp)} \;\&$$

$$\text{ſin } a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + 2p + pp + qq)} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - 2p + pp + qq)} \;\&$$

$$\text{cof } a^2 = \tfrac{1}{2}(1 - pp - qq) \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}(1 + pp + qq)^2 - pp)}.$$

Mais puiſque $\text{cof } 2a = 2 \text{ cof } a^2 - 1$, il ſera

$$\text{cof } 2a = -pp - qq + \sqrt{(1 - 2pp + 2qq + (pp + qq)^2)}$$

cette expreſſion étant toujours réelle & moindre que l'unité, l'angle $2a$ & partant auſſi a ſera réel, & on en trouvera $\text{ſin } a = \sqrt{\frac{1 - \text{cof } 2a}{2}}$ & $\text{cof } a = \sqrt{\frac{1 + \text{cof } 2a}{2}}$. Or ces quantités étant trouvées avec

l'angle a, on aura $b = l\left(\frac{p}{\sin a} + \frac{q}{\cos a}\right)$, & l'angle qui répond au ſinus $p + q\sqrt{-1}$ ſera $a + b\sqrt{-1}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

§. 115. Si le ſinus propoſé eſt ſimplement imaginaire ou $= q\sqrt{-1}$ de ſorte que $p = o$, & il eſt clair qu'il doit être ſin $a = o$, & partant $a = 2\lambda\varrho$; où ϱ marque l'angle droit & λ un nombre entier quelconque: donc il ſera $q = \pm\frac{1}{2}(e^b - e^{-b})$ ſelon que λ eſt un nombre pair ou impair. Il ſera donc $e^b = \pm q \pm \sqrt{(qq+1)}$, & partant on pourra toujours rendre cette quantité poſitive, d'où l'on aura

$b = l(\sqrt{(qq+1)} \pm q)$, où le ſigne $+$ a lieu ſi λ eſt un nombre pair, & le $-$ ſi λ eſt impair. Ainſi l'arc qui répond au ſinus $q\sqrt{-1}$ ſera

ou $4\mu\varrho + \sqrt{-1}.\ l(\sqrt{(qq+1)} + q)$

ou $(4\mu+2)\varrho + \sqrt{-1}.\ l(\sqrt{(qq+1)} - q)$.

Probleme X.

§. 116. *Le coſinus d'un angle étant imaginaire, trouver la valeur imaginaire de l'arc ou l'angle qui lui répond.*

SOLUTION.

Soit $p + q\sqrt{-1}$ le coſinus imaginaire propoſé, & $a + b\sqrt{-1}$ l'arc cherché qui lui répond: de ſorte que

$$\cos(a + b\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1}.$$

Or ſi nous rapportons cette égalité avec l'article 106 nous aurons:

$p = \frac{1}{2}(e^b + e^{-b})\cos a$ & $q = -\frac{1}{2}(e^b - e^{-b})\sin a$

d'où nous obtiendrons:

$$e^b = \frac{p}{\cos a} - \frac{q}{\sin a} \quad \& \quad e^{-b} = \frac{p}{\cos a} + \frac{q}{\sin a}$$

&

& $\text{cof}\, a^2 = \frac{1}{2}(1 + pp + qq) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(1 + pp + qq)^2 - pp)}$
donc $\text{cof}\, 2a = pp + qq - \sqrt{(1 - 2pp + 2qq + (pp + qq)^2)}$
qui eſt auſſi toujours réelle & moindre que le ſinus total, de la on aura
$\text{ſin}\, a = \sqrt{\frac{1 - \text{cof}\, 2a}{2}}$ & $\text{cof}\, a = \sqrt{\frac{1 + \text{cof}\, 2a}{2}}$, & ayant déterminé l'angle a même, à cauſe de $b = l\left(\frac{p}{\text{cof}\, a} - \frac{q}{\text{ſin}\, a}\right)$, l'angle ou l'arc qui répond au coſinus imaginaire $p + q\sqrt{-1}$ ſera $= a + b\sqrt{-1}$. C. Q. F. Tr.

COROLLAIRE.

§. 117. Si $p = o$, de ſorte que le coſinus propoſé eſt $= q\sqrt{-1}$, on aura $\text{cof}\, a = o$, & partant $a = (2\lambda - 1)\varrho$, d'où l'on tire $q = -\frac{1}{2}(e^b - e^{-b}) \cdot \pm 1$, où le ſigne ſuperieur vaut, ſi λ eſt un nombre impair, & l'inferieur ſi pair. On aura donc
$e^{2b} = \mp 2e^b q + 1$, & $e^b = \mp q + \sqrt{(qq + 1)}$, & $b = l(\sqrt{(qq + 1)} \mp q)$
& l'arc qui repond au coſinus $q\sqrt{-1}$ ſera
ou $(4\mu + 1)\varrho + \sqrt{-1}.l(\sqrt{(1 + qq)} - q)$
ou $(4\mu + 3)\varrho + \sqrt{-1}.l(\sqrt{(1 + qq)} + q)$

SCHOLIE.

§. 118. Ayant trouvé la valeur de $\text{cof}\, 2a$, ſi l'on en cherche les valeurs $\text{ſin}\, a = \sqrt{\frac{1 - \text{cof}\, 2a}{2}}$ & $\text{cof}\, a = \sqrt{\frac{1 + \text{cof}\, 2a}{2}}$, on les peut prendre, ou affirmatives, ou negatives. Pour faire le choix, il faut regarder aux quantités p & q, ſi elles ſont poſitives ou negatives, & donner enſuite aux ſin a & $\text{cof}\, a$ les ſignes, qui rendent les valeurs de e^b & de e^{-b} poſitives, tant dans ce probleme que dans le precedent; or dans chaque cas ce choix eſt aiſé à faire, de ſorte qu'on eſt toujours le maitre de trouver des valeurs réelles pour les lettres a & b.

Probleme XI.

§. 119. *Une tangente imaginaire étant donnée, trouver la valeur imaginaire de l'angle ou de l'arc, qui lui repond.*

SOLUTION.

Soit $p+q\sqrt{-1}$ la tangente imaginaire donnée, & $a+b\sqrt{-1}$ l'arc, qui convient à cette tangente, de ſorte que

$$\text{tang}\,(a+b\sqrt{-1}) = p+q\sqrt{-1}.$$

Or nous avons trouvé cy-deſſus §. 107.

$$\text{tang}\,(a+b\sqrt{-1}) = \frac{2e^{2b}\,\text{ſin}\,2a+(e^{4b}-1)\sqrt{-1}}{e^{4b}+2e^{2b}\,\text{cof}\,2a+1}$$

donc il faut qu'il ſoit,

$$p = \frac{2e^{2b}\,\text{ſin}\,2a}{e^{4b}+2e^{2b}\,\text{cof}\,2a+1} \;\&\; q = \frac{e^{4b}-1}{e^{4b}+2e^{2b}\,\text{cof}+1}$$

de là nous tirons ces deux équations

$$e^{4b}p + 2e^{2b}(p\,\text{cof}\,2a - \text{ſin}\,2a) + p = 0$$
$$e^{4b}(q-1) + 2e^{2b}q\,\text{cof}\,2a + q + 1 = 0$$

& par élimination.

$$e^{2b} = \frac{-p}{p\,\text{cof}\,2a+(q-1)\,\text{ſin}\,2a} = \frac{-p\,\text{cof}\,2a+(q+1)\,\text{ſin}\,2a}{p}$$

Donc nous aurons:

$$0 = pp(1-\text{cof}\,2a^2)+2p\,\text{ſin}\,2a\,\text{cof}\,2a+(qq-1)\,\text{ſin}\,2a^2 \text{ ou bien}$$
$$0 = pp\,\text{ſin}\,2a+2p\,\text{cof}\,2a+(qq-1)\,\text{ſin}\,2a$$

Par conſéquent on aura

$$\text{tang}\,2a = \frac{2p}{1-pp-qq} \quad \& \text{ partant}$$

$$\text{ſin}\,2a = \frac{2p}{\sqrt{(4pp+(1-pp-qq)^2)}} \;\&\; \text{cof}\,2a = \frac{1-pp-qq}{\sqrt{(4pp+(1-pp-qq)^2)}}$$

donc

$$\text{donc } e^{2b} = \frac{pp + (1+q)^2}{\sqrt{(4pp+(1-pp-qq)^2)}}$$

$$\& \; b = \tfrac{1}{2} l\left(pp + (1+q)^2\right) - \tfrac{1}{4} l\left(4pp + (1-pp-qq)^2\right)$$

Ayant donc trouvé par ces formules tant la valeur de b, que celle de l'angle $2a$ ou a, l'angle ou l'arc, qui répond à la tangente imaginaire $p + q\sqrt{-1}$ ſera $= a + b\sqrt{-1}$. C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 120. Puisque $4pp + (1-pp-qq)^2 = (pp+(q+1)^2)(pp+(q-1)^2)$ il ſera :

$$e^{4b} = \frac{pp + (q+1)^2}{pp + (q-1)^2} \quad \& \text{ partant } b = \tfrac{1}{4} l \frac{pp + (q+1)^2}{pp + (q-1)^2}$$

Or l'angle a ſe détermine le plus commodément de la formule de la tangente : tang $2a = \frac{2p}{1-pp-qq}$, d'où l'on voit, que les valeurs de a & b ſeront toujours réelles.

COROLL. II.

§. 121. Si $p = 0$, ou qu'on veuille chercher l'angle dont la tangente $= q\sqrt{-1}$, il ſera tang $2a = 0$, donc $2a = 2\lambda\varrho$, & $a = \lambda\varrho$, & $b = \frac{1}{4} l \frac{(q+1)^2}{(q-1)^2}$. Par conſéquent à la tangente $q\sqrt{-1}$ répondent les arcs $\lambda\varrho + \frac{\sqrt{-1}}{4} l \frac{(q+1)^2}{(q-1)^2}$ où $\lambda\varrho$ marque un multiple quelconque de l'angle droit.

COROLL. III.

§. 122. Ici les cas où $q + 1 = 0$, ou $q - 1 = 0$, exigent une réduction particuliére, qu'il faut faire, avant que de poſer $p = 0$. Soit donc $qq - 1 = 0$, ou la tangente propoſée $= p \pm \sqrt{-1}$, & on aura

tang

tang $2a = \frac{-2}{p}$, & $e^{4b} = \frac{pp + 2 \pm 2}{pp + 2 + 2.}$; c'eſt à dire pour le ſigne ſuperieur $e^{4b} = \frac{pp + 4}{pp}$ & pour l'inferieur $e^{4b} = \frac{pp}{pp + 4.}$ Maintenant ſi $p = 0$, il ſera $2a = (2\lambda + 1)\varrho$ à cauſe de tang $2a = \infty$, & $b = \pm\infty$. Donc à la tangente $\pm\sqrt{-1}$ répond l'angle $= (\lambda + \frac{1}{2})\varrho \pm \infty\sqrt{-1}$.

COROLL. IV.

§. 123. Lorsque $pp = 1 - qq$ ou $p = \sqrt{(1 - qq)}$, il ſera tang $2a = \infty$ & $2a = (2\lambda + 1)\varrho$: ou $a = (\lambda + \frac{1}{2})\varrho$. Enſuite il ſera $b = \frac{1}{4} l \frac{1+q}{1-q.}$ De ſorte qu'à la tangente $\sqrt{(1 - qq)} \pm q\sqrt{-1}$ repond l'arc $= (\lambda + \frac{1}{2})\varrho \pm \frac{\sqrt{-1}}{4} l \frac{1+q}{1-q.}$

SCHOLIE.

§. 124, Puisque donc toutes ces quantités imaginaires, qui ſont formées par des opérations transcendantes ſont auſſi compriſes dans la forme générale $M + N\sqrt{-1}$, nous pourrons ſoutenir ſans balancer, que généralement toutes les quantités imaginaires, quelques compliquées qu'elles puiſſent être, ſont toujours réductibles à la forme $M + N\sqrt{-1}$; ou qu'elles ſont toujours compoſées de deux membres, donc l'un eſt réel, & l'autre une quantité réelle multipliée par $\sqrt{-1}$.

RECHER

RECHERCHES
SUR LA PRÉCESSION DES ÉQUINOXES, ET
SUR LA NUTATION DE L'AXE DE LA TERRE,

PAR M. EULER.

Planc

LEMME I.

1. *Suppoſant la terre ſpherique* A E B F *& compoſée d'une matiere homogene, ſi la maſſe de la terre eſt nommée* = M *& ſon rayon* CA = CE = *a, le moment d'inertie de la terre autour d'un axe quelconque, qui paſſe par ſon centre, ſera* = $\frac{2}{5}$ M *a a.* Fig.

COROLLAIRE.

2. Quoique la terre ne ſoit pas ſpherique, puiſque ſa figure ne differe de la ſpherique que très peu, on comprend aiſément, que ſon moment d'inertie ſe peut néantmoins exprimer par $\frac{2}{5}$ M *a a.* Car cette expreſſion ne changera pas ſenſiblement, ſoit qu'on prenne pour *a* ſon demi-axe, ou le demi-diametre de ſon équateur.

REMARQUE.

3. Il faut ſe ſouvenir ici, que je nomme le moment d'inertie d'un corps quelconque par rapport à un certain axe, autour duquel il doit tourner, ce qui réſulte, lorsqu'on multiplie chaque particule du corps par le quarré de ſa diſtance à cet axe, & qu'on aſſemble tous ces produits élémentaires dans une ſomme. Car alors cette ſomme donnera ce que je nomme le moment d'inertie de ce corps autour de cet axe.

LEMME II.

4. *Si la terre étant ſuppoſée ſpherique, a autour de ſon centre*

un noyau également ſpherique a e b f, dont la denſité ſoit à celle de la croute comme 1 + ν *à* 1; *alors nommant la maſſe de toute la terre* = M, *le rayon* CA = a, *& le rayon du noyau* C a = α, *le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque, qui paſſe par ſon centre, ſera* = $\frac{2}{5}$ M. $\frac{a^5 + \nu\alpha^5}{a^3 + \nu\alpha^3}$

COROLLAIRE I.

5. Si le noyau eſt plus denſe que le reſte de la terre, la valeur de ν ſera poſitive, mais ſi le noyau eſt moins denſe que la croute, ν ſera un nombre negatif: or ſi la terre étoit tout à fait creuſe en dedans, ou que l'eſpace *a e b f* fut vuide, il ſeroit $\nu = -1$, & dans ce cas le moment d'inertie deviendroit = $\frac{2}{5}$ M. $\frac{a^5 - \alpha^5}{a^3 - \alpha^3}$

COROLL. II.

2. On ſera encore d'accord, qu'une petite aberration de la figure ſpherique ne change pas ſenſiblement l'expreſſion du moment d'inertie, pourvu que la figure du noyau ſoit auſſi à peu près ſpherique. Du moins il eſt bien certain, que dans l'application de ces deux propoſitions à la préceſſion des équinoxes, une petite difference ne ſauroit être d'aucune conſéquence; puiſqu'on ſera obligé de ſe contenter d'approximations.

HYPOTHESE.

7. La terre ayant une fois reçu un mouvement rotatoire autour d'un axe, qui convient avec ſon axe de figure, ou qui n'en differe que très peu, elle conſervera toujours ce mouvement uniforme, & ſon axe de rotation demeurera toujours le même & ſera dirigé vers les mêmes points du ciel; à moins que la terre ne ſoit aſſujettie à des forces étrangeres, qui pourroient cauſer quelque changement, ou dans la viteſſe du mouvement rotatoire, ou dans la poſition de l'axe de rotation.

REMAR-

REMARQUE.

8. Pour qu'un corps puiſſe tourner librement autour d'un axe, il ne ſuffit pas que cet axe paſſe par ſon centre de gravité, il faut de plus, que toutes les forces centrifuges ſe maintiennent en équilibre: & quand cette derniére condition n'a pas lieu, il eſt impoſſible que l'axe de rotation demeure le méme, mais il ſera continuellement changé par les forces centrifuges du corps. Il dépend donc uniquement de la diſtribution de la matiére de la terre, ſi l'axe autour duquel elle tourne, eſt doüé de cette propriéte ou non? Car ſi toutes les forces centrifuges ne ſe détruiſoient pas mutuellement, les poles de la terre ſouffriroient des changemens, quand méme il n'y auroit point de forces étrangeres. Ce n'eſt donc qu'une pure ſuppoſition que je fais, que l'axe de la terre, autour duquel elle tourne, ne ſoit pas aſſujetti à un tel changement; mais il ſemble que cette ſuppoſition eſt confirmée par les phenomenes, & elle le ſera tout à fait, quand je ferai voir, qu'il ne ſe trouve actuellement d'autres changemens dans les poles, que ceux, qui ſont cauſés par les forces du Soleil & de la Lune.

COROLL.

9. De là il s'enſuit, que toute force, dont la direction paſſe par le centre de gravité de la terre, ne change rien, ni dans ſon mouvement rotatoire, ni dans la poſition de ſon axe, & que ce n'eſt que des forces, qui agiſſent ſur la terre, dont la direction ne paſſe pas par le centre de gravité, qu'il faut expliquer les changemens qu'on obſerve dans ſes poles.

Probleme I.

10. *Toutes les parties de la terre étant attirées vers un point fixe* O, *dont les forces ſoient proportionelles à une puiſſance quelconque des diſtances, trouver la force totale dont la terre ſera ſollicitée; ſuppoſant la terre ſpheroïdique, & compoſée d'une matiere homogene.* Fig. 11.

SOLUTION.

Soit le demi-axe de la terre CA = CB = a; le demi-diametre de l'équateur CE = CF = e: & du point attirant O qu'on baisse ſur le plan de l'équateur la perpendiculaire OT, & ayant tiré les droites CT, CO, ſoit CT = f, TO = g, CO = $h = \sqrt{(ff+gg)}$. Que la force attirante du point O à une diſtance quelconque z ſoit = $\frac{k^n}{z^n}$, ou que cette force ſoit réciproquement proportionnelle à la puiſſance z^n de la diſtance. Soit de plus la maſſe de la terre = M. Cela poſé on trouve par la Theorie des forces, que la force totale, dont la terre eſt ſollicitée vers le point O, ſe réſout en ces deux forces.

1. La force ſelon CO qui eſt =
$$\frac{Mk^n}{h^n}\left(1-\frac{(n+1)aa-4(n+1)ee}{10hh}+\frac{(n+1)(n+3)(aagg+eeff)}{10h^4}\right)$$

2. La force ſelon TO qui eſt = $\frac{n+1}{5}M\frac{k^n}{h^n}\cdot\frac{g(ee-aa)}{h^3}$

On pourroit bien réduire ces deux forces à une ſeule, qui paſſeroit par le point O & par un point de l'axe un peu au deſſous du centre C; mais pour notre deſſein il conviendra mieux de ſe ſervir de ces deux forces ſelon CO & TO. C.Q F.T.

COROLL. I.

11. Comme la direction de la force ſelon CO paſſe par le centre de la terre, elle ne contribuë rien, ni au mouvement de rotation de la terre, ni au changement de ſes poles. Et, ſi la terre n'étoit ſollicitée que par cette ſeule force, ni ſon mouvement de rotation, ni la poſition de ſes poles, ne ſouffriroit aucun changement.

COROLL. II.

12. Ce n'eſt donc qu'à l'autre force ſelon TO, qu'il faut avoir égard, ſi l'on veut rechercher les changemens, que l'attraction du point O peut

O peut produire dans le mouvement de rotation de la terre, & dans la ſituation de ſes poles. Et pour cet effet on comprend aiſément, que ces effets ne réſultent que du moment de cette force.

COROLL. III.

13. Or le moment de cette force ſelon TO ſe raporte à un diametre de l'équateur, qui eſt perpendiculaire au plan ABO, qui eſt déterminé par l'axe de la terre AB & le point O: & le moment de cette force ſera $= \frac{n+1}{5} \cdot M. \frac{k^n}{h^n} \cdot \frac{g(ee-aa)}{h^3}$. CT. Ce moment ſera donc $= \frac{n+1}{5} \cdot M. \frac{k^n}{h^n} \cdot \frac{fg(ee-aa)}{h^3}$.

COROLL. IV.

14. On pourra donc concevoir une force équivalente AG, appliquée perpendiculairement à l'axe en A, & qui tend à éloigner le point A du point O; cette direction AG étant pareillement ſituée dans le plan ABO. Donc le moment de cette force ſera:

$$AG. AC = \frac{n+1}{5} \cdot M. \frac{k^n}{h^n} \cdot \frac{fg(ee-aa)}{h^3}.$$

Et ce moment produira le même effet ſur le mouvement rotatoire de la terre, que la force dont elle eſt ſollicitée vers le point O.

COROLL. V.

15. Si nous nommons l'angle $ACO = \Phi$, qui marquera la diſtance apparente du point O au pole de la terre A, vuë du centre de la terre, nous aurons $\frac{f}{n} = \text{ſin } \Phi$ & $\frac{g}{n} = \text{cof } \Phi$.

Donc le moment en queſtion ſera

$$AG. AC = \frac{n+1}{5} \cdot M. \frac{k^n}{h^{n+1}} (ee-aa) \text{ ſin } \Phi \text{ cof } \Phi$$

COROLL. VI.

16. Il eſt clair que ce moment évanouïroit, ſi la terre étoit ſpherique, puisqu'il ſeroit alors $e = a$. Mais ſi le diametre de l'équateur EF ſurpaſſe l'axe de la terre AB, ou ſi $e > a$, alors ce moment eſt affirmatif, ou tel qu'il eſt préſenté dans la figure. Mais ſi le diametre de l'équateur étoit plus petit, que l'axe de la terre, ce moment deviendroit negatif, & produiroit par conſéquent un effet contraire.

COROLL. VII.

17. Ce même moment deviendra encore negatif, quoiqu'il ſoit $e > a$, ſi l'angle ACO ſera obtus, ou plus grand qu'un droit. Car ſi $\Phi > 90^{\circ}$, ſon cosinus ou cos Φ deviendra negatif: & partant auſſi le moment. On reconnoit de là auſſi, que ce moment évanouïra lorsque l'angle ACO eſt droit, & que ce même moment deviendra le plus grand, lorsque l'angle $ACO = \Phi$ ſera un demi-droit, ou un droit & demi.

Probleme II.

18. *La terre étant ſuppoſée avoir un noyau aebf ſpheroïdique autour de ſon centre, ſi toutes ſes parties ſont attirées vers un centre de forces* O, *qui attire en raiſon des puiſſances quelconques des diſtances, trouver le moment de force, dont la terre ſera ſollicitée.*

SOLUTION.

Soit comme auparavant le demi-axe $CA = CB = a$, le demi-diametre de ſon équateur $CE = CF = e$; & pour le noyau ſoit le demi-axe $Ca = Cb = \alpha$, & le demi-diametre de ſon équateur $Ce = Cf = \varepsilon$. Enſuite ſoit la denſité du noyau à celle de la croute comme $1 + \nu$ à 1. Depuis ayant baiſſé du point O ſur le plan de l'équateur la perpendiculaire OT, ſoient $CT = f$, $TO = g$, $CO = h = \sqrt{(ff + gg)}$: or à la diſtance $= z$ ſoit la force attractrice du point $O = \frac{k^n}{z^n}$. Cela poſé marquant la maſſe de toute la terre $= M$, la force dont toute la terre eſt ſollicitée vers le point O produira le même

même effet ſur ſon mouvement de rotation, que ſi l'on appliquoit à l'axe dans le plan ABO une certaine force AG, dont

le moment ſeroit $= \frac{(n+1)\,M k^n f g}{5 h^{n+3}} \cdot \frac{aee(ee-aa)+\nu a e^4 (ee-aa)}{aee+\nu a e^4}$

Ou bien poſant l'angle $ACO = \Phi$, ce moment ſera

$AG.AC = \frac{(n+1)\,M k^n \sin\Phi \cos\Phi}{5 h^{n+3}} \cdot \frac{aee(ee-aa)+\nu a e^4 (ee-aa)}{aee+\nu a e^4}$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

19. Si l'aberration de la figure ſpherique, tant de la terre même que de ſon noyau, eſt extrèmement petite, comme on peut ſuppoſer ſeurement, ce moment ſera aſſès exactement

$$AG.AC = \frac{(n+1)\,M k^n \sin\Phi \cos\Phi}{5 h^{n+3}} \cdot \frac{a^3(ee-aa)+\nu a^3(ee-aa)}{a^3+\nu a^3}$$

COROLL. II.

20. Si le noyau étoit exactement ſpherique, ce moment ſeroit

$$AG.AC = \frac{(n+1)\,M k^n \sin\Phi \cos\Phi}{5 h^{n+3}} \cdot \frac{a^3(ee-aa)}{a^3+\nu a^3}$$

Or ſi toute la terre étoit compoſée de matiére uniforme, ce moment ſeroit $= \frac{(n+1)\,M k^n \sin\Phi \cos\Phi}{5 h^{n+3}} (ee-aa)$. Donc le moment pour la terre douée d'un noyau ſpherique ſera plus petit que celui pour la terre homogene, ſi le noyau eſt plus denſe que la croute. Or ſi le noyau étoit moins denſe, le premier moment ſurpaſſeroit l'autre.

COROLL. III.

21. Si le point O attiroit exactement en raiſon réciproque des quarrés des diſtances, ou qu'il fut $n = 2$, alors le moment cherché ſeroit :

AG.

$$\text{AG. AC} = \frac{3\,M\,kk\,\sin\Phi\cos\Phi}{5\,h^3} \cdot \frac{a^3(ee-aa)+\nu a^3(\varepsilon\varepsilon-\alpha\alpha)}{a^3+\nu a^3}$$

& ce ſera le cas de la force du ſoleil ſur la terre.

COROLL. IV.

22. Si la force du point O étoit en raiſon directe des diſtances, il ſeroit $n = -1$, & partant ce moment évanouïroit tout à fait. Ce qui devient d'abord aſſés clair, pour peu qu'on réflechiſſe à la nature de cette force.

COROLL. V.

23. Si la force étoit compoſée de deux parties, ou qu'elle fut exprimée de la ſorte $\frac{k^n}{z^n} \pm \frac{i^m}{z^m}$, on comprend aiſément que le moment cherché ſeroit exprimé de cette façon :

$$\frac{M\sin\Phi\cos\Phi}{5\,h}\left(\frac{(n+1)\,k^n}{h^n} \pm \frac{(m+1)\,i^m}{h^m}\right)\frac{a^3(ee-aa)+\nu a^3(\varepsilon\varepsilon-\alpha\alpha)}{a^3+\nu a^3}$$

COROLL. VI.

§. 24. Donc ſi la force de la lune étoit exprimée pour la diſtance z de la ſorte $\frac{k^2}{h^2} - \delta$, où δ marque une quantité conſtante, comme pluſieurs phenomenes le paroiſſent confirmer, à cauſe de $n = 2$, $m = 0$ & $\frac{i^m}{h^m} = \delta$, le moment en queſtion ſeroit, en ſuppoſant la lune en O

$$\text{AG. AC} = \frac{M\sin\Phi\cos\Phi}{5\,h}\left(\frac{3\,k\,k}{h\,h} - \delta\right)\frac{a^3(ee-aa)+\nu a^3(\varepsilon\varepsilon-\alpha\alpha)}{a^3+\nu a^3}$$

COROLL. VII.

§. 25. Ce moment ſeroit donc plus petit, que ſi la force de la lune ſuivoit exactement la raiſon renverſée des quarrés des diſtances. Il ſera toujours à propos d'avoir égard à cette conſtante δ dans le calcul, que j'entreprendrai ſur la variation des poles de la terre, pour voir ſi cette nouvelle hypotheſe ſe confirme ou non.

Proble-

Probleme. III.

§. 26. *La terre pendant qu'elle tourne autour de l'axe* CA *étant ſollicitée par une force* AG *appliquée à l'extremité* A *de cet axe, dont le moment* AG. AC *eſt connu, trouver le changement inſtantané, qui ſera cauſé par cette force dans l'axe de rotation.*

SOLUTION.

Soit C le centre de la terre, & CA l'axe de la terre prolongé jusqu'au Ciel, autour duquel la terre tourne préſentement dans le ſens EHF; dont la viteſſe ſoit telle, que dans un tems infiniment petit $= dt$, elle décrive autour de ſon axe AC un angle $= ds$: & qu'on nomme comme auparavant la maſſe de la terre $=$ M, & ſon demi-axe $= a$. Dans cet inſtant donc A ſera le pole de la terre marqué dans le Ciel, autour duquel la terre continueroit à tourner uniformément, ſi elle n'étoit ſollicitée par aucune force étrangere. Mais comme elle eſt ſollicitée par la force AG, dont le moment AG. AC ſoit $=$ S, cette force, puiſqu'elle paſſe par l'axe de la terre ne changera rien dans la viteſſe de rotation; mais elle obligera la terre de tourner autour d'un autre axe, ce qui ſe fera en ſorte qu'après un tems infiniment petit $= dt$ le pole de la terre ne réponde plus au point A dans le Ciel, mais à un autre point *a* ſitué dans le meridien, qui eſt eloigné de 90° du meridien AE, qui répond à la direction de la force AG ſelon le ſens du mouvement rotatoire. Et par des principes de la Mecanique, que j'expliquerai ailleurs, on trouve que ce changement, ou l'angle AC *a*, ſera exprimé de la ſorte:

$$ACa = \frac{S\,dt^2}{2\,ds} : \tfrac{2}{5}\,M\,aa = \frac{5\,S\,dt^2}{4\,M\,aa\,ds}.$$

où $\frac{2}{5}$ M *a a* marque le moment d'inertie de la terre, en la ſuppoſant homogene. Or ſi la terre avoit un noyau autour de ſon centre, dont le rayon $= \alpha$, & la denſité à celle de la croute comme $1 + \nu$: 1, alors au lieu de $\frac{2}{5}$ M *a a* il faudroit écrire $\frac{2}{5}$ M. $\frac{a^5 + \nu\alpha^5}{a^3 + \nu\alpha^3}$: & partant le

changement inſtantané du pole ſeroit:

$$AC\,a = \frac{S\,dt^2}{2\,ds} : \tfrac{2}{5}\,M\,\frac{a^5 + \nu a^5}{a^3 + \nu a^3} = \frac{5\,S\,dt^2\,(a^3 + \nu a^3)}{4\,M\,ds\,(a^5 + \nu a^5)}$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 27. L'effet d'une telle force AG donc conſiſtera en ce que les poles autour desquels la terre tourne, répondent continuellement à d'autres points du Ciel. Et il eſt auſſi clair, que la ligne Ca paſſera par d'autres points de la terre que la ligne CA, de ſorte que les poles marqués ſur la terre changeront auſſi continuellement. Mais ils differeront toujours ſi peu des extremités de l'axe de la terre, que la difference n'étant qu'environ $1\frac{1}{3}$ tierce eſt tout à fait imperceptible.

COROLL. II.

§. 28. Si nous concevons dans le meridien AF oppoſé à AE un centre des forces O, vers lequel la terre eſt attirée, nous avons vu que de cette force réſulte un moment tel que AG. AC $=$ S: donc l'effet de cette force ſera le même, qui vient d'être déterminé dans la ſolution de ce probleme.

COROLL. III.

§. 29. Donc ſi nous poſons la diſtance de ce centre de forces à la terre CO $= h$, l'angle ACO ou l'arc AO $= \Phi$, la force à la diſtance $z = \frac{k^n}{z^n}$, le moment AG. AC ſera

$$S = \frac{(n+1)\,M k^n}{5\,h^{n+1}}\,\text{ſi}\,\Phi\,\text{cof}\,\Phi\,(ee - aa) \qquad (15)$$

ſuppoſant la terre homogene. Par conſéquent le changement du pole cauſé par cette force ſera

$$AC\,a = \frac{(n+1)\,k^n}{4\,h^{n+1}} \cdot dt^2\,(ee - aa)\,\text{ſin}\,\Phi\,\text{cof}\,\Phi$$

COROLL. IV.

§. 30. Si la terre n'eſt pas homogene, mais qu'elle ait un noyau autour de ſon centre, dont le demi-axe $= a$, le demi-diametre de ſon équa-

équateur $= e$, & la denſité à celle de la croute, comme $1 + \nu$ à 1, nous avons vu qu'il ſera :

$$S = \frac{(n+1)\,M\,k^n \sin\Phi \cos\Phi}{5\,h^{n+1}} \cdot \frac{a^3(ee-aa)+\nu a^3(\varepsilon\varepsilon-\alpha\alpha)}{a^5+\nu a^3}$$

d'où le changement cauſé dans le pole ſera

$$AC\,a = \frac{(n+1)k^n}{4\,h^{n+1}} \cdot \frac{a^3(ee-aa)+\nu a^3(\varepsilon\varepsilon-\alpha\alpha)}{a^5+\nu a^5} \cdot \frac{dt^2}{ds} \sin\Phi \cos\Phi$$

REMARQUE.

31. Pour ramener l'expreſſion du tems à des quantités plus connuës, conſiderons le moyen mouvement de la terre. Soit la diſtance moyenne de la terre au ſoleil $= b$, la force attractive du ſoleil ſur la terre $= \frac{cc}{bb}$, & que la terre parcoure de ſon mouvement moyen pendant l'elément du tems dt l'angle au ſoleil $= dv$: Cela poſé, par les mêmes principes de mecanique on trouvera $b\,dv^2 = \frac{cc\,dt^2}{2bb}$; d'où nous aurons $dt^2 = \frac{2b^3}{cc}dv^2$. Nous n'avons donc qu'à écrire cette valeur $\frac{2b^3}{cc}dv^2$ au lieu de dt^2, pour exprimer le tems par le moyen mouvement du ſoleil. Ainſi pendant que le ſoleil avance par ſon mouvement moyen de l'angle dv, & la terre par ſon mouvement diurne de l'angle ds, le changement du pole dans le cas du coroll. préced. ſera :

$$AC\,a = \frac{(n+1)k_n}{2\,h^{n+1}} \cdot \frac{b^3}{cc} \cdot \frac{a^3(ee-aa)+\nu a^3(\varepsilon\varepsilon-\alpha\alpha)}{a^5+\nu a^5} \cdot \frac{dv^2}{ds} \sin\Phi \cos\Phi.$$

Or ds eſt à dv en raiſon du mouvement diurne de la terre à ſon mouvement annuel. Donc, puisque la terre acheve chaque révolution

autour de ſon axe ou 360° en 23^h, $56'$, $4''$, & que dans ce tems le mouvement moyen du ſoleil ſe trouve $58'$, $58''$, il ſera $ds = 366\frac{2}{3}\frac{5}{1}\,dv$. Et partant le changement trouvé du pole ſera

$$AC\alpha = \frac{1}{732\,\frac{5}{3}\frac{9}{1}} \cdot \frac{(n+1)\,k^n}{h^{n+1}} \cdot \frac{b^3\,a^3(ee-aa)+\nu a^3(\varepsilon\varepsilon-aa)}{cc\quad a^5+\nu a^5}\,dv \sin\Phi\cos\Phi$$

Probleme IV.

32. *Trouver le changement élémentaire du pole de la terre dans le Ciel, entant qu'il eſt cauſé tant par la force du ſoleil, que par celle de la Lune.*

SOLUTION.

Soit toujours a le demi-axe de la terre, e le rayon de ſon équateur, & que la terre ſoit homogene à l'exception d'un noyau ſpheroïdique autour de ſon centre, dont le demi-axe ſoit $= \alpha$, le rayon de l'équateur $= \varepsilon$, & la denſité à celle de la croute comme $1 + \nu$ à 1. Qu'on poſe pour abréger

$$\frac{a^3\,(ee-aa)+\nu a^3\,(\varepsilon\varepsilon-aa)}{a^5+\nu a^5} = N.$$

& que le pole boreal de la terre réponde actuellement dans le Ciel au point A. Soit maintenant le ſoleil en O, & l'arc du meridien $AO = \Phi$; la diſtance du ſoleil à la terre $= b$, & ſa force ſur la terre $= \frac{cc}{bb}$. Cela poſé nous aurons $h = b$, $k = c$ & $n = 2$. Donc dans le tems que le mouvement moyen du ſoleil avance de l'angle infiniment petit dv, le pole de la terre ſera tranſporté de A en α, dans un meridien perpendiculaire au meridien AOF, où ſe trouve le ſoleil, en ſorte que ce changement ſera

$$A\alpha \text{ ou } AC\alpha = \frac{3}{732\,\frac{5}{3}\frac{9}{1}} \cdot N dv \sin\Phi\cos\Phi$$

ſuppoſé

ſuppoſé que le mouvement rotatoire de la terre ſe faſſe dans le ſens EHF, & ce ſera l'effet inſtantané de la force du ſoleil.

Maintenant que la lune ſe trouve en O, dont la diſtance à la terre ſoit $= h$, & la force $= \frac{kk}{hh} - \delta$, comme j'ai ſuppoſé cy-deſſus (24), & la valeur de $\frac{(n+1)k^n}{h^{n+1}}$ ſe changera en $\frac{3kk}{h^3} - \frac{\delta}{h}$. Soit auſſi l'arc $AO = \Phi$, & pendant le mouvement moyen du ſoleil $= dv$ la force de la lune transportera le pole de la terre de A en a auſſi dans un meridien perpendiculaire à AOF, de ſorte que Aa, ou $ACa = \frac{1}{732\frac{50}{81}} \left(\frac{3kk}{h^3} - \frac{\delta}{h}\right)\frac{h^3}{cc} N\,dv \sin\Phi \cos\Phi$.

Or il faut remarquer ici, que $\frac{3kk}{h^3} - \frac{\delta}{h}$ eſt à $\frac{3cc}{b^3}$ comme la force de la lune pour cauſer les marées à celle du ſoleil: rapport que Newton a établi comme $4\frac{1}{2}$ à 1; mais comme cette détermination n'eſt pas trop certaine, ſuppoſons que dans la production du flux & reflux de la mer, la force de la lune ſoit à celle du ſoleil comme m à 1, & nous aurons $\frac{3kk}{h^3} - \frac{\delta}{h} = \frac{3mcc}{b^3}$; & partant le changement du pole cauſé par la force de la Lune ſera:

Aa ou $ACa = \frac{3m}{732\frac{50}{81}} . N\,dv \sin\Phi \cos\Phi$. C.Q.F.T.

COROLL. I.

§. 33. Si nous poſons pour abréger d'avantage $\frac{3}{732\frac{50}{81}} N = \lambda$; le ſoleil étant ſuppoſé en O de ſorte que $AO = \Phi$, le changement du pole ſera $Aa = \lambda\,dv \sin\Phi \cos\Phi$. Or ſi nous ſuppoſons la lune en O, alors le changement du pole ſera $Aa = \lambda m\,dv \sin\Phi \cos\Phi$.

COROLL. II.

§. 34. Donc ſi nous aurons trouvé par les phenomenes des changemens du pole de la terre, la valeur du nombre λ, nous en tirerons celle de $N = 732\frac{50}{81} \cdot \frac{1}{3}\lambda$; & de cette valeur nous pourrons juger du noyau de la terre, puisque

$$N = \frac{a^3(ee - an) + \nu a^3(\varepsilon\varepsilon - \alpha\alpha)}{a^3 + \nu a^3}$$

REMARQUE.

§. 35. Si la terre n'avoit point de noyau, mais qu'elle fut formée d'une matiére homogene, la valeur de N ſeroit connue. Car puisque le diametre de l'équateur ſurpaſſe l'axe d'une 200me partie, comme il ſe conclut des Obſervations faites au Nord, en France & au Perou, on aura $a : e = 200 : 201$, & dans ce cas on aura $N = \left(\frac{201}{200}\right)^2 - 1 = \frac{1}{100}$, & partant $\lambda = \frac{3}{100 \cdot 732\frac{50}{81}} = \frac{1}{24421}$

Probleme V.

Fig. 4. §. 36. *Suppoſé que le ſoleil ſe meuve ſelon ſon mouvement moyen, trouver les changemens, que ſa force cauſera dans les poles de la terre.*

SOLUTION.

Soit ♈ ♋ ♎ l'ecliptique & Π le pole de l'ecliptique; mais que ♈ ne ſoit pas le point de l'équinoxe, mais un point fixe au ciel comme 1 ✱ ♈. Soit la longitude du ſoleil en S depuis ce point fixe ♈ S = p, & que dans ce tems le pole de la terre ſe trouve en P, & poſons ♈ Π P = x, Π P = y. Qu'on tire les arcs de grands cercles Π S, P S, & dans le triangle ſpherique P Π S nous aurons P Π S = p − x; P Π = y & Π S = 90°, d'où nous tirons cof P S = cof (p − x) ſin y & cot Π P S = $-\frac{\text{cof}(p-x)\,\text{cof}\,y}{\text{ſin}(p-x)}$. Maintenant poſant P S = Φ, le

pole

pole ſera transporté de P en p, de la ſorte Pp ſera perpendiculaire à PS & $Pp = \lambda\, dv \sin\Phi \cos\Phi$, pendant que le ſoleil avance de l'angle dv; nous aurons donc $dp = dv$, & ayant tiré Πp, il ſera $\curlyvee \Pi p = x + dx$, & $\Pi p = y + dy$. Donc menant ſur Πp la perpendiculaire Pq, il y aura $pq = dy$ & $Pq = -dx \sin y$. Or l'angle pPq étant le complément de l'angle OPS à deux droits, il ſera

$$\cot p\,P\,q = \frac{\cos(p-x)\cos y}{\sin(p-x)} \text{ \& } \operatorname{tang} P\,p\,q = \frac{\cos(p-x)\cos y}{\sin(p-x)}$$

Par conſéquent nous aurons:

$Pq = -dx \sin y = Pp \sin Ppq$ & $pq = dy = Pp \cos Ppq$.

Or ayant $\cos\Phi = \cos(p-x)\sin y$; il ſera

$$\sin Ppq = \frac{\cos(p-x)\cos y}{\sin\Phi} \text{ \& } \cos Ppq = \frac{\sin(p-x)}{\sin\Phi}.$$

Donc à cauſe de $Pp = \lambda\, dp \sin\Phi \cos\Phi$, nous obtiendrons

$-dx \sin y = \lambda\, dp \cos\Phi \cos(p-x)\cos y = \lambda\, dp \cos(p-x)^2 \cos y \sin y$

& $dy = \lambda\, dp \cos\Phi \sin(p-x) = \lambda\, dp \sin(p-x)\cos(p-x)\sin y$

Mais puiſque $\sin(p-x)\cos(p-x) = \frac{1}{2}\sin 2(p-x)$

& $\cos(p-x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(p-x)$

ces équations prendront les formes ſuivantes:

$$-dx = \tfrac{1}{2}\lambda\, dp\,(1+\cos 2(p-x))\cos y$$

& $dy = \frac{1}{2}\lambda\, dp \sin 2(p-x)\sin y$

Maintenant puiſqu'il eſt aiſé de prévoir, que la variabilité de x & y eſt comme infiniment petite par rapport à celle de p, dans l'integration nous pourrons regarder x & y comme des quantités conſtantes, & alors les integrales ſeront:

$$x = C - \tfrac{1}{2}\lambda\ (p + \tfrac{1}{2}\sin 2(p-x)\cos y)$$

$$y = C - \tfrac{1}{4}\lambda \cos 2(p-x)\sin y$$

d'où l'on connoitra à tout tems propoſé le lieu du pole de la terre dans le Ciel. C. Q. F. T.

COROLL.

COROLL. I.

37. Puisque $p-x$ marque P Π S, & que le cercle ΠP passe par le solstice d'été, cet angle $p-x$ exprimera la longitude du soleil depuis le solstice d'été. Donc si nous posons la longitude du soleil depuis l'équinoxe de printems $= p$, il sera $p-x = p-90°$, & $2(p-x) = 2p-180°$. D'où nous aurons

$$x = C - \tfrac{1}{2}\lambda\,(x - \tfrac{1}{2}\sin p)\cos y \;\&\; y = C + \tfrac{1}{4}\lambda\cos 2p\sin y.$$

COROLL. II.

§. 38. Dans ces formules y marque la distance moyenne du pole de la terre de celui de l'ecliptique. Donc posant cette distance moyenne des deux poles $= \theta$, nous aurons

$$x = C - \tfrac{1}{2}\lambda\, v\cos\theta + \tfrac{1}{4}\lambda\sin 2p\cos\theta$$

$$\& y = \theta + \tfrac{1}{4}\lambda\cos 2p\sin\theta$$

Or la valeur de θ est à peu prés de $23°, 28', 30''$.

COROLL. III.

§. 39. Posant $\theta = 23°, 28', 30''$, nous aurons en réduisant le sinus & le cosinus de θ à des angles exprimés en secondes,

$$x = C - 0,458617\,\lambda v + 46222''\,\lambda\sin 2p$$

$$y = \theta + 20541''\,\lambda\cos 2p$$

COROLL. IV.

§. 40. De là il est d'abord clair, que la force du soleil fait reculer le pole de la terre; car aprés un an, où v devient $v + 360°$ la longitude du pole depuis $1 * \Upsilon$ sera

$$x = C - 0,458617\,\lambda\,(v + 360°) + 46222''\,\lambda\sin 2p$$

donc pendant une année le pole de la terre recule en longitude par l'espace $= 0,458617\,\lambda . 360°$.

COROLL. V.

41. Donc si la terre étoit formée d'une matiere homogene, de sorte que $\lambda = \frac{1}{24421}$, la précession annuelle du pole & aussi des

équi-

équinoxes ſeroit $= 24\frac{1}{3}$ ſecondes; entant qu'elle eſt cauſée par l'action du ſoleil. Et dans la même hypotheſe il ſera aprés un nombre A d'années

$$x = C - 24\tfrac{1}{3}\,A'' + 1\tfrac{8}{9}''\,\text{ſin}\,2p$$
$$y = \theta + \tfrac{5}{9}''\,\text{cof}\,2p.$$

Donc outre le mouvement moyen le pole ſe pourra éloigner de ſon lieu moyen presque jusqu'a $2''$ en longitude, & de presque une ſeconde en latitude.

Probleme VI.

42. *Suppoſant le mouvement de la lune uniforme autour de la terre, trouver les changemens, que la force de la lune cauſera dans les poles de la terre.*

SOLUTION.

Soit encore $\Upsilon\,\Omega\,\Delta$ l'ecliptique, & Π ſon pole; que le pole de la terre ſe trouve a l'heure qu'il eſt en P, & nommons comme auparavant l'angle $\Upsilon\,\Pi P = x$, $\Pi P = y$. Soit en même tems la lune en L, & nommant ſa diſtance au pole $LP = \Phi$, nous avons vu cydeſſus, que pendant que le moyen mouvement du ſoleil eſt $= dv$, le pole P ſera transporté en p, par l'elément Pp perpendiculaire à PL, de ſorte que $Pp = \lambda m\,dv$ ſin Φ cof Φ, d'où nous tirons comme dans le probleme precédent: *Fig. 5*

$$-dx\,\text{ſin}\,y = \lambda m\,dv\,\text{ſin}\,\Phi\,\text{cof}\,\Phi\,\text{ſin}\,Ppq$$
$$\&\;\; dy = \lambda m\,dv\,\text{ſin}\,\Phi\,\text{cof}\,\Phi\,\text{cof}\,Ppq$$

Il s'agit donc maintenant de déterminer les angles Φ & Ppq. Soit pour cet effet ΩLN l'orbite de la lune, & partant Ω le noeud aſcendant, dont la longitude ſoit $\Upsilon\,\Omega = r$, & l'inclinaiſon de l'orbite lunaire à l'ecliptique $L\,\Omega\,K = \zeta$. Puisque nous ſuppoſons le mouvement de la lune uniforme, il ſera indifferent, ſi nous attribuons cette uniformité au mouvement dans l'orbite même, ou au mouvement en longitude, parce que la difference eſt fort petite. Soit donc q la lon-

gitude de la lune $=\Upsilon K$, de ſorte que l'angle $\Upsilon \Pi L = q$; & il ſera $\Omega K = q - r$: d'où nous trouverons la latitude LK, que je marquerai par $s = LK$ & il ſera $\text{tang } s = \text{ſin } (q-r) \text{ tang } \varrho$. A préſent dans le triangle $P\Pi L$ ayant $P\Pi = y$; $P\Pi L = q - x$; & $\Pi L = 90° - s$ nous aurons :

$$\text{cof } PL = \text{cof } \Phi = \text{cof } (q-x) \text{ ſin } y \text{ cof } s + \text{cof } y \text{ ſin } s.$$

$$\& \cot \Pi PL = \frac{\text{ſin } y \text{ ſin } s - \text{cof } (q-x) \text{ cof } y \text{ cof } s}{\text{ſin } (q-x) \text{ cof } s} = -\text{tang } P p q$$

de ſorte que $\text{tang } P p q = \frac{\text{cof } (q-x) \text{ cof } y \text{ cof } s - \text{ſin } y \text{ ſin } s}{\text{ſin } (q-x) \text{ cof } s}$, & de là nous tirons :

$$\text{ſin } P p q = \frac{\text{cof}(q-x) \text{cof } y \text{ cof } s - \text{ſin } y \text{ ſin } s}{\text{ſin } \Phi} \quad \& \quad \text{cof } P p q = \frac{\text{ſin } (q-x) \text{ cof } s}{\text{ſin } \Phi}$$

Ces valeurs étant ſubſtituées donneront :

$$-dx \text{ ſin } y = \lambda m dv \text{ cof } \Phi . (\text{cof } (q-x) \text{ cof } y \text{ cof } s - \text{ſin } y \text{ ſin } s)$$

$$dy = \lambda m dv \text{ cof } \Phi . \text{ ſin } (q-x) \text{ cof } s$$

ou remettant auſſi pour $\text{cof } \Phi$ ſa valeur :

$$dx \text{ ſin } y = -\lambda m dv (\text{cof}(q-x) \text{ ſin } y \text{ cof } s + \text{cof } y \text{ ſin } s)(\text{cof } y \text{ cof } s - \text{ſin } y \text{ ſin } s)$$

$$dy = \lambda m dv (\text{cof}(q-x) \text{ ſin } y \text{ cof } s) + \text{cof } y \text{ ſin } s) \text{ ſin } (q-x) \text{ cof } s$$

Or $\text{ſin } s = \frac{\text{tang } \varrho \text{ ſin } (q-r)}{\sqrt{(1 + \text{tang } \varrho^2 \text{ ſin } (q-r))^2}}$ & $\text{cof } s = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang } \varrho^2 \text{ ſin } ((q-r)^2)}}$

ce qui donne : $dx \text{ ſin } y =$

$$\frac{-\lambda m dv (\text{cf.}(q-x)^2 \text{ ſi } y \text{ cof } y + \text{cof}(q-x) \text{ cof } y^2 \text{ tg. } \varrho \text{ ſi.}(q-r) - \text{ſin } y \text{ cof } y \text{ tg. } \varrho^2 \text{ ſin } (q-r)^2)}{1 + \text{tang } \varrho^2 \text{ ſin } (q-r)^2} - \text{cof } (q-x) \text{ ſin } y^2 \text{ tang } \varrho \text{ ſin } (q-r)$$

$$\& \; dy = \frac{\lambda m dv (\text{ſin } (q-x) \text{ cof } (q-x) \text{ ſin } y + \text{ſin } (q-x) \text{ cof } y \text{ tang } \varrho \text{ ſin } (q-r))}{1 + \text{tang } \varrho^2 \text{ ſin } (q-r)^2}.$$

Pour

Pour integrer ces formules il faut remarquer, qu'on peut regarder $x, y,$ & ϱ comme des quantités conſtantes. Soit donc tang $\varrho = \gamma$, ce qui eſt une quantité fort petite, & ſoit θ la diſtance moyenne du pole de la terre au pole de l'ecliptique; & nous aurons :

$$dx \sin\theta = -\tfrac{1}{2}\lambda m\,dv.\frac{\sin 2\theta \cos(q-x)^2 + 2\gamma\cos 2\theta\cos(q-x)\sin(q-r) - \gamma^2\sin 2\theta\sin(q-r)^2}{1+\gamma\gamma\sin(q-r)^2}$$

$$dy = \lambda m\,dv.\frac{\sin\theta\sin(q-x)\cos(q-x) + \gamma\cos\theta\sin(q-x)\sin(q-r)}{1+\gamma\gamma\sin(q-r)^2}$$

Maintenant puiſque γ eſt un nombre fort petit, ſavoir la tangente d'un angle d'environ $5°$, on pourra ôter ces dénominateurs en diviſant par eux actuellement, & il ſera permis de négliger les termes, où γ aura plus de deux dimenſions : on aura donc :

$$dx\sin\theta = -\tfrac{1}{2}\lambda m\,dv\big(\sin 2\theta\cos(q-x)^2 + 2\gamma\cos 2\theta\cos(q-x)\sin(q-r) - \gamma\gamma\sin 2\theta\sin(q-r)^2\ (1+\cos(q-x)^2\ \big)$$

$$dy = \lambda m\,dv\,\big(\sin\theta\sin(q-x)\cos(q-x) + \gamma\cos\theta\sin(q-x)\sin(q-r) - \gamma\gamma\sin\theta\sin(q-x)\cos(q-x)\sin(q-r)^2\ \big).$$

A préſent il faut réduire ces produits des ſinus & coſinus des angles variables à des ſinus & coſinus des angles ſimples, & puiſque $\cos A^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2A$; $\sin A\cos A = \frac{1}{2}\sin 2A$ & $\sin A^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2A$, nous aurons :

$$dx\ \sin\theta = -\tfrac{1}{2}\lambda m\,dv\,\big(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\cos 2(q-x) + 2\gamma\cos 2\theta\cos(q-x)\sin q-r\big) - \gamma\gamma\sin 2\theta\,(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2(q-r))\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2(q-x)\ )$$

$$dy = \lambda m\,dv\,\big(\tfrac{1}{2}\sin\theta\sin 2(q-x) + \gamma\cos\theta\sin(q-x)\sin(q-r) - \tfrac{1}{2}\gamma\gamma\sin\theta\sin 2(q-x)\ (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2(q-r))\big).$$

De plus puisque $\text{cof}\,A\,\text{ſin}\,B = \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,(A+B) - \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,(A-B)$;

$$\&\ \text{ſin}\,A\,\text{ſin}\,B = \tfrac{1}{2}\,\text{cof}\,(A-B) - \tfrac{1}{2}\,\text{cof}\,(A+B)$$

$$\text{cof}\,A\,\text{cof}\,B = \tfrac{1}{2}\,\text{cof}\,(A-B) + \tfrac{1}{2}\,\text{cof}\,(A+B)$$

nous aurons après toutes ces réductions faites :

$$dx\,\text{ſin}\,\vartheta = -\tfrac{1}{2}\lambda m\,dv\Big(\tfrac{1}{2}\,\text{ſin}\,2\vartheta + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin}\,2\vartheta\,\text{cof}\,2\,(q-x) + \gamma\,\text{cof}\,2\vartheta\,\text{ſin}\,(2q-r-x) - \gamma\,\text{cof}\,2\vartheta\,\text{ſin}\,(r-x) - \tfrac{3}{4}\gamma\gamma\,\text{ſin}\,2\vartheta + \tfrac{3}{4}\gamma\gamma\,\text{ſin}\,2\vartheta\,\text{cof}\,2\,(q-r) - \tfrac{1}{4}\gamma\gamma\,\text{ſin}\,2\vartheta\,\text{cof}\,2\,(q-x) + \tfrac{1}{8}\gamma\gamma\,\text{ſin}\,2\vartheta\,\text{cof}\,2\,(r-x) + \tfrac{1}{8}\gamma\gamma\,\text{ſin}\,2\vartheta\,\text{cof}\,2\,(2q-r-x)\Big)$$

$$dy = \lambda m\,dv\,\Big(\tfrac{1}{2}\,\text{ſin}\,\vartheta\,\text{ſin}\,2\,(q-x) + \tfrac{1}{2}\gamma\,\text{cof}\,\vartheta\,\text{cof}\,(r-x) - \tfrac{1}{2}\gamma\,\text{cof}\,\vartheta\,\text{cof}\,(2q-r-x) - \tfrac{1}{4}\gamma\gamma\,\text{ſin}\,\vartheta\,\text{ſin}\,2\,(q-x) + \tfrac{1}{8}\gamma\gamma\,\text{ſin}\,\vartheta\,\text{ſin}\,2\,(2q-r-x) + \tfrac{1}{8}\gamma\gamma\,\text{ſin}\,\vartheta\,\text{ſin}\,2\,(r-x).\Big)$$

Pour integrer ces équations il faut remarquer, que les differentiels de q & r ont des rapports donnés au differentiel dv, qui ſont ceux du mouvement moyen de la lune, & du mouvement retrograde du noeud au mouvement moyen du ſoleil. Soit donc:

$$dq = \mu\,dv \quad \& \quad dr = -\nu\,dv$$

& les integrales cherchées ſeront :

$$x\,\text{ſin}\,\vartheta = C - \tfrac{1}{2}\lambda m\Big\{\tfrac{1}{2}\,v\,\text{ſin}\,2\vartheta + \frac{1}{4\mu}\,\text{ſin}\,2\vartheta\,\text{ſin}\,2\,(q-x) - \frac{\gamma}{2\mu+\nu}\,\text{cof}\,2\vartheta\,\text{cof}\,(2q-r-x) - \frac{\gamma}{\nu}\,\text{cof}\,2\vartheta\,\text{cof}\,(r-x) - \tfrac{3}{4}\gamma\gamma\,v\,\text{ſin}\,2\vartheta + \frac{3\gamma\gamma}{8(\mu+n)}\,\text{ſin}\,2\vartheta\,\text{ſin}\,2\,(q-r) - \frac{\gamma\gamma}{8\mu}\,\text{ſin}\,2\vartheta\,\text{ſin}\,2\,(q-x) - \frac{\gamma\gamma}{16\,\nu}\,\text{ſin}\,2\vartheta\,\text{ſin}\,2\,(r-x) + \frac{\gamma\gamma}{16\,(2\mu+\nu)}\,\text{ſin}\,2\vartheta\,\text{ſin}\,2\,(2q-r-x)$$

$$y =$$

$$y = \theta + \lambda m \left\{ \begin{array}{r} \frac{-1}{4\mu} \sin\vartheta \cos 2(q-x) - \frac{\gamma}{2\kappa} \cos\vartheta \sin(r-x) - \frac{\gamma}{2(2\mu+\kappa)} \\ \cos\vartheta \sin(2q-r-x) + \frac{\gamma\gamma}{4\mu} \sin\vartheta \cos 2(q-x) \\ - \frac{\gamma\gamma}{16\,2\mu+\kappa} \sin\vartheta \cos 2(2q-r-x) \\ + \frac{\gamma\gamma}{16\kappa} \sin\vartheta \cos 2(r-x) \end{array} \right.$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 43. Puisque θ eſt à peu prés 23°, 28′, 30″, & que γ eſt la tangente de l'inclinaiſon de l'orbite de la lune à l'ecliptique, dont la valeur moyenne eſt = 5°, 9′, ces expreſſions réduites en ſecondes ſeront:

$$x = C - 0{,}45302\,\lambda m v - \frac{46685}{\mu}\lambda m \sin 2(q-x) + \frac{16952}{2\mu+\kappa}\lambda' m \cos(2q-r-x)$$
$$+ \frac{16952}{\kappa}\lambda m \cos(r-x) - \frac{576}{\mu+\kappa}\lambda m \sin 2(q-r)$$
$$+ \frac{96}{\kappa}\lambda m \sin 2(r-x) - \frac{96}{2\mu+\kappa}\lambda m \sin 2(2q-r-x)$$

$$y = \theta - \frac{20008}{\mu}\lambda m \cos 2(q-x) - \frac{8525}{\kappa}\lambda m \sin(r-x) - \frac{8525}{2\mu+\kappa}\lambda m \sin(2q-r-x)$$
$$- \frac{40}{2\mu+\kappa}\lambda m \cos 2(2q-r-x) + \frac{40}{\kappa}\cos 2(r-x)$$

COROLL. II.

§. 44. Or puisque μ: 1 comme le mouvement moyen de la lune à celui du ſoleil, il ſera μ = 13, 368: & puisque κ: 1 comme le mouvement moyen rétrograde du noeud a celui du ſoleil, il ſera x =

$\frac{1}{18,616}$; ces valeurs étant ſubſtituées, nos équations integrales deviendront:

$$x = C - 0,45302\,\lambda m v - 3492\,\lambda m \operatorname{ſin} 2(q-x) + 594\,\lambda m \operatorname{cof}(2q-r-x)$$
$$+ 296535\,\lambda m \operatorname{cof}(r-x) - 43\,\lambda m \operatorname{ſin} 2(q-r) + 1788\,\lambda m \operatorname{ſin} 2(r-x)$$
$$- 4\,\lambda m \operatorname{ſin} 2(2q-r-x)$$
$$y = \theta - 1497\,\lambda m \operatorname{cof} 2(q-x) - 158718\,\lambda m \operatorname{ſin}(r-x) - 363\,\lambda m \operatorname{ſin}(2q-r-x)$$
$$- 2\,\lambda m \operatorname{cof} 2(2q-r-x) + 777\,\lambda m \operatorname{cof} 2(r-x)$$

COROLL. III.

§. 45. De là on voit bien, que ſi les termes $\operatorname{cof}(r-x)$ & $\operatorname{ſin}(r-x)$ ne ſont pas trop grands, ou qu'ils ne ſurpaſſent pas $100''$, ce qu'on reconnoitra d'abord, alors tous les autres termes peuvent être rejettés ſans faute, à cauſe de leur extreme petiteſſe; & partant nos formules deviendront beaucoup plus ſimples.

$$x = C - 0,45302\,\lambda m v + 296535\,\lambda m \operatorname{cof}(r-x)$$
$$y = \theta - 158718\,\lambda m \operatorname{ſin}(r-x)$$

COROLL. IV.

§. 46. Ici v marque le mouvement moyen du ſoleil depuis une certaine époque, où l'on ſuppoſe connu le lieu du pole; & $r-x$ marque la longitude du noeud aſcendant depuis le lieu préſent du pole, c'eſt à dire, depuis le ſolſtice d'été. Donc, ſi nous poſons la longitude du noeud aſcendant depuis l'équinoxe du printems $= u$, il ſera $r-x = u-90°$; & nos formules:

$$x = C - 0,45302\,\lambda m v + 296535\,\lambda m \operatorname{ſin} u$$
$$y = \theta + 158718\,\lambda m \operatorname{cof} u$$

REMARQUE.

§. 47. Comme tous les termes, qui dépendent du mouvement moyen de la lune, s'en ſont allés de nos formules à cauſe de leur petiteſſe, on comprendra aiſément, que ſi j'avois introduit dans le calcul le vrai mouvement de la lune, ayant eu egard à ſon apogée & au lieu

du

du ſoleil, tous les termes qui en auroient été introduits dans nos formules, ſeroient évanouïs a plus forte raiſon. Car alors au lieu de q nous aurions eu $q + A + B + C +$ &c. où A, B, C, marquent des angles dépendans de l'anomalie de la lune & de ſon élongation du ſoleil: & il eſt clair que de la même maniere les termes renfermans $q + A + B + C +$ &c. ſeroient ſortis du calcul, que ceux, qui dans nos formules ont renfermé q. Or il n'en eſt pas de même des termes, qui renferment le lieu du noeud aſcendant, parce que la latitude de la lune en dépend, qui affecte particuliérement le calcul. De là on comprend, que ſi le mouvement du noeud étoit plus rapide qu'il n'eſt en effet, les inégalités dans le mouvement du pole ſeroient plus petites dans la même raiſon; & ces inégalités ſeroient d'autant plus grandes, ſi le mouvement des noeuds étoit plus lent. Or ſi les noeuds demeuroient immobiles, le mouvement moyen du pole en ſeroit rallenti, & à cauſe de r conſtante, puisque alors dx ne ſeroit plus quaſi infiniment petit par rapport à dr, mais plutot infiniment grand, on ſeroit obligé de chercher l'integrale de nos formules par une tout autre methode.

Probleme VII.

§. 48. *Determiner les variations qui ſe doivent trouver dans le lieu des poles de la terre, entant qu'elles ſont cauſées conjointement par les forces du ſoleil & de la lune.*

SOLUTION.

Soit θ la diſtance moyenne du pole boreal de la terre au pole de l'ecliptique, & qu'a une époque donnée la longitude moyenne du pole de la terre, depuis une étoile fixe comme de 1 ✱ ♈ ait été $= \zeta$. A preſent qu'il s'agit de déterminer le lieu du pole boreal de la terre, ſoit ſa longitude vraie $= x$ & ſa latitude vraye $= y$; & que depuis l'époque marquée jusqu'ici, le moyen mouvement du ſoleil ait été $= v$. Soit enſuite pour le tems preſent la longitude du ſoleil depuis l'équinoxe du printems $= p$ & la longitude du noeud aſcendant $= u$; où

il

il faut ſuppoſer que le lieu du pole eſt deja connu à peu près. Cela poſé, nous avons vû qu'en vertu de la force du ſoleil il ſera:

$$x = C - 0,458617 \lambda v + 46222 \lambda \text{ ſin } 2p$$
$$y = \theta + 20641 \lambda \text{ cof } 2p.$$

Or la force de la lune donne

$$x = C - 0,\ 45302 \lambda mv + 296535 \lambda m \text{ ſin } u$$
$$y = \theta + 158718 \lambda m \text{ cof } u.$$

Donc ces deux forces agiſſant enſemble produiront l'effet contenu dans les formules ſuivantes:

$$x = \zeta - 0,45862 \lambda v + 56222 \lambda \text{ ſin } 2p$$
$$- 0,45302 \lambda mv + 296535 \lambda m \text{ ſin } u$$
$$y = \theta + 20541 \lambda \text{ cof } 2p + 158718 \lambda m \text{ cof } u$$

C.Q.F.T.

COROLL. I.

49. On peut ici diſtinguer deux ſortes de mouvement. La prémiere contient le mouvement moyen du pole, & eſt compriſe dans ces deux formules

$$x = \zeta - 0,45872 \lambda v - 0,45302 \lambda m v \text{ \& } y = \theta$$

par leſquelles on trouvera le lieu moyen du pole, pour un tems poſé quelconque: & enſuite les autres termes renferment les équations dont il faut corriger tant la longitude que la latitude moyenne du pole.

COROLL. II.

50. Pour ce qui regarde le lieu moyen du pole, on voit que ſa diſtance au pole de l'ecliptique eſt toujours la même, mais que la longitude décroit de plus en plus; c'eſt à dire le mouvement du pole en longitude ſera rétrograde par rapport aux étoiles fixes, & cette rétrogreſſion ſera dans un an

de $1296000 \lambda (0,45862 + 0,\ 45302\ m)$ ſecondes.
ou de $594371 \lambda + 587113 \lambda m$ ſecondes.

COROLL.

COROLL. III.

51. Négligeant les inégalités, qui dépendent du lieu du ſoleil, puiſqu'elles ſont très petites, la longitude vraye du pole ſera plus grande que la moyenne, lorsque le noeud aſcendant ſe trouve dans les ſignes boreaux; mais ſi ce noeud eſt dans les ſignes auſtrales, alors la longitude vraye ſera plus petite que la moyenne. Or la difference entre la longitude vraye & moyenne du pole ſera la plus grande, lorsque le noeud eſt dans les points ſolſtitiaux; & cette difference emportera $296537\,\lambda\,m$ ſecondes.

COROLL. IV.

52. La diſtance du pole de la terre à celui de l'ecliptique ſera la plus grande, lorsque le noeud aſcendant ſe trouve dans l'équinoxe du printems: mais ſi ce noeud eſt dans l'équinoxe d'automme, alors le pole de la terre ſe trouvera au plus près de celui de l'ecliptique. Dans ces cas la plus grande difference entre la latitude vraye & moyenne du pole ſera de $158718\,\lambda\,m$ ſecondes.

REMARQUE I.

53. Ces Corollaires ſont généralement bien d'accord avec les Obſervations, par leſquelles on ſait, que le mouvement du pole terreſtre en longitude eſt rétrograde, & que cette préceſſion vaut tous les ans $50''$ ou $51''$. De plus Mr. Bradley vient de découvrir, que la diſtance des poles de l'équateur & de l'ecliptique eſt la plus grande, lorsque le noeud aſcendant eſt au commencement du Belier, & la plus petite lorsque ce noeud entre dans la Balance, & que la plus grande difference entre la diſtance vraie & moyenne eſt de $9''$. Auſſi ce qu'il a obſervé par rapport aux inégalités de la longitude, eſt tout à fait d'accord avec ce que la theorie vient d'enſeigner. Or comme nous ne ſavons pas les vrayes valeurs des lettres λ & m, ces Obſervations nous pourront ſervir a déterminer ces valeurs, puiſqu'il faut qu'il ſoit:

$$594371\,\lambda + 587113\,\lambda\,m = 50\tfrac{1}{2}''$$
$$\&\quad 158718\,\lambda\,m = 9''$$

d'où nous tirons $\frac{594371 + 587113\,m}{158718\,m} = \frac{101}{18}$

& partant fort à peu prés $m = 2$; où il faut remarquer, que ſi la plus grande aberration en latitude au lieu de $9''$ étoit de $11''$, on trouveroit $m = 4$. Or $m : 1$ marque le rapport de la force de la Lune à celle du ſoleil dans la production des marées, & Newton avoit établi ce rapport comme 4 ou $4\frac{1}{2}$ à 1. Mr. Daniel Bernoulli fait ce rapport beaucoup plus petit en poſant ſeulement $m = 2\frac{1}{2}$; & cette valeur approche beaucoup plus de celle que je viens de trouver, que de celle de Newton ; ce qui eſt une nouvelle preuve non ſeulement pour le ſentiment de Mr. Bernoulli, qui paroit d'ailleurs très bien fondé, mais auſſi pour la theorie, dont je viens de déterminer le mouvement du pole de la terre. Car ſi nous avions trouvé pour m une valeur, ou beaucoup plus grande, ou petite, ç'auroit été une marque ſeure, que le mouvement du pole ne dépendoit pas uniquement des forces du ſoleil & de la lune, mais que les forces centrifuges, ne ſe détruiſant pas parfaitement, y contribuoient auſſi quelque choſe.

REMARQUE.

54. Cependant il ne ſemble pas qu'on puiſſe diminuer la valeur de m au delà de $2\frac{1}{2}$, & il eſt plutot probable, que la plus grande difference entre la latitude vraye & moyenne du pole de la terre eſt un peu plus grande que $9''$. Auſſi Mr. Bradley avouë-t-il lui même, que cette détermination n'eſt pas ſi exacte, qu'il ne s'y put trouver une erreur d'une demi-ſeconde. Suppoſons donc ſelon Mr. Bernoulli $m = 2\frac{1}{2}$, & la plus grande difference entre la latitude moyenne & vraye du pole de la terre deviendra $= 9{,}75$ ou $9\frac{3}{4}$ ſecondes: or ſi nous avions ſuppoſé le mouvement moyen annuel du pole ſeulement de $50''$ au lieu de $50\frac{1}{2}$, nous aurions trouvé 9, 62 au lieu de 9, 75: d'où il ſemble que nous pouvons mettre aſſés ſeurement avec M. Bradley le mouvement annuel du pole de la terre de $50''$, 3, & avec Mr. Bernoulli $m = 2\frac{1}{2}$: de là nous trouverons la valeur de λ, ſavoir

$\lambda =$

$$\lambda = \frac{50,3}{594371 + 587113.2\frac{1}{2}} = \frac{1}{40997}$$

& cette valeur eſt conſidérablement plus petite, que celle qui réſulte de l'hypotheſe de la terre homogene: d'où il s'enſuit que la valeur de $\frac{a^3(ee-aa)+\nu a^3(\varepsilon\varepsilon-\alpha\alpha)}{a^5+\nu a^5}$ eſt plus petite que $\frac{ee-aa}{aa}$ dans la raiſon de 40997 à 24431 ou de 5 à 3. Et de là il faut conclure, que la terre n'eſt pas homogene, mais qu'elle a un noyau beaucoup plus denſe autour de ſon centre. Suppoſons que ce noyau eſt ſphérique, & puisque $ee - aa = \frac{1}{100}\,aa$, nous aurons:

$$\frac{\frac{1}{100}a^5}{a^5+\nu a^5} : \tfrac{1}{100} = 5 : 3, \text{ ou } 2a^5 = 3\nu a^5.$$

Donc ſi la denſité de ce noyau étoit connuë, nous en pourrions conclure le rayon du noyau. Poſons par exemple que le noyau ſoit dix fois plus denſe que la croute, & il ſera $\nu = 9$, & $\alpha^5 = \frac{2}{27}a^5$ ou $\alpha = \frac{3}{5}a$: ce qui ne paroit contraire à aucunes des Obſervations, qui regardent l'interieur de la terre: il ſemble plutot qu'un tel noyau eſt très conforme aux principes de la Phyſique.

Probleme VIII.

§. 55. *Pour un tems propoſé quelconque déterminer la longitude & la latitude du pole boreal de la terre, comptant la longitude depuis une étoile fixe donnée.*

SOLUTION.

Ayant dreſſé la table pour le moyen mouvement rétrograde en longitude du pole à raiſon de 50″,3 par an, on en trouvera pour chaque tems propoſé la longitude moyenne du pole, depuis une étoile fixe donnée comme de la 1 ✱ ♈; pourvu que cette longitude ait été déterminée par les Obſervations pour une epoque donnée. Soit donc

η cette longitude moyenne du pole depuis 1 $*$ Υ pour le tems propoſé, & θ ſera la diſtance moyenne de ce pole depuis le pole de l'ecliptique, laquelle eſt eſtimée de 23°, 28′, 30″. Enſuite ſoit x la longitude vraye du pole depuis 1 $*$ Υ, & y ſa diſtance vraye au pole de l'ecliptique. Cela poſé, puisque nous avons $\lambda = \frac{1}{40997}$ & $\lambda m = \frac{1}{16399}$, les formules qui nous donneront le vray lieu du pole pour le tems propoſé, ſeront:

$$x = \eta + 18'', 08 \text{ ſin } u + 1'', 13 \text{ ſin } 2p$$
$$y = \theta + 9, 68 \text{ coſ } u + 0, 50 \text{ coſ } 2p$$

où u marque la longitude du noeud aſcendant de la Lune comptée depuis le point équinoxial du printems, & p la longitude du ſoleil comptée depuis le même commencement. Car comme on a déjà la longitude moyenne du pole, on aura auſſi celle du point équinoctial, qui précede celle-là de 3 ſignes. Or on voit bien qu'il ſuffit de connoitre ces longitudes u & p à peu près, & que l'erreur ſeroit inſenſible, quand même on s'y tromperoit de quelques degrés. C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 56. Puisque x marque la longitude du pole depuis la premiére étoile du belier, & que x repond au point ſolſtitial d'été, $x - 90°$ exprimera la longitude du point équinoctial du printems depuis 1 $*$ Υ. Et de là connoiſſant la longitude moyenne de 1 $*$ Υ depuis l'équinoxe pour un tems donné, qui croit de 50″, 3 par an, laquelle je poſerai $= E$, pour le même tems la longitude vraye de la premiére étoile d'*Aries*, le commencement du ſigne de Belier ſera.

$$E - 18'', 08 \text{ ſin } u - 1'', 13 \text{ ſin } 2p$$

COROLL.

COROLL. II.

§. 57. On pourra donc regarder le point équinoctial comme fixe dans le Ciel, & attribuer ſon mouvement aux étoiles fixes en ſens contraire: & partant la longitude des étoiles fixes croitra non ſeulement réguliérement de $50''$, 3 par an, mais elle ſera outre cela aſſujettie à une double inégalité, dont l'une dépend de la longitude du noeud aſcendant de la lune, & l'autre de la longitude du ſoleil.

COROLL. III.

§. 58. Le premier effet, qui fait avancer les étoiles en longitude de $50''$, 3 par an, eſt celui qui eſt nommé en Aſtronomie la préceſſion des équinoxes: mais les regles, que les Aſtronomes en ont tirées, ne donnent que la longitude moyenne des étoiles. Or ayant trouvé par cette methode la longitude moyenne d'une étoile quelconque, laquelle ſoit $= L$; ſa longitude vraye ſera

$$L - 18'', 08 \text{ ſin } u - 1'', 13 \text{ ſin } 2p.$$

COROLL. IV.

§. 59. Puisque y marque la diſtance des poles de la terre & de l'ecliptique, ce ſera auſſi la valeur de l'obliquité de l'ecliptique. Donc poſant l'obliquité moyenne de l'ecliptique $= \theta$, qu'on eſtime de $23°$, $28'$, $30''$, pour chaque tems propoſé la vraye obliquité de l'ecliptique ſera

$$\theta + 9'', 68 \text{ coſ } u + 0'', 50 \text{ coſ } 2p$$

Or il eſt evident que ſi l'obliquité moyenne de l'ecliptique étoit un peu plus grande ou plus petite, les corrections demeureroient pourtant les mêmes. Ainſi, ſi à cauſe d'autres forces l'obliquité moyenne de l'ecliptique étoit variable, ces memes corrections donneroient néantmoins la vraye, pourvu qu'on mit toujours pour θ l'obliquité moyenne.

COROLL. V.

§. 60. La latitude des étoiles fixes ne ſouffrira aucun changement de ce coté, puisque leur diſtance de l'ecliptique demeure tou-

jours la même. Ainſi la mobilité du pole de la terre ne produit que deux effets, dont le premier conſiſte dans la variation de la longitude des étoiles fixes, & l'autre dans la variation de l'obliquité de l'ecliptique.

REMARQUE I.

§. 61. Ayant bien établi par la comparaiſon des Obſervations anciennes avec les modernes la veritable quantité de la préceſſion moyenne des équinoxes, il ſera aiſé d'en déterminer pour chaque tems propoſé la longitude moyenne de toutes les étoiles fixes, dont on aura une fois bien déterminé la longitude. Je ſuppoſerai donc qu'on ſache la longitude moyenne d'une étoile à un tems donné, & qu'on en veuille déterminer la longitude vraie pour le même tems. Cela ſe fera par le moyen de deux équations que les deux tables ſuivantes fourniront.

Premiere correction de la Longitude moyenne des étoiles fixes.

Arg. *La Longitude du noeud aſcendant de la Lune.*

°	0. Sign. ôtez.	1. Sign. ôtez.	2. Sign. ôtez.	3. Sign. ôtez.	4. Sign. ôtez.	5. Sign. ôtez.	
	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	
0	0, 0	9, 2	15, 40	18, 5	15, 40	9, 2	30
5	1, 34	10, 22	16, 23	18, 0	14, 50	7, 38	25
10	3, 8	11, 37	17, 0	17, 48	13, 51	6, 11	20
15	4, 41	12, 47	17, 29	17, 29	12, 47	4, 41	15
20	6, 1	13, 51	17, 48	17, 0	11, 37	3, 8	10
25	7, 38	14, 50	18, 0	16, 23	10, 22	1, 34	5
30	9, 2	15, 40	18, 5	15, 40	9, 2	0, 0	0
	ajoutez.	ajoutez.	ajoutez.	ajoutez.	ajoutez.	ajoutez.	
	11. Sign.	10. Sign.	9. Sign.	8. Sign.	7. Sign.	6. Sign.	

Seconde

Seconde correction de la Longitude moyenne des étoiles fixes.

Arg. *La Longitude du Soleil.*

	0. Sign, otez.	1. Sign. otez.	2. Sign. otez.	3. Sign. ajoutez.	4. Sign. ajoutez.	5. Sign. ajoutez.	
°	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	′
0	0, 0	0, 59	0, 59	0, 0	0, 59	0, 59	30
5	0, 22	1, 4	0, 52	0, 12	1, 4	0, 52	25
10	0, 23	1, 7	0, 44	0, 23	1, 7	0, 44	20
15	0, 34	1, 8	0, 34	0, 34	1, 8	0, 34	15
20	0, 44	1, 7	0, 23	0, 44	1, 7	0, 23	10
25	0, 52	1, 4	0, 12	0, 52	1, 4	0, 12	5
30	0, 59	0, 59	0, 0	0, 59	0, 59	0, 0	0
	ajoutez.	ajoutez.	ajoutez.	otez.	otez.	otez.	
	11. Sign.	10. Sign.	9. Sign.	8. Sign.	7. Sign.	6. Sign.	

COROLL. V.

§. 62. La longitude vraye des étoiles fixes ſera donc la plus grande à l'égard de la moyenne, lorsque le noeud aſcendant de la lune ſe trouve au commencement de ♑, & que le ſoleil eſt ou en ♌ 15° ou en ♒ 15°. Et alors la difference entre la longitude vraye & la moyenne ſera de 19″, 13‴.

COROLL. VI.

§. 63. Or la longitude vraye des étoiles fixes ſera la plus petite à l'egard de la moyenne, lorsque le noeud aſcendant eſt au commencement du ſigne de ♋, & que le ſoleil ſe trouve ou en ♉ 15° ou en ♏ 15°. Alors la difference entre la longitude vraye & la moyenne ſera de 19″, 13‴. Donc la difference entre la longitude vraye la plus grande & la plus petite pourra monter à 38″, 26‴.

COROLL.

COROLL. VII.

§. 64. Mais quand le noeud aſcendant ſe trouve dans un des points équinoctiaux, & que le ſoleil eſt ou dans les équinoxes ou dans les ſolſtices, alors la longitude moyenne des étoiles ne differera point de la vraye. Ce ſera donc le tems le plus propre pour obſerver la longitude moyenne des étoiles.

REMARQUE II.

§. 65. Il en ſera de même de l'obliquité de l'ecliptique, qui demandera auſſi une double correction, dont l'une dépend du lieu du noeud aſcendant de la lune, & l'autre du lieu du ſoleil: d'où j'ai formé les deux tables ſuivantes.

Premiere correction de l'obliquité moyenne de l'Ecliptique.

Arg. *La Longitude du noeud aſcendant de la Lune.*

	0. Sign. ajoutez.	1. Sign. ajoutez.	2. Sign. ajoutez.	3. Sign. otez.	4. Sign. otez.	5. Sign. otez.	
°	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	
0	9, 41	8, 24	4, 50	0, 0	4, 50	4, 24	30
5	9, 39	7, 57	4, 5	0, 50	5, 33	8, 45	25
10	9, 32	7, 25	3, 19	1, 41	6, 14	9, 5	20
15	9, 21	6, 51	2, 30	2, 30	6, 51	9, 21	15
20	9, 5	6, 14	1, 41	3, 19	7, 25	9, 32	10
25	8, 45	5, 33	0, 50	4, 5	7, 57	9, 39	5
30	8, 24	4, 50	0, 0	4, 50	8, 24	9, 41	0
	ajoutez.	ajoutez.	ajoutez.	otez.	otez.	otez.	
	11. Sign.	10. Sign.	9. Sign.	8. Sign.	7. Sign.	6. Sign.	

Seconde

Seconde Correction de l'Obliquité moyenne de l'Ecliptique.

Arg. *La Longitude du Soleil.*

°	0. Sign. ajoutez.	1. Sign. ajoutez.	2. Sign. otez.	3. Sign. otez.	4. Sign. otez.	5. Sign. ajoutez.	°
	″′	″′	″′	″′	″′	″′	
0	30	15	15	30	15	15	30
5	30	10	19	30	10	19	25
10	28	5	22	28	5	22	20
15	25	chang. de ſign. 0	25	25	chang. de ſign. 0	25	15
20	22	5	28	22	5	28	10
25	19	10	30	19	10	30	5
30	15	15	30	15	15	30	0
	ajoutez.	otez.	otez.	otez.	ajoutez.	ajoutez.	
	11. Sign.	10. Sign.	9. Sign.	8. Sign.	7. Sign.	6. Sign.	

COROLL. VIII.

§. 66. L'obliquité de l'ecliptique ſera donc la plus grande, lorsque le noeud aſcendant de la Lune ſe trouve dans le point équinoctial du printems; & que le ſoleil eſt auſſi dans un des équinoxes. Car alors l'obliquité vraye de l'ecliptique ſurpaſſera la moyenne de $10''$, $11'''$.

COROLL. IX.

§. 67. Or l'obliquité de l'ecliptique ſera la plus petite, lorsque le noeud aſcendant de la lune eſt dans le point équinoctial d'automne, & que le ſoleil ſe trouve dans l'un ou l'autre ſolſtice. Alors l'obliquité vraye de l'ecliptique ſera ſurpaſſée de la moyenne de $10''$, $11'''$; & ainſi les variations de l'obliquité de l'ecliptique monteront à $20''$, $22'''$.

COROLL. X.

§. 68. Mais ſi le noeud aſcendant eſt dans l'un ou l'autre ſolſtice, & que le lieu du ſoleil ſoit ou ♉ 15°, ou ♌ 15° ou ♎ 15° ou ♑ 15°, alors l'obliquité vraye de l'ecliptique ne differera point de la moyenne.

Probleme IX.

§. 69. *Déterminer la vraye quantité de la préceſſion des équinoxes pendant l'eſpace d'une année propoſée.*

SOLUTION.

Qu'on cherche la longitude du noeud aſcendant pour le milieu de l'an, pendant lequel on veut ſavoir la préceſſion des équinoxes, & ſoit s cette longitude du noeud, qui répond au milieu de l'année propoſée. Puisque le mouvement annuel des noeuds eſt 19°, 20′, au commencement de notre an la longitude du noeud aſcendant aura été $s + 9°, 40'$, & à la fin $s - 9°, 40'$; & puisque la longitude du ſoleil eſt la même, tant pour le commencement que pour la fin, elle ne contribuera rien à la préceſſion annuelle.

Donc au commencement de l'année la longitude d'une étoile ayant été

$$L - 18'', 08 \text{ ſin } (s + 9°, 40') - 1'', 13 \text{ ſin } 2p$$

elle ſera à la fin de cette année

$$L + 50'', 3 - 18'', 08 \text{ ſin } (s - 9°, 40') - 1'', 13 \text{ ſin } 2p$$

Et partant la preceſſion des équinoxes pendant cet an
ſera $= 50'', 3 - 18'', 08$ ſin $(s - 9°, 40') + 18'', 08$ ſin $(s + 9°, 40')$
Cette préceſſion ſera donc

$$50'', 3 + 36'', 16 \text{ cof } s. \text{ ſin } 9°, 40'$$

ou bien $50'', 3 + 6'', 07$ cof s

Donc

Donc ayant déterminé la longitude du noeud aſcendant pour le milieu de l'année propoſée, on en trouvera aiſément combien les équinoxes reculeront pendant chaque année. C. Q. F. T.

COROLL. I.

70. La préceſſion des équinoxes ſera donc la plus grande dans les années, au milieu desquelles le noeud aſcendant ſe trouve au commencement de ♈ : & dans ces années la préceſſion des équinoxes ſera $56''$, 37 ou de $56''$, $22'''$.

COROLL. II.

71. Or la préceſſion des équinoxes ſera la plus petite dans les ans, au milieu desquels le noeud aſcendant ſe trouve au commencement de la balance : & alors la préceſſion ne ſera que $44''$, 23 ou de $44''$, $14'''$. Donc la difference entre la plus grande & la plus petite preceſſion annuelle ſera de $12''$, $8'''$,

COROLL. III.

72. Si l'on connoit la longitude du noeud aſcendant pour le commencement de l'année propoſée, & qu'on la poſe $\equiv u$, à cauſe de $u \equiv s + 9°, 40'$, il ſera $s \equiv u - 9°, 40'$; & la préceſſion des équinoxes pendant cette année ſera

$$50'', 3 + 6'', 07 \cos(u - 9°, 40')$$

REMARQUE.

73. De là j'ai calculé la table ſuivante, par laquelle on trouvera la préceſſion des équinoxes pour chaque année, pour le commencement de laquelle on ſait la longitude du noeud aſcendant de la Lune.

Table qui marque la quantité de la préceſſion des Equinoxes, pour chaque année propoſée.

Arg. *La longitude du noeud aſcendant au commencement de l' année propoſée.*

	0. Sign. ♈	1. Sign. ♉	2. Sign. ♊	3. Sign. ♋	4. Sign. ♌	5. Sign. ♍
	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴
0	56, 17	56, 0	54, 12	51, 20	48, 14	45, 39
5	56, 21	55, 48	53, 48	50, 49	47, 44	45, 20
10	56, 22	55, 34	53, 20	50, 18	47, 16	45, 2
15	56, 21	55, 18	52, 52	49, 48	46, 48	44, 48
20	56, 17	54, 57	52, 22	49, 16	40, 24	44, 36
25	56, 10	54, 30	51, 52	48, 44	45, 48	44, 26
30	56, 0	54, 12	51, 20	48, 14	45, 39	44, 19

Continuation de la meme table pour les ſignes auſtraux.

	6. Sign. ♎	7. Sign. ♏	8. Sign. ♐	9. Sign. ♑	10. Sign. ♒	11. Sign. ♓
	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴
0	44, 19	44, 36	46, 24	49, 16	52, 22	54, 57
5	44, 15	44, 48	46, 48	49, 48	52, 52	55, 18
10	44, 14	45, 2	47, 16	50, 18	53, 20	55, 34
15	44, 15	45, 20	47, 44	50, 49	53, 48	55, 48
20	44, 19	45, 39	48, 14	51, 20	54, 12	56, 0
25	44, 26	45, 48	48, 44	51, 52	54, 36	56, 10
30	44, 36	46, 24	49, 16	52, 22	54, 57	56, 17

COROLL. IV.

74. Prenons pour exemple l'année 1750, au commencement de laquelle le lieu du noeud aſcendant ſe trouve en ♑ 10°, 17′. Donc depuis le premier Janvier 1750 jusqu'au premier Janvier 1751

la

la préceſſion des équinoxes ſera $50''$, $18'''$, ou elle ſera environ égale à la préceſſion annuelle moyenne.

COROLL. V.

75. Comme au commencement de l'année 1746 le lieu du noeud aſcendant a été près de l'équinoxe de printems, ſavoir en ♈, 27°, 40′, la préceſſion annuelle des équinoxes ſera pour l'année 1745 & les ſuivantes :

An.	Préceſſion annuelle		An.	Préceſſion annuelle	
	″	‴		″	‴
1745	56,	20	1765	56,	0
1746	56,	15	1766	55,	0
1747	55,	25	1767	53,	20
1748	54,	10	1768	51,	40
1749	52,	20	1769	49,	40
1750	50,	20	1770	47,	30
1751	48,	20	1771	45,	40
1752	46,	30	1772	44,	50
1753	45,	10	1773	44,	15
1754	44,	20	1774	40,	20
1755	44,	15	1775	45,	10
1756	44,	50	1776	46,	30
1757	45,	50	1777	48,	30
1758	47,	40	1778	50,	20
1759	49,	40	1779	52,	20
1760	51,	50	1780	54,	10
1761	53,	30	1781	55,	30
1762	55,	10	1782	56,	15
1763	56,	0	1783	56,	20
1764	56,	22	1784	55,	40

Ce qui ſervira à voir, combien les Obſervations ſur la mobilité de l'axe de la terre ſeront d'accord avec cette Théorie.

DE LA PARALLAXE DE LA LUNE
TANT PAR RAPPORT A SA HAUTEUR QU'A SON AZIMUTH DANS L'HYPOTHESE DE LA TERRE SPHEROIDIQUE.

PAR M. EULER.

§. 1.

Aprés que M. de Maupertuis a publié ſon excellent Traité ſur la parallaxe de la lune, où il a montré combien les régles ordinaires de la parallaxe, entant qu'elles ſont fondées ſur la figure ſphérique de la terre, doivent être changées pour la figure veritable de la terre; cette matiere paroit d'abord ſi épuiſée, qu'on n'y ſauroit plus rien découvrir, qui ſoit échappé à ſon attention, à moins que ce ne ſoient de petites circonſtances, dont on ſe peut paſſer ſans aucune erreur ſenſible dans la pratique. Ayant remarqué que cet Illuſtre Auteur n'a pas eu égard à l'azimuth de la lune, qui devroit entrer dans la recherche de la parallaxe, lorsque la terre n'eſt pas ſphérique, j'ai d'abord cru que cette circonſtance pourroit être de quelque conſéquence: or auſſi-tot que j'en eus fait le calcul, j'ai trouvé que l'irrégularité qui peut réſulter de l'azimuth, eſt ſi petite, qu'on la peut négliger ſans faire tort à la préciſion de cette theorie. Cependant, quand on veut avoir égard à cette circonſtance dans la recherche de la parallaxe, le calcul devient beaucoup plus difficile; & puiſqu'il eſt impoſſible, avant qu'on en ſoit venu à bout, qu'on puiſſe prononcer avec aſſés d'aſſurance, ſi l'effet qui en réſulte, merite quelque attention ou non? je me crois obligé de développer encore cette matière, en faiſant entrer dans l'analyſe cette circonſtan-

Planche V.

conſtance de l'azimuth. Et comme cette conſidération deviendroit abſolument néceſſaire, ſi la figure de la terre differoit plus conſiderablement de la ſphérique, cette recherche pourra apporter quelque uſage dans la réſolution d'autres queſtions.

§. 2. M. de Maupertuis a toujours regardé la lune, comme ſi elle ſe trouvoit dans le plan du meridien, & dans ce cas il n'y a aucun doute, que la lune ne doive paroitre dans le même cercle vertical, ſoit qu'elle ſoit regardée de la ſurface de la terre, ou de ſon centre. Mais dès que la lune eſt vuë hors du plan du meridien, non ſeulement ſa diſtance au zenith, mais auſſi ſon azimuth, doit ſouffrir quelque altération de la parallaxe; puisque la droite tirée du centre de la terre à la lune ſera non ſeulement moins inclinée au plan horizontal, mais elle ne le coupera plus dans le même azimuth. Pour ſe mieux convaincre de cette verité on n'a qu'à concevoir un plan parallele à l'horizon, qui paſſe par le centre de la terre; & comme l'angle, que fait la droite tirée de la ſurface de la terre à la lune, avec le plan horizontal, marque la hauteur apparente, & la perpendiculaire baiſſée de la lune ſur l'horizon, l'azimuth apparent; ainſi l'angle, que fait la droite tirée du centre de la terre à la lune avec ce plan parallele à l'horizon, qui paſſe par le centre de la terre, ſera la meſure de ſa hauteur vraie, & la perpendiculaire baiſſée de la lune ſur ce même plan y marquera un point, d'où la droite tirée au centre donnera à connoitre l'azimuth vrai de la lune. Ces deux choſes rapportées au centre étant differentes que ſi on les rapportoit à la place du ſpectateur, il en réſultera une double correction de la place de la lune, l'une qui regarde la hauteur de la lune, & l'autre pour l'azimuth. Je nommerai la premiere correction la parallaxe de la hauteur, & l'autre la parallaxe de l'azimuth.

§. 3. Pour entreprendre cette recherche, je commence par conſiderer la figure de la terre. Soient E & F les poles de la terre, & C ſon centre: E A F ſoit un meridien tiré par la place du ſpectateur, que je ſuppoſe en M, & on ſait que la figure de ce meridien ſera une demi-ellipſe, par la révolution de laquelle autour de l'axe E F naît la figure *Fig. 1*

de

de la terre. Qu'on nomme le demi-axe $EC = FC = a$, & le demi-diametre de l'équateur $AC = b$, & qu'on poſe $b = (1+n)\,a$, & ſuivant les meſures faites tant vers le pole, que ſous l'équateur le nombre n ſera à peu près $= \frac{1}{200}$. Qu'on tire par le point M la tangente TMV, qui repréſentera au ſpectateur la ligne meridienne, le point T étant dirigé vers le nord, & V vers le ſud, lorsque E eſt le pole boreal de la terre. De plus l'angle CTM donnera l'elevation du poſe au point M qui étant ſuppoſée connuë, ſoit cet angle ou l'elévation du pole $CTM = p$. Enſuite ayant tiré le rayon CM & la perpendiculaire à l'axe PM, avec la normale MN à la tangente MT, ſoit $CP = x$ & $PM = y$; & la nature de l'ellipſe donnera cette égalité:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)} \text{ ou } yy = bb - \frac{bb}{aa}xx$$

D'ou nous tirons la ſubnormale $PN = \frac{-y\,dy}{dx} = \frac{bb}{aa}\,x$, ou $PN = (1+n)^2 x$. Mais l'angle PMN étant egal à $PTM = p$, nous aurons $\text{tang}\,p = \frac{PN}{PM} = \frac{(1+n)\,x}{\sqrt{(aa-xx)}}$; & partant $x = \frac{a\,\text{tang}\,p}{\sqrt{(\text{tang}\,p^2+(1+n)^2)}}$; & $\sqrt{(aa-xx)} = \frac{(1+n)\,x}{\text{tang}\,p} = \frac{(1+n)\,a}{\sqrt{(\text{tang}\,p^2+(1+n)^2)}}$; par conſequent $y = \frac{(1+n)^2\,a}{\sqrt{(\text{tang}\,p^2+(1+n)^2)}}$. Outre cela nous aurons $PN = \frac{(1+n)^2\,a\,\text{tang}\,p}{\sqrt{(\text{tang}\,p^2+(1+n)^2)}}$, & $PT = \frac{PM^2}{PN} = \frac{(1+n)^2\,a\,\cot p}{\sqrt{(\text{tang}\,p^2+(1+n)^2)}}$, d'où il s'enſuit $\frac{PM}{PT} = \text{tang}\,p$.

§. 4. Soit enſuite la diſtance du ſpectateur placé en M au centre C ou le rayon $CM = r$: & puiſque $rr = xx + yy$ nous aurons:

$rr =$

$$rr = \frac{aa\,(\text{tang}\,p^2+(1+n)^4)}{\text{tang}\,p^2+(1+n)^2}.$$

$$\&\ r = a\,V\left(1+\frac{n\,(1+n)^2}{\text{tang}\,p^2+(1+n)^2}\,\frac{(2+n)}{}\right)$$

Or ſi n eſt un nombre fort petit, nous aurons par approximation:
$r = a\,(1+n\cos p^2+\frac{5}{2}n^2\sin p^2\cos p^2+n^3\sin p^2\cos p^2(2-\frac{13}{2}\cos p^2)+\&c.)$
où il ſuffit pour la terre, ou $n = \frac{1}{200}$ de prendre les deux premiers termes: $r = a\,(1+n\cos p^2)$ ou $r = (1+n)\,a\,(1-n\sin p^2)$. Depuis j'ai beſoin pour mon deſſein de ſavoir l'angle CMT, que le rayon de la terre CM fait avec la meridienne TMV: ſoit cet angle CTM $= \Phi$; & puiſque tang TCM $= \frac{PM}{PC} = \frac{x}{y}$, nous aurons tang TCM $= \frac{(1+n)^2}{\text{tang}\,p}$ & ajoutant cet angle TCM à CTM $= p$, pour avoir leur ſomme CMV, nous trouverons

$$\text{tang CMV} = \frac{\text{tang}\,p^2+(1+n)^2}{-n\,(2+n)\,\text{tang}\,p} \quad \&\ \text{partant}$$

$$\text{tang}\,\Phi = \frac{\text{tang}\,p^2+(1+n)^2}{n\,(2+n)\,\text{tang}\,p}: \text{ d'où l'on déduira:}$$

$$\sin\Phi = \frac{\cos p\,(\text{tang}\,p^2+(1+n)^2)}{V\,(\text{tang}\,p^2+(1+n)^4)} \quad \&\ \cos\Phi = \frac{n\,(2+n)\sin p}{V\,(\text{tang}\,p^2+(1+n)^4)}$$

Par les approximations nous trouverons:
$\sin\Phi = 1-2\,n\,n\sin p^2\cos p^2-2\,n^3\sin p^2\cos p^2\,(1-4\cos p^2)$ &c.
$\&\ \cos\Phi = 2\,n\sin p\cos p+n\,n\sin p\cos p\,(1-4\cos p^2)+4\,n^3\sin p\cos p^3\,(2-3\cos p^2)$
dans leſquelles expreſſions on peut rejetter les derniers termes, comme extremement petits.

§. 5. Ces valeurs r & Φ étant trouvées de l'élevation du pole donnée $= p$, ſoit maintenant TMQ le plan horizontal tiré par le *Fig. II.*

lieu du ſpectateur M, dans lequel ſoit TMV la ligne meridienne, dont le bout T tend vers le nord, & l'autre bout V vers le ſud. Que la lune ſe trouve actuellement en L, d'où l'on conçoive baiſſée au plan horizontal la perpendiculaire LQ, & ayant tiré les droites ML & MQ, la ligne ML marquera la diſtance de la Lune au ſpectateur, l'angle LMQ la hauteur de la Lune obſervée, & l'angle TMQ ſon azimuth obſervé. Nommons donc

La diſtance de la Lune au ſpectateur ML $= x$
La hauteur de la Lune obſervée LMQ $= h$
& l'azimuth obſervé ou l'angle TMQ $= k$.

De là nous tirerons :

$$LQ = x \text{ ſin } h \quad \& \quad MQ = x \text{ coſ } h.$$

§. 6. Soit C le centre de la terre, & on aura le rayon $MC = r$ & l'angle $CMT = \Phi$, où il faut remarquer que le plan CMT eſt perpendiculaire au plan horizontal TMQ. Qu'on conçoive maintenant par le centre de la terre C un plan rCq parallele au plan horizontal TMQ, dans lequel la ligne rCv ſoit parallele à la meridienne TMV, à laquelle on baiſſe du point M la perpendiculaire MN, & à cauſe de $MC = r$ & de l'angle $MCN = \Phi$ nous aurons $MN = r$ ſin Φ & $CN = r$ coſ Φ. Depuis la perpendiculaire LQ étant prolongée jusqu'au plan rCq, y ſera auſſi perpendiculaire, & il ſera $Qq = MN = r$ ſin Φ, & tirant la droite Nq, elle ſera parallele & egale à $MQ = x$ coſ h, & à cauſe du parallelisme des plans TMQ, rNq l'angle rNq ſera égal à l'angle TMQ, c. à. d. à l'azimuth obſervé : d'où il s'enſuit que ſi l'on regardoit la lune du point N, par le rayon LN, on l'obſerveroit au même azimuth rNq, que du point propoſé M : & c'eſt la raiſon, que dans l'hypotheſe de la terre ſpherique, où le rayon eſt partout perpendiculaire au plan horizontal, ou le centre en N, la diverſité des points de vuë de M & de N ne change rien dans l'azimuth de la Lune.

§. 7. Or il n'en eſt pas de même, lorsqu'on regarde la Lune du vrai centre C; car tirant les lignes CL & Cq, puisque Lq eſt perpendi-

pendiculaire au plan horizontal conçu paſſer par le centre C ; l'angle qCL donnera la vraie hauteur de la Lune, & l'angle zCq ſon vrai azimuth. Soit donc

La diſtance de la Lune au centre de la terre $CL = z$

La vraie hauteur de la Lune $LCq = v$

& le vrai azimuth ou l'angle $zCq = u$.

Et la difference entre les hauteurs h & v ſera la parallaxe de la hauteur obſervé; & la difference entre les azimuths k & u la parallaxe de l'azimuth obſervé.

§. 8. Cela remarqué nous aurons :

la perpendiculaire $Lq = x \sin h + r \sin \Phi$

& dans le triangle CNq il y a connu :

L'angle $CNq = k$.

le coté $Nq = MQ = x \cos h$

& le coté $NC = r \cos \Phi$

d'où l'on obtiendra :

le coté $Cq = V(xx \cos h^2 + rr \cos \Phi^2 - 2rx \cos h \cos \Phi \cos k)$.

Maintenant puisque l'angle zNq eſt l'azimuth obſervé & l'angle zCq le vrai azimuth, l'angle CqN ſera la parallaxe de l'azimuth, qui doit être ajouté à l'azimuth obſervé TMQ. Or le ſinus de cet angle CqN ſera $=$

$$\frac{\sin k . CN}{Cq} = \frac{r \cos \Phi \sin k}{V(xx \cos h^2 + rr \cos \Phi^2 - 2rx \cos h . \cos \Phi \cos k)}.$$

Ou nous aurons :

$$\sin (u-k) = \frac{r \cos \Phi \sin k}{V(xx \cos h^2 + rr \cos \Phi^2 - 2rx \cos h . \cos \Phi . \cos k)}$$

$$\& \cos (u-k) = \frac{x \cos h - r \cos \Phi \cos k}{V(xx \cos h^2 + rr \cos \Phi^2 - 2rx \cos h \cos \Phi \cos k)}$$

& par conſéquent :

$$\text{tang}\,(u-k) = \frac{r \cos\Phi \sin k}{x \cos h - r \cos\Phi \cos k}$$

ce qui eſt la parallaxe de l'azimuth.

§. 9. Pour la hauteur vraie de la Lune $= v$, puisqu'elle eſt égale à l'angle qCL, nous en avons d'abord la tangente $= \frac{Lq}{Cq}$, c. à. d.

$$\text{tang}\ v = \frac{x \sin k + r \sin\Phi}{\sqrt{(xx\cos h^2 + rr\cos\Phi^2 - 2rx\cos h\cos\Phi\cos k)}}$$

ou bien ayant poſé $CL = z$, nous aurons :

$$\sin v = \frac{x \sin h + r \sin\Phi}{z}$$

Mais la diſtance de la Lune au centre de la terre $CL = z$, ſe trouve par le triangle CqL :

$$z = \sqrt{\left(xx + rr + 2rx\ (\sin h \sin\Phi - \cos h \cos\Phi \cos k)\right)}.$$

Or les tables aſtronomiques, d'où nous tirons la parallaxe de la lune, marquent pour chaque tems non pas la diſtance de la lune au ſpectateur, mais la diſtance au centre de la terre C ; & partant la quantité z doit être regardée comme connue, de laquelle il faut déterminer la valeur de x par le moien de cette équation :

$$zz = xx + rr + 2rx\ (\sin h \sin\Phi - \cos h \cos\Phi \cos k)$$

§. 10. Puisque les deux derniers termes ſont fort petits par rapport aux premiers, il y aura à peu prés $x = z$, & cette valeur étant ſubſtituée dans le dernier terme, nous en tirerons une valeur plus approchante de la verité :

$$x = \sqrt{(zz - 2rz\ (\sin h \sin\Phi - \cos h \cos\Phi \cos k) - rr.)}\ \text{ou}$$

$$x = z - r\ (\sin h \sin\Phi - \cos k \cos\Phi \cos h)$$

qui

qui peut être ſuffiſante, mais ſi on la ſouhaite plus exacte, qu'on cherche un angle ψ tel que

$$\text{cof}\,\psi = \text{ſin}\,h\,\text{ſin}\,\Phi - \text{cof}\,h\,\text{cof}\,\Phi\,\text{cof}\,k$$

& on en déduira:

$$x = z - r\,\text{cof}\psi - \frac{rr}{2z}\,\text{ſin}\,\psi^2 - \frac{r^4}{8z^3}\,\text{ſin}\,\psi^4 - \&c.$$

Depuis les parallaxes cherchées ſeront exprimées ainſi

I. La parallaxe de l'azimuth $u-k$:

$$\text{tang}\,(u-k) = \frac{r\,\text{cof}\,\Phi\,\text{ſin}\,k}{z\,\text{cof}\,h - r\,\text{ſin}\,h(\text{cof}\,h\,\text{ſin}\,\Phi + \text{ſin}\,h\,\text{cof}\,\Phi\,\text{cof}\,k)}$$

II. La hauteur vraie, v:

$$\text{ſin}\,v = \text{ſin}\,h - \frac{r\,\text{ſin}\,h\,\text{cof}\,\psi}{z} + \frac{r\,\text{ſin}\,\Phi}{z} - \frac{rr}{2zz}\,\text{ſin}\,h\,\text{ſin}\,\psi^2 \text{ ou}$$

$$\text{ſin}\,v = \text{ſin}\,h - \frac{r}{z}\,\text{cof}\,h\,(\text{cof}\,h\,\text{ſin}\,\Phi + \text{ſin}\,h\,\text{cof}\,\Phi\,\text{cof}\,k) - \frac{rr}{2zz}\,\text{ſin}\,h\,\text{ſin}\,\psi^2$$

§. 11. Puisque la fraction $\frac{r}{z}$ étant environ $= \frac{1}{60}$ eſt fort petite, & l'angle Φ ne differe qu'inſenſiblement d'un angle droit, ſon coſinus $\text{cof}\,\Phi$ ſera extremement petit, & pourra être rejetté dans les termes, qui ſont fort petits d'eux mêmes. Or pour avoir la veritable parallaxe de la hauteur, nous la trouverons:

$$\text{ſin}\,(v-h) = \frac{r}{z}\,(\text{cof}\,h\,\text{ſin}\,\Phi + \text{ſin}\,h\,\text{cof}\,\Phi\,\text{cof}\,k) + \frac{2zz}{rr}\,\text{tang}\,h\,\text{ſin}\,\psi^2$$

$$+ \frac{rr}{2zz}\,\text{tang}\,h\,(\text{cof}\,h\,\text{ſin}\,\Phi + \text{ſin}\,h\,\text{cof}\,\Phi\,\text{cof}\,k)^2$$

& négligeant dans les derniers termes le $\text{cof}\,\Phi$, nous aurons:

$$\text{ſin}(v-h) = \frac{r}{z}\,\text{cof}\,h\,\text{ſin}\,\Phi + \frac{r}{z}\,\text{ſin}\,h\,\text{cof}\,\Phi\,\text{cof}\,k + \frac{2zz}{rr}\,\text{tg}.h(1+\text{ſin}\,\Phi^2\,\text{cof}\,2h)$$

ou puisque dans ce dernier terme il eſt permis de ſuppoſer $\text{ſin}\,\Phi = 1$,

à cauſe de $\frac{1+\text{cof}\,2h}{2} = \text{cof}\,h^2$, la parallaxe de la hauteur $v-h$ ſe trouvera par cette formule

$$\text{ſin}\,(v-h) = \frac{r}{z}\,\text{cof}h\,\text{ſin}\,\Phi + \frac{r}{z}\,\text{ſin}\,h\,\text{cof}\Phi\,\text{cof}k + \frac{rr}{zz}\,\text{ſin}\,h\,\text{cof}h$$

qu'il faut ajouter à la hauteur obſervée pour avoir la veritable. De même il faut ajouter la parallaxe de l'azimuth $u-k$ à l'azimuth obſervé, & compté depuis le nord, cette parallaxe ſe trouvant de cette formule.

$$\text{tang}\,(u-k) = \frac{r\,\text{cof}\,\Phi\,\text{ſin}\,k}{z\,\text{cof}h - r\,\text{ſin}\,h\,(\text{cof}h\,\text{ſin}\,\Phi + \text{ſin}\,h\,\text{cof}\Phi\,\text{cof}k)}$$

Or des formules trouvées là haut nous tirons:

$r\,\text{ſin}\,\Phi = a\,(1 + n\,\text{cof}\,p^2 + \frac{1}{2}\,nn\,\text{ſin}\,p^2\,\text{cof}\,p^2 - \frac{1}{2}\,n^3\,\text{ſin}\,p^2\,\text{cof}\,p^4)$ &

$r\,\text{cof}\,\Phi = a(2n\,\text{ſin}\,p\,\text{cof}\,p - nn\,\text{ſin}\,p\,\text{cof}\,p(2\,\text{cof}\,p^2 - 1) + 7n^3\,\text{ſin}\,p\,\text{cof}\,p^3\,(2 - 3\,\text{cof}\,p^2))$

ou bien

$r\,\text{ſin}\,\Phi = a\,((1 + \frac{3}{4}\,n)^2 + \frac{1}{2}\,n\,\text{cof}\,2p - \frac{1}{16}\,nn\,\text{cof}\,4p)$ &

$r\,\text{cof}\,\Phi = a\,(n\,\text{ſin}\,2p - \frac{1}{4}\,nn\,\text{ſin}\,4p)$

en négligeant les termes qui contiennent n^3.

§. 12. Que la lune ſoit obſervée à l'horizon, de ſorte que la hauteur apparente $h = 0$, or ſon azimuth reſte $= k$. Dans ce cas la parallaxe de la hauteur ſera $= v$, & on aura

$$\text{ſin}\,v = \frac{r}{z}\,\text{ſin}\,\Phi = \frac{a}{z}\,(1 + n\,\text{cof}\,p^2 + \frac{1}{2}\,nn\,\text{ſin}\,p^2\,\text{cof}\,p^2)$$

qui ſera la parallaxe horizontale, & on voit qu'elle ne dépend plus de l'azimuth de la lune k. Donc ſous l'équateur ou $p = 0$ la parallaxe horizontale de la lune ſera $= \frac{a}{z}\,(1+n) = \frac{b}{z}$: & ſous l'un ou l'autre pole $= \frac{a}{z}$. Comme la parallaxe horizontale, qu'on trouve dans

les

les tables aſtronomiques, eſt tirée des Obſervations faites ou à Paris, où à Londres : c'eſt à dire environ ſous le 49me degré de l'elevation du pole, en poſant $p = 49°$, la parallaxe horizontale de la Lune tirée des tables aſtronomiques ſera $= \frac{a}{z}(1 + 0{,}430411n + 0{,}122588nn)$.

Et puisque par la figure de la terre eſt $n = \frac{1}{200}$, la parallaxe horizontale tabulaire ſera $= 1{,}002155\,\frac{a}{z}$: laquelle étant connue pour chaque tems propoſé, ſoit nommée $= \theta$, de ſorte que $\theta = 1{,}002155\,\frac{a}{z}$.

Or pour toute autre elevation du pole $= p$, ſoit la parallaxe horizontale de la Lune $= \pi$ à la meme diſtance de la lune à la terre, & on aura, ſin π ou $\pi = \frac{a}{z}\left(1 + \frac{1}{200}\text{cof}\,p^2 + \frac{1}{80000}\text{ſin}\,p^2\,\text{cof}\,p^2\right)$

& partant $\pi = \frac{\theta}{1{,}002155}\left(1 + \frac{1}{200}\text{cof}\,p^2 + \frac{1}{80000}\text{ſin}\,p^2\,\text{cof}\,p^2\right)$

Par conſéquent ſous l'équateur ſera la parallaxe horizontale de la lune $\pi = 1{,}002842\theta$, ou d'une $\frac{1}{352}$ partie plus grande que ſous l'elevation du pole 49°. Mais ſous le pole la parallaxe horizontale de la lune ſera $\pi = 0{,}997855\theta$ ou d'une $\frac{1}{465}$ partie plus petite, que ſous l'elevation du pole de 49°. Donc quand la parallaxe horizontale à l'elevation du pole de 49° eſt $= 60'$, elle ſera alors ſous l'équateur $= 60', 10'', 14'''$ & ſous le pole elle ſera $= 59', 52'', 15'''$. Donc la difference entre les parallaxes de l'équateur & des poles ſera $= 17'', 59'''$.

§. 13. C'eſt ainſi qu'on trouvera pour chaque endroit de la terre & pour chaque tems propoſé la parallaxe horizontale de la lune, par le

le moyen des tables parallactiques, que je ſuppoſe juſtes pour l'elevation du pole de 49°. Et nommant cette parallaxe $= \pi$, on aura $\pi = \frac{r}{z} \text{ ſin } \Phi$, & partant $\frac{r}{z} = \frac{\pi}{\text{ſin } \Phi}$. Laquelle étant trouvée, on obtiendra la parallaxe de l'azimuth, ſuppoſant la lune encore à l'horizon, & ſon azimuth $= k$, de ſorte que $k = o$, par cette formule:

$$\text{tang } (u-k) = \pi \text{ ſin } k \cot \Phi = u - k = \frac{\pi \text{ ſin } k}{\text{tang } \Phi}$$

d'où l'on voit que cette parallaxe $u - k$ eſt à la parallaxe horizontale π en raiſon du ſinus de l'azimuth, à la tangente de l'angle Φ. Cette parallaxe ſera donc la plus grande, lorsque la lune ſe leve vers l'eſt, ou ſe couche vers l'oüeſt, où ſon azimuth k eſt $= 90$; & lorsque l'angle Φ eſt le plus petit; ce qui arrive ſous l'elevation du pole p, quand tang $p = 1 + n$, ou ſous l'elevation du pole de 45°, 8′ à cauſe de $n = \frac{1}{200}$

Dans ce cas il deviendra tang $\Phi = \frac{2(1+n)}{n(2+n)}$ & $u - k = \frac{\pi(2+n)}{2(1+n)}$ π ſi k; par conſéquent ſi $k = 90$ & $n = \frac{1}{200}$ cette parallaxe de l'azimuth ſera $= \frac{2}{401}\pi$. Dans ce cas donc, ſi la parallaxe horizontale de la hauteur π eſt 60′, la parallaxe horizontale de l'azimuth $k = 90°$ ſera $= 17'', 57'''$. Or dans ce cas la parallaxe de l'azimuth étant la plus grande, puisqu'elle ne monte qu'a 18″, erreur qui dans l'obſervation de l'azimuth eſt inſenſible, on voit bien qu'on ſe peut ſans faute paſſer de cette correction de l'azimuth obſervé.

§. 14. Que la lune ſe trouve maintenant élevée ſur l'horizon à la hauteur $= h$, & qu'elle ſoit obſervée à l'azimuth $= k$, les parallaxes tant de la hauteur h, que de l'azimuth k ſeront aiſément determinées par la parallaxe horizontale de la hauteur $= \pi$, que je ſuppoſe

deja connuë. Car puisque $\frac{r}{z} = \frac{\pi}{\sin \Phi}$, la parallaxe à ajouter à la hauteur sera:

$$\sin (v-b) = \pi \left(\cos h + \frac{\sin h \cos k}{\tang \Phi} \right) + \frac{\sin h \cos h}{\sin \Phi^2} \cdot \pi^2$$

ou puisque dans les parties du rayon il y a à peu près $\pi = \frac{1}{60}$, cette valeur sera assez exacte pour le dernier terme, & ainsi la parallaxe de la hauteur sera =

$$\pi \left(\cos h + \frac{\sin h \cos k}{\tang \Phi} + \frac{\sin h \cos h}{60 \sin \Phi^2} \right)$$

Or la parallaxe de l'azimuth se trouvera =

$$\frac{\pi \sin k}{\cos h \tang \Phi - \frac{1}{60} \sin h (\cos h \tang \Phi + \sin h \cos k)}$$

supposant dans le dénominateur $\pi = \frac{1}{60}$. Il est bien vrai qu'à une très grande hauteur, lorsque la lune se trouve près du zenith, cette correction peut devenir très considerable: mais dans ces cas l'azimuth même devient très incertain, & les Astronomes n'y ayant plus égard, on n'a pas besoin de correction. Quand la lune est plus éloignée du zenith, la parallaxe de l'azimuth sera assès exactement $= \frac{\pi \sin k}{\cos h \tang \Phi}$.

Enfin il faut encore remarquer, que quand la lune est observée au zenith même, de sorte que $h = 90°$, la parallaxe n'evanouïra point entierement sur la terre spheroïdique; elle sera encore $= \frac{\pi}{\tang \Phi}$, dont la lune doit être approchée du pole. Cette parallaxe seroit la plus grande sous l'elevation du pole de $45°, 8'$, si la lune dans ces régions pouvoit monter au zenith, auquel cas elle seroit $= 17'', 57'''$, la parallaxe horizontale de la hauteur étant $\pi = 60'$.

§. 15. Si la terre étoit ſpherique, nous n'aurions pour la parallaxe de la hauteur que cette formule $\pi (\text{cof}\, h + \frac{\text{ſin}\, h \,\text{cof}\, h}{60})$, dont on fait uſage dans l'Aſtronomie, & qui aura auſſi lieu ſous l'équateur & ſous les poles, quoique la figure de la terre ſoit elliptique. Mais pour les autres endroits de la terre, la parallaxe de la hauteur ſera pour l'ordinaire plus grande, que ſuivant la régle vulgaire. Car nous avons vû, que pour la hauteur $= h$, & l'azimuth $= k$ & ſous l'elevation du pole ou le rayon de la terre fait avec la meridienne un angle $= \Phi$, la parallaxe de la hauteur eſt $= \pi (\text{cof}\, h + \frac{\text{ſin}\, h \,\text{cof}\, k}{\text{tang}\, \Phi} + \frac{\text{ſin}\, h \,\text{cof}\, h}{60\, \text{ſin}\, \Phi^2})$ Car premiérement ſi l'angle Φ n'eſt pas droit, le dernier terme $\frac{\text{ſin}\, h \,\text{cof}\, h}{60\, \text{ſin}\, \Phi^2}$ devient plus grand, & la parallaxe par conſequent plus grande. Et ſi la lune ſe trouve dans la moitié boreale du ciel, ou que ſon azimuth k eſt moindre que 90°, le cof k étant poſitif, augmentera encore la parallaxe de la hauteur. Mais ſi la lune ſe rencontre dans la moitié meridionale du Ciel, le cof k devenant negatif, diminuera la parallaxe; de ſorte que ſi la lune paſſe par le meridien, où il y a cof $k = -1$, la parallaxe de la hauteur ſera $= \pi (\text{cof}\, h - \frac{\text{ſin}\, h}{\text{tang}\, \Phi} + \frac{\text{ſin}\, h \,\text{cof}\, h}{60\, \text{ſin}\, \Phi^2})$ & puiſque dans les paſſages de la lune par le meridien il eſt de la derniere importance de connoitre exactement ſa parallaxe, il ſera d'autant plus néceſſaire d'avoir égard à ce changement de la parallaxe, qui réſulte de la figure de la terre, plus on tâche de porter la methode d'obſerver à un plus haut degré de perfection.

* * * * * * *
* * *
*

DE

DE LA SITUATION
LA PLUS AVANTAGEUSE DES PLANETES
POUR DÉCOUVRIR LES IRRÉGULARITÉS DE LEURS MOUVEMENS,

PAR M. KIES.

Ce n'eſt pas préciſement le grand nombre, mais c'eſt plutôt le choix des Obſervations celeſtes, qui a ſervi à porter l'Aſtronomie à ce haut degré de perfection, où elle eſt de nos jours. Chaque Obſervation a ſon mérite particulier, mais dans certaines circonſtances elle acquiert ſon plus grand degré de bonté. Il en eſt des Obſervations aſtronomiques, comme de ces ſortes d'Experiences phyſiques, pour la réüſſite desquelles la ſagacité du Phyſicien doit attendre les momens favorables, quand il en veut retirer tout l'avantage poſſible. Il n'eſt pourtant pas ſi difficile de ſaiſir ces occaſions, quand les élémens du mouvement des Planetes nous ſont aſſez bien connus pour ſavoir dans quelles circonſtances on peut les ſoumettre à l'examen le plus avantageuſement. Il y a très longtems que le grand Newton a appris aux Aſtronomes une vraye Philoſophie, mais on n'a pas vû jusqu' ici que les Obſervateurs aient aſſez profité de ſes lumieres, & examiné toutes les conſéquences dans le mouvement des Planetes, qui découlent ſi naturellement de ſon ſyſteme. Dans la theorie de l'attraction Newtonienne il faut que tous les élémens dont dépend le mouvement des Planetes ſoient variables, le grand axe de leurs or-

bites & l'excentricité, la poſition du Perihelie & du Noeud, l'inclinaiſon à l'Ecliptique, le Tems periodique & le lieu de l'Aphelie, ſont ſujets à des changemens continuels. Or on m'avoüera que les découvertes qu'on a fait ſur ces ſujets ſont encore en très petit nombre, & même telles que les concluſions qu'on en a voulu tirer, ne s'accordent pas toujours enſemble. Le plus ſurprenant, c'eſt que les changemens mêmes qui doivent pareillement arriver à l'orbite que décrit la Terre autour du Soleil ne ſont pas encore déterminés. Quand on prend l'attraction dans le ſens que les Anglois lui donnent, les variations dont je viens de parler, doivent être plus ſenſibles, & par conſéquent plus ſuſceptibles de l'examen le plus rigoureux des Aſtronomes; mais quand la force qui dirige le cours curviligne des Planetes a ſes limites, & ne s'étend pas à l'infini, comme il eſt fort probable, ces changemens ſont plus lents & plus ſubtils; & ce n'eſt qu'après une ſuite d'Obſervations de longues années qu'on s'apperçevra de leur quantité avec une certitude ſuffiſante; & il me paroit, s'il n'y avoit point d'autre motif que celui qu'on n' obſerve pas ces dérangemens continuels dans le mouvement des Planetes, tels que la Theorie les demande, que c'eſt un argument aſſez fort pour modérer le ſyſteme Newtonien. Effectivement l attraction, telle qu'elle eſt propoſée par les Partiſans du grand Newton, comme une propriété eſſentielle des corps, révolte tant l'imagination, & elle eſt ſi contraire aux principes de la vraie Philoſophie, qu'on n'a qu' à examiner les premières régles des propriétés eſſentielles d'une choſe pour ſe convaincre du défaut de ce ſentiment bizarre. La propriété eſſentielle d'une choſe reſte dans toutes les circonſtances toujours la même; ſes actions ſe font toujours de la même maniere; par exemple, un homme transporté d'ici dans l'Amerique ſuivra dans ſes raiſonnemens les mêmes preceptes de la Logique; mais il n'en eſt pas ainſi des régles de l'attraction, la direction de la gravité eſt differente dans chaque Planete, & dans la même Planete qui a un mouvement rotatoire autour de ſon axe cette direction change à chaque inſtant. Les circonſtances de la gravité étant telles que je viens

de

de les indiquer, un Philoſophe ne peut rien en inferer, ſinon que la gravité n'eſt pas eſſentielle aux corps, mais que cette force eſt plutôt une violence exterieure, qui détourne continuellement les Planetes de leur mouvement rectiligne. Les Anglois qui ſont du ſentiment oppoſé, n'ont rien omis pour colorer leur ſyſtème; Mr. *Gregory*, le plus grand partiſan de cette opinion, en réfutant les tourbillons de Deſcartes, prétend que ſi la gravité n'étoit pas eſſentielle aux corps, & qu'elle fut produite par le mouvement d'une matiere ſubtile, le ſyſteme Planetaire devroit ſe diſperſer ſucceſſivement; car par le mouvement, dit-il, les corps ſe diſperſent peu à peu, & c'eſt pour quoi Dieu a donné aux corps un principe conſervatif, c'eſt à dire, la gravité. Mais c'eſt la Philoſophie des pareſſeux de recourir d'abord à la volonté de Dieu; la queſtion eſt, ſi la gravité eſt eſſentielle ou non, ſi l'idée du corps emporte cette force, ou non; ſi Dieu a doüé les corps d'une force que leur eſſence ne renferme pas. D'ailleurs, puisque Gregory admet la force d'inertie comme une propriété eſſentielle des corps, comment peut-il prétendre que la gravité, force tout à fait contraire à celle d'inertie, ſoit auſſi eſſentielle aux corps; deux propriétés diametralement oppoſées peuvent-elles ſubſiſter dans le même ſujet? L'inertie demande que le corps reſte toujours dans l'etat ou il eſt; & la gravité le fait changer continuellement d'etat. Quoiqu'il en ſoit on peut toujours admettre l'attraction mutuelle des corps celeſtes comme un phénomene bien fondé par les Obſervations; & cela étant, il faut que les Planetes ſe cauſent des dérangemens mutuels dans leur mouvement. Que l'axe de la Terre change de grandeur, c'eſt une verité presqu' inconteſtable de nos jours; car en comparant la quantité de l'année ſolaire qui ſe déduit des obſervations des Anciens avec celle que nous donnent les Obſervations modernes, on eſt obligé de reconnoitre une diminution dans le tems periodique de la Terre. Mr. Picard avoit déja remarqué en 1669. quelques anomalies dans les Diametres du Soleil; il en parle dans un Mémoire de la maniere ſuivante: *Enfin il ſeroit bon de prendre avec une attache particuliere les Diametres du*

Soleil pour tacher de découvrir la cauſe de certaines irrégularités qui ſe rencontrent dans la ſuite des Obſervations, d'autant qu'au dernier ſolſtice le Soleil a paru un peu plus grand qu'à celui qui l'avoit precedé, au lieu qu'actuellement le Diametre eſt plus petit de 4″ à 5″ qu'il n'etoit un an auparavant. L'excentricité de l'orbite terreſtre n'eſt pas moins variable; on n'a qu'a conſulter les Obſervations des Anciens, & l'on reconnoitra que l'equation du centre du Soleil a très ſenſiblement changé depuis leur tems. Je ne m'arrêterai pas à faire le recit de tous les petits mouvemens cauſés par l'attaction mutuelle des Planetes; il eſt aſſez connu, que les élémens des mouvemens de Saturne & de Jupiter ſont expoſés à des changemens continuels, & les autres Planetes ne ſont pas plus en repos, mais elles ſe diſputent, pour ainſi dire, continuellement l'une à l'autre leur Territoire. Si nous ne voulons pas aller ſi loin, on n'a qu'a examiner le mouvement de la Lune, & en peſer tout le détail; on ſera ſurpris du nombre des anomalies qui s'y rencontrent, & plus on perfectionnera l'Aſtronomie pratique, plus on y découvrira d'irrégularités. Après avoir expoſé au long qu'il y encore beaucoup de découvertes à faire dans le mouvement des Aſtres, il s'agit de trouver des moyens aſſez ſûrs pour parvenir à leur connoiſſance; il faut pour cela que l'Aſtronome imite le Phyſicien, qui attend jusqu'à ce que l'objet qu'il a à examiner ſoit, pour ainſi dire, dans ſa maturité, pour ſaiſir l'inſtant où il peut découvrir le plus qu'il eſt poſſible. Si les Aſtronomes qui nous fourniſſent des Obſervations du mouvement des Corps celeſtes ſuivoient toujours ces régles, & prenoient ces précautions, il eſt ſur que l'Aſtronomie en recevroit de nouveaux accroiſſemens & que nous parviendrions enfin à la connoiſſance de la vraie quantité des forces celeſtes. C'eſt pour cette fin que j'ai réſolu quelques Problemes, qui apprennent à l'Obſervateur à faire les plus avantageuſes opérations, & à profiter des plus belles occaſions pour réüſſir dans la connoiſſance des irrégularités qui ſe trouvent dans les mouvemens celeſtes.

LEMME

LEMME.

Soit APD *une Ellipſe, dont le grand axe* AD, *les foyers* S & H *la moitié du petit axe* BC, My *la tangente au point* P, SY & Hy *des lignes perpendiculaires à* My : *Je dis, que* $SY = \frac{BC.\sqrt{SP}}{\sqrt{(AD-SP)}}$.

SOLUTION.

A cauſe que les Triangles SPY & HP*y* ſont ſemblables, il ſera SP : SY = HP : Hy, donc $Hy = \frac{SY \times HP}{SP}$ & $SY \times Hy = \frac{SY^2 . HP}{SP} = BC^2$, mais $HP = AD - SP$, & partant $\frac{SY^2 \times AD-SP}{SP} = BC^2$ & $SY = \frac{BC\sqrt{SP}}{\sqrt{(AD-SP)}}$. Nommons $SP = x$, $AC = SB = a$, $\frac{SC}{AC} = e$, il ſera $BC = \sqrt{(SB^2 - SC^2)} = a\sqrt{(1-ee)}$ & le demi-parametre $= \frac{BC^2}{AC} = a(1-ee)$ & $SY = \frac{a\sqrt{x}(1-ee)}{\sqrt{(2a-x)}}$. Si $PSB = v$, nous avons dans le Triangle PSH les trois cotés donnés, $PS = x$, $SH = 2ea$, $PH = 2a-x$, & par conſéquent $\text{cof } v = \frac{SP^2 + SH^2 - PH^2}{2SP.\ HS.} = \frac{-a(1-ee)+x}{ex}$ & $x = \frac{a(1-ee)}{1-e\,\text{cof } v}$, x eſt donc le plus grand ou $\text{cof } v = 1$: donc la diſtance de l'aphelie au Soleil $x = \frac{a(1-ee)}{1-e} = a(1+e)$; ſi $\text{cof } v = -1$, la diſtance du perihelie ſera $x = \frac{a(1-ee)}{1+e} = a(1-e)$.

Si

Si l'angle SPM eſt nommé $= p$, il ſera ſin $p = \frac{SY}{PS} = \frac{BC}{\sqrt{(AD-SP)\,PS}} = a\sqrt{\frac{1-ee}{2ax-xx}}$ ou parce que $x = \frac{a(1-ee)}{1-e\ \text{cof}\,v}$ il ſera ſin $p = \frac{1-e\ \text{cof}\,v}{\sqrt{(1-2e\ \text{cof}\,v+ee)}}$ & tang $p = \frac{1-e\ \text{cof}\,v}{e\ \text{ſin}\,v}$ & par la meme ſubſtitution il ſera $SY = \frac{a(1-ee)}{\sqrt{(1-2e\ \text{cof}\,v+ee)}}$. Le Soleil étant donc en S, & la Planete ſe mouvant autour du Soleil dans ſon orbite de P en p décrira des aires proportionelles au tems: en nommant donc l'elément du tems dt, l'aire du Triangle elémentaire PSp ſera mdt, mais le meme Triangle étant $= \frac{1}{2}\,PS^2\,dv = \frac{1}{2}\,x^2\,dv$, & parce que $x = \frac{a(1-ee)}{1-e\ \text{cof}\,v}$ il ſera $dv = -\frac{a(1-ee)\,dx}{ex^2\ \text{ſin}\,v}$ & ſin $v = \frac{\sqrt{2ax(1-ee)-x^2\ (1-ee)-a^2\ (1-ee)^2}}{ex}$ il ſera $dv = -\frac{a\,dx\sqrt{1-ee}}{x\sqrt{2ax-x^2-a^2\,(1-ee)}}$ & l'aire du Triangle élémentaire $PSp = mdt = -\frac{ax\,dx\sqrt{(1-ee)}}{2\sqrt{\left(2ax-x^2-a^2\,(1-ee)\right)}}$.

PROBLEME.

Trouver le point de l'orbite de la Planete où le changement de ſon Diametre eſt le plus grand.

SOLUTION.

Soit la Planete en P, & qu'elle ſe meuve dans un tems infiniment petit de P en p, & comme elle décrit autour du Soleil des aires proportionelles au tems, le petit Triangle PSp ſera mdt, mais l'airê du même

même Triangle $PSp = \frac{1}{2} PS.\ Pp.\ \text{fin}\ p$, nous aurons $Pp = \frac{2\,m\,dt}{x\ \text{fin}\ p}$ & $dx = \frac{2\,m\,dt}{x\ \text{tang}\ p}$, il faut donc trouver le point de l'orbite ou $ddx = 0$. En differentiant nous aurons $ddx = -\frac{2\,m\,dt}{x^2}\left(\frac{dx}{\text{tang}\ p} + \frac{x\,dp}{\text{fin}\ p^2}\right)$ & partant $dx + \frac{x\,dp}{\text{cof}\ p.\text{fin}.p.} = 0$, mais $\text{fin}\ p = a\sqrt{\left(\frac{1-ee}{2ax-x^2}\right)}$ donc $dp.\ \text{cof}\ p = \frac{(x\,dx - a\,dx)\ a\sqrt{1-ee}}{(2\,a\,x - x\,x)^{\frac{3}{2}}}$ & $dp = \frac{(x\,dx - a\,dx)\ a\sqrt{1-ee}}{\text{cof}\ p\ (2\,a\,x - x\,x)^{\frac{3}{2}}}$ & ſubſtituant cette valeur de dp dans notre équation fondamentale nous aurons $dx + \frac{a\,x\,dx\,(x-a)\sqrt{1-ee}}{\text{cof}\ p^2\ \text{fin}\ p\ (2\,a\,x - x\,x)^{\frac{3}{2}}} = 0$ ou $1 + \frac{x\,(x-a)}{\text{cof}\ p^2\ (2\,a\,x - x^2)}$ mais $\text{fin}\ p^2 = \frac{a^2\,(1-ee)}{2\,a\,x - x\,x}$ & $\text{cof}\ p^2 = \frac{2\,a\,x - x^2 - a^2\,(1-ee)^2}{2\,a\,x - x^2}$, donc nous aurons $2\,a\,x - x^2 - a^2\,(1-ee) + x\,(x-a) = 0$ & $x = a\,(1-ee) =$ à la moitié du parametre; & parce que $x = \frac{a\,(1-ee)}{1 - e\ \text{cof}\ v}$ nous aurons $a\,(1-ee) = \frac{a\,(1-ee)}{1 - e\ \text{cof}\ v}$: donc $\text{cof}\ v = 0$ & $v = 90°$ ou $270°$.

PROBLEME.

Trouver le point de l'orbite de la Planete, où le changement de ſon anomalie vraie eſt le plus grand.

SOLUTION.

Puisque $x = \frac{a\,(1-ee)}{1 - e\ \text{cof}\ v}$ il ſera $e\ \text{fin}\ v\,dv = -\frac{a\,(1-ee)\,dx}{x^2}$

par conſéquent $e \sin v\, dd v + e \operatorname{cof} v\, dv^2 = -\frac{a(1-ee)\,dd x}{x^2} + \frac{2a(1-ee)\,dx^2}{x^3}$, & mettant $ddv = 0$ nous aurons $\frac{e \operatorname{cof} v\, dv^2}{a(1-ee)} = \frac{2dx^2}{x^3} - \frac{dd x}{x^2}$ mais $dd x$ étant $= -\frac{2m dt}{x^2}\left(\frac{dx}{\operatorname{tang} p} + \frac{x\,dp}{\sin p^2}\right)$ & $m dt = -\frac{-ax\,dx\sqrt{1-ee}}{2\sqrt{(2ax-x^2-a^2(1-ee))}}$ & $\operatorname{tang} p = \frac{a\sqrt{1-ee}}{\sqrt{(2ax-x^2-a^2(1-ee))}}$ on aura $dd x = \frac{a\,dx^2 - x\,dx^2}{2ax-x^2-a^2(1-ee)} - \frac{dx^2}{x}$ ſubſtituant cette valeur de $dd x$ & celle de $\operatorname{cof} v$ nous aurons enfin $ax - a^2(1-ee) = 6ax - 3x^2 - 3a^2(1-ee) + x^2 - ax$ & $x = (1+e)a$, & $\operatorname{cof} v = 1$ ou $v = 0°$ ou $180°$.

PROBLEME.

Trouver le point de l'orbite de la Planete, où le changement de ſa viteſſe eſt le plus grand.

SOLUTION.

Si les tems ſont égaux la viteſſe eſt comme l'eſpace parcouru, par conſéquent la velocité de la Planete ſera exprimée par Pp ou par $\frac{m\,dt}{x \sin p}$ & partant proportionelle à $\frac{\sqrt{2a-x}}{a\sqrt{x(1-ee)}}$, & ſon differentiel ſera $= -\frac{a\,dx\sqrt{(x(1-ee))}}{2a^2x(1-ee)\sqrt{(2a-x)}} - \frac{a\,dx\sqrt{(1-ee)}(2a-x)}{2a^2x(1-ee)\sqrt{x}} = \frac{dx}{x\sqrt{(1-ee)(2ax-x^2)}}$ & le ſecond differentiel doit être égalé à zero ou $dd x = \frac{(3a-2x)\,dx^2}{2ax-xx}$ mais $dd x$ étant $\frac{a\,dx^2 - x\,dx^2}{2ax-x^2-a^2(1-ee)} - \frac{dx^2}{x}$

il

il y aura $\frac{(3a-2x)dx^2}{2ax-xx} = \frac{adx^2-xdx^2}{2ax-xx-aa(1-ee)} - \frac{dx^2}{x}$ & réduiſant cette équation nous obtiendrons $x^3 - 4ax^2 + 4a^2x + \frac{3}{2}a^2(1-ee)x - \frac{1}{2}a^3(1-ee) = 0$ dont les racines indiqueront la diſtance de la Planete au Soleil, où le changement mentionné ſera le plus grand.

PROBLEME.

Trouver le point de l'orbite de la Planete, où l'équation du centre eſt la plus grande.

SOLUTION.

L'incrément de l'anomalie moyenne étant $= \frac{2PSp}{a.BC}$ $= -\frac{x\,dx}{a.\sqrt{2ax-x^2-a^2(1-ee)}}$ & l'incrément de l'anomalie vraie $= dv = -\frac{adx\sqrt{(1-ee)}}{x\sqrt{2ax-x^2-a^2(1-ee)}}$ par conſéquent $\frac{x}{a} = \frac{a\sqrt{1-ee}}{x}$, & $x = a\sqrt[4]{(1-ee)}$ & $\cos v. = \frac{1-\sqrt[4]{(1-ee)^3}}{e}$

PROBLEME.

Trouver le point de l'orbite de la Planete, où le changement de ſa viteſſe angulaire eſt le plus grand.

SOLUTION.

La viteſſe angulaire eſt exprimée par $\frac{dv}{dt} =$

$\frac{-a(1-ee)dx}{ex^2 \sin v} : \frac{x\,dx \times e \cos v - 1}{2\sqrt{a(1-ee)}.\ e \sin v}$ ou $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{x\ x}$

dont le differentio-differentiel doit être égalé à zero, & partant ddx

$= \frac{3\,d\,x^2}{x} = \frac{a\,dx^2 - x\,dx^2}{2ax - x^2 - a^2\,(1-ee)} - \frac{dx^2}{x}$ ou $\frac{4}{x}$

$= \frac{a-x}{2ax - x\,x - a\,a\,(1-ee)}$ & enfin $x^2 - \frac{7}{3}\,a\,x = -\frac{4}{3}$

$a^2\,(1-ee)$ & $x = \frac{1}{6}\,a\,(7 \pm \sqrt{(1+4\,8\,ee)})$ & $\cos v$

$= \frac{1+6\,ee+\sqrt{1+48\,ee}}{e(7+\sqrt{(1+48\,ee)})}$. Si e eſt une fraction fort petite, alors $\sqrt{(1+48\,ee)} = 1+24\,e^2$ & il ſera alors $x = a$

$(1-4\,e^2)$ ou $x = 4\,a\,(\frac{1}{3}+ee)$

PROBLEME.

Si la Planete a un mouvement rotatoire autour de ſon axe, trouver le point de ſon orbite, où l'équation du tems eſt la plus grande ſur cette Planete.

SOLUTION.

Nommons l'obliquité de l'orbite à l'équateur e, l'excentricité de l'orbite $= e$, la longitude de l'aphelie $= \alpha$, l'anomalie vraie du Soleil $= v$, ſa longitude moyenne $= z$, ſon aſcenſion droite vraie $= y$, on aura donc l'équation du tems $= y - z$, & ou l'équation eſt la plus grande $dy = dz$. Puisque tang $y = \cos e$ tang $(\alpha + v)$ & $dy = \frac{dv.\ \cos e}{1 - \sin e^2.\ \sin^2(\alpha+v)}$ & $dz =$ à l'incrément de l'anomalie moyenne, nous aurons donc $\frac{\cos e}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 - \sin e^2\ \sin^2(\alpha+v)}{(1-e\cos v)^2}$

poſons

posons $\frac{\cos\varepsilon}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}} = \delta$, & il sera $\frac{1-\delta(1-e\cos v)^2}{\overline{\sin\varepsilon}^2} = \overline{\sin\alpha+v}^2$

$$= \frac{1-\cos(2\alpha+2v)}{2} = \frac{1-\cos 2\alpha(2\cos v^2-1)+2\sin 2\alpha.\sin v.\cos v}{2};$$

$$1-\delta+2e\delta\cos v-\delta e^2\cos v^2+\cos 2\alpha\,\overline{\sin\varepsilon}^2\cos v^2-\overline{\sin\varepsilon}^2\cos\alpha^2$$
$$= \sin\varepsilon^2\sin 2\alpha\cos v\sqrt{(1-\cos v^2)};$$

$$\cos v^2(\cos 2\alpha\sin\varepsilon^2-\delta e^2)+2e\delta\cos v+1-\delta-\overline{\sin\varepsilon}^2\cos\alpha^2$$
$$= \sin\varepsilon^2\sin 2\alpha\cos v\sqrt{(1-\cos v^2)};$$

$$\cos v^4(\cos 2\alpha\sin\varepsilon^2-\delta e^2)^2+4e\delta\cos v^3(\cos 2\alpha\sin\varepsilon^2-\delta e^2)$$
$$+2\cos v^2(1-\delta-\sin\varepsilon^2\cos\alpha^2)(\cos 2\alpha.\sin\varepsilon^2-\delta e^2)$$
$$+4e^2\delta^2\cos v^2$$
$$+4e\delta\cos v(1-\delta-\sin\varepsilon^2\cos\alpha^2)+(1-\delta-\sin\varepsilon^2\cos\alpha^2)^2$$
$$= \sin\varepsilon^4\sin 2\alpha^2\cos v^2-\sin\varepsilon^4\sin 2\alpha^2\cos v^4;$$

$$\text{ou } \cos v^4+\cos v^3\frac{(\cos 2\alpha\sin\varepsilon^2-\delta e^2)(4e\delta)}{\delta^2e^4-2\delta e^2\cos 2\alpha\sin\varepsilon^2+\sin\varepsilon^4}$$
$$+\cos v^2\left[\frac{(1-\delta-\sin\varepsilon^2\cos\alpha^2)(2\cos 2\alpha\sin\varepsilon^2-2\delta e^2)+(2e\delta+\sin\varepsilon^2\sin 2\alpha)(2e\delta-\sin\varepsilon\sin 2\alpha)}{\delta^2e^4-2\delta e^2\cos 2\alpha\sin\varepsilon^2+\sin\varepsilon^4}\right]$$
$$+\frac{\cos v(1-\delta-\sin\varepsilon^2\cos\alpha^2)(4e\delta)}{\delta^2e^4-2\delta e^2\cos 2\alpha\sin\varepsilon^2+\sin\varepsilon^4}+\frac{(1-\delta-\sin\varepsilon^2\cos\alpha^2)^2}{\delta^2e^4-2\delta e^2\cos 2\alpha\sin\varepsilon^2+\sin\varepsilon^4}=0$$

Les racines de cette équation indiqueront l'anomalie vraie où l'équation du tems eſt la plus grande

PROBLEME.

Trouver le point de l'orbite, où le changement de l'équation du tems eſt le plus grand.

SOLUTION.

A' cauſe que $dy = \frac{dv.\ \text{cof}\,\varepsilon}{1-\text{ſin}\,\varepsilon^2\,\text{ſin}\,\overline{\alpha+v}^2}$ nous aurons en mettant $ddy = 0$

$1-\text{ſin}\,\varepsilon^2\,\text{ſin}\,\overline{\alpha+v}^2\,ddv + 2\,\text{ſin}\,\varepsilon\,\text{ſin}\,e\,\text{ſin}\,\overline{\alpha+v}.\text{cof}\,\overline{\alpha+v}.dv.dv = 0$,

mais $dv = \frac{(1-e\,\text{cof}\,v)^2}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}}\,dz$ donc mettant dz conſtant on trouvera

$ddv = \frac{2e\,dv.\,\text{ſin}\,v\,(1-e\,\text{cof}\,v)}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}}\,dz = \frac{2e\,\text{ſin}\,v\,dv^2}{1-e\,\text{cof}\,v}$ & en mettant cette valeur de ddx nous aurons $\frac{(1-\text{ſin}\,\varepsilon^2\,\text{ſin}\,\overline{\alpha+v}^2)\,e\,\text{ſin}\,v}{1-e\,\text{cof}\,v}$

$+\,\text{ſin}\,\varepsilon^2\,\text{ſin}\,(\alpha+v)\,\text{cof}\,(\alpha+v)$, & partant $\frac{e}{\text{ſin}\ \varepsilon^2}$

$= \frac{\frac{1}{2}\text{ſin}^2(2\alpha+2v)\ \ (e\,\text{cof}\,v-1)}{1-\text{ſin}\,\varepsilon^2\,\text{ſin}\,\overline{\alpha+v}^2\,\text{ſin}\,v}$, cette équation réſoluë eſt du ſixieme degré, & marque que l'incrément de l'équation du tems eſt dans ſix points le plus grand, ſi toutes les racines ſont réelles.

SUR

SUR LES ECLIPSES DES ETOILES FIXES PAR LA LUNE,

PAR M. KIES.

Si l'on conſidere quels grands & rapides progrés l'Aſtronomie a fait depuis un Siecle, les Inſtrumens d'Aſtronomie étant parvenus à un très haut point d'exactitude, & la Théorie ayant été perfectionnée avec tant de ſuccés, on ſera ſurpris peut-être d'entendre dire, que les meilleures Tables de la Lune, de cet Aſtre ſi voiſin de la terre, different encore très conſidérablement des Obſervations, de maniere qu'il n'y a aucun Aſtre au Ciel, qui ſoit moins connu que la Lune. Quelque paradoxe que pourroit paroitre ce phenomene, on ceſſera de s'en étonner, ſi l'on fait attention à la délicateſſe des Obſervations de la Lune, parce que pour déterminer ſon lieu au Ciel il y entre toujours quelques élémens de Théorie qui ne ſont pas encore déterminés à toute rigueur ; & d'ailleurs le mouvement de la Lune, auſſi compliqué qu'il l'eſt, demande tant de fineſſe pour déméler tous les differens élémens qui y concourent, que je ne crois pas de dire trop quand je ſoutiens, que la Théorie du mouvement de la Lune eſt le plus haut point où la connoiſſance humaine puiſſe parvenir. C'eſt dommage que les anciens Aſtronomes,

mes, qui ſe ſont appliqués à obſerver les mouvemens de la Lune, ne nous ont pas laiſſé leurs Obſervations mêmes, & ne nous ont communiqué que le réſultat de leurs travaux. D'ailleurs leur maniere d'obſerver les Aſtres au moyen des armilles, & celle de *Tycho-Brahè* par la diſtance aux Etoiles fixes, eſt ſi ſujette à caution, que leurs concluſions mêmes ne nous ſont pas trop utiles. *Tycho-Brahè* a fait un très grand nombre d'Obſervations de la Lune en meſurant ſa diſtance à quelques étoiles fixes, mais ces diſtances n'ont presque jamais été priſes en même tems ; & quoique cet illuſtre Auteur ait eu égard dans ſes concluſions au mouvement propre de la Lune pendant le tems écoulé, on conviendra pourtant aiſément que la Théorie de la Lune étant inconnuë, cette maniere eſt trop douteuſe. Je paſſe ſous ſilence, que le plus grand défaut dans leurs Obſervations étoit l'imperfection de leurs inſtrumens, leurs quarts de cercle n'étoient garnis que de pinules ; & ceux qui ſont exercés dans la pratique de l'Aſtronomie, conviendront avec moi que ces ſortes des machines ne ſont pas propres pour pointer avec une médiocre préciſion ; pour les lunettes, la pendule & le micrometre, ſources ſi excellentes de l'Aſtronomie moderne, tout cela leur étoit tout-à fait inconnu. Quand on examine encore avec un peu de ſoin les concluſions des Obſervations qu'ils nous ont laiſſées, il y a quantité d'élémens qui leur manquoient, & qui rendent leurs réſultats incertains & même faux ; car en comparant la Lune avec des Etoiles fixes, ils ignoroient ſi profondément, & les vrais lieux de ces Etoiles, & l'effet de la réfraction des rayons de lumiere dans l'Atmoſphere, & la parallaxe de la Lune, qu'il n'eſt presque pas poſſible de ſe ſervir de leurs concluſions.

Quelquefois, mais rarement, les Anciens ont conclu le lieu de la Lune par ſa comparaiſon avec le Soleil ; mais il eſt connu quelles fautes groſſieres ils ont encore commis outre les precedentes, dans la détermination de la parallaxe du Soleil qu'ils ont poſée beaucoup plus grande, qu'elle n'eſt effectivement. Les meilleures Obſervations

des

des Anciens pour déterminer le lieu de la Lune, ſont les Eclipſes de Soleil de Lune & des Etoiles fixes par la Lune ; & ſi nous pouvions faire grand fonds ſur le tems de l'Obſervation, leurs travaux nous mettroient bien en état de débrouïller beaucoup d'élémens dans le mouvement de la Lune que nous ne connoiſſons encore que fort imparfaitement. En effet les occultations des Etoiles par la Lune, dont l'Obſervation eſt ſi facile à faire, donnent une grande préciſion pour fixer les mouvemens de cet Aſtre : & il y a d'habiles Aſtronomes aujour d'hui qui preférent ces Obſervations presqu' à toutes les autres qu'on peut faire ; & même ils emploient les occultations quand il s'agit de déterminer avec une grande préciſion la difference de longitude de deux lieux. Les Eclipſes des Satellites de Jupiter depuis leur découverte ont presque été toujours en poſſeſſion de cet emploi, mais à preſent ce ſont les Eclipſes des Etoiles par la Lune qui ont pris leur place ; & il faut av « ër que pour peu qu'on s'applique aux Obſervations des Eclipſes des Satellites de Jupiter, on connoitra le peu d'exactitude qu'on en peut retirer, ces Satellites aiant une ſi foible lumiere, l'Obſervation de leurs Eclipſes dépend trop de la bonne vüe de l'Aſtronome, & de la bonté des Lunettes qu'il emploie. D'ailleurs une petite altération dans l'Atmoſphere rend inutile tout le travail, au lieu que les Eclipſes des Etoiles fixes par la Lune, qui ont une lumiere plus vive, ſur tout celles de la premiere grandeur, ſont veritablement inſtantanées, & tous les Obſervateurs dans un même endroit ne differeront jamais d'une $\frac{1}{2}$ ſeconde dans le tems, de quelques-lunettes qu'ils ſe ſervent pour cela ; & ſouvent on n'a pas même beſoin de ce ſecours ; quand c'eſt un Aſtre brillant qui va être eclipſé, l'Obſervation ſe fait à la vuë ſimple.

Ayant aſſez expoſé le grand avantage qu'on retire des Eclipſes des Etoiles fixes par la Lune, j'ai l'honneur de préſenter à l'Academie quelques Obſervations ſur ce ſujet, que j'ai faites avec toute l'exactitude, dont je ſuis capable. Je mettrai ici les Obſervations telles que

je les ai faites. Les hauteurs du Soleil ont été priſes avec le quart de cercle de Mr. *de Maupertuis*.

Hauteurs du bord ſuperieur du Soleil	1749 Mars 22j *avant midi*	*après midi*
25° 0′	8ʰ 52′ 38″	3ʰ 16′ 52″
25 30	8 56 40	12 51
26 0	9 0 47	8 44
26 30	9 4 56	4 34
27 0	9 9 10	0 21

Midi conclu par ces Obſervations 12ʰ 4′ 45″½, & à cauſe du changement du Soleil en déclinaiſon le midi vrai eſt arrivé à 12ʰ 4′ 23″

Le même jour 22 & le ſuivant 23 j'ai obſervé le paſſage du Soleil par la ligne meridienne, & j'en ai connu, que le mouvement de la pendule répondoit exactement au mouvement moyen du Soleil.

L'Obſervation de l'eclipſe des Pleïades par la Lune eſt telle ſelon l'ordre du tems

22 Mars tems de la pendule		tems moyen
1) immerſ. à 7ʰ 37′ 13″	═══	7ʰ 39′ 50″
2) —— — 39 42		42 19
3) —— — 8 16 41		8 19 18
4) —— — 21 21		23 58
5) —— — 27 3		29 40

à Paris on a obſervè l'immerſion d'*Atlas* à 7ʰ 31′ 37″½ & celle de *Pleïone* à 7ʰ 31′ 50″ tems vrai. Diametre apparent de la Lune à 45½° de hauteur de 32′ 6″ où 6½″

L'autre Obſervation que j'ai faite eſt celle de l'occultation d'*Antares* par la Lune,

Hau-

Hauteurs du bord ſuperieur du Soleil.	1749. Avr. 5j. *avant midi*	*aprés midi*
30° 30′	8ʰ 54′ 43″	3ʰ 5′ 48″
32 0	9 6 46	2 53 45
33 0	9 15 6	2 45 25

midi à 12ʰ 0′ 15½″ & à cauſe du changement du Soleil en declinaiſon à 11 59 56½

Hauteurs du bord ſuperieur du Soleil.	1749. *Avr.* 7I. *avant midi*	*aprés midi*
30° 30′	8ʰ 48′ 56″	3ʰ 10′ 2″
31 0	52 47	6 11
31 30	56 42	2 15
32 0	9 0 41	
32 30	4 42	2 54 14
33 0	8 51	50 6
33 30	12 55	46 1
34 0	17 5	
34 30	21 23	37 34
35 0	25 41	
35 30	30 11	28 46
36 0	34 36	24 21

midi à 11ʰ 59′ 28″½ & à cauſe du changement du Soleil en déclinaiſon à 11 59 9

1749. Avril 6j. à $14^h\ 5'\ 40''$ du tems de la pendule *Antares* à été eclipſé par la Lune, & à $15^h\ 12'\ 15''$ il a de nouveau paru, & réduiſant le tems de la pendule au tems vrai & apparent l'immerſion d'*Antares* eſt arrivée

1749. Avril 6j.	14^h	$6'$	$19''$	tems vrai
l'emerſion à	15	12	54	
la durée =	1	6	35	

En comparant donc ces Obſervations avec les plus fameuſes Tables de la Lune de Mr. *Flamſteed*, publiées par Mr. *le Monnier* dans ſes *Inſtitutions d'Aſtronomie*, avec celles de Mr. *Dunthorne*, & avec les nouvelles Tables de Mr. *Euler*, qui viennent d'être inſerées dans notre Almanac pour l'année 1750, je trouve par un long & pénible calcul, que

Les Tables de *Flamſteed* different pour l'occultation d'*Antares*	pour l'immerſion	$4'$	$23''$	—
	émerſion	5	17	—
celles de Mr. *Dunthorne*	pour l'immerſion	$3'$	$47''$	—
	émerſion	4	30	—
celles de Mr. *Euler*	pour l'immerſion	4	52	—
	émerſion	5	32	—

Le 12. d'Aout 1750.
Immerſion de θ du *Serpentaire* dans la partie obſcure de la Lune à $8^h\ 3'\ 36''$ de la Pendule
Emerſion — — de la partie éclairée à $9^h\ 4'\ 3\frac{1}{2}''$.

Hauteurs

Hauteurs correſpondantes du Soleil priſes le 13. d'Aout pour la correction de la pendule

Tems à la Pendule avant Midi	*Hauteurs du bord inf. du Soleil*	*Tems à la Pendule après Midi*	*Midi vrai conclu*
8h 57′ 20″	37° 0′	3h 10′ 36″½	0h 4′ 12″⅝
59 47	37 20	8 7	4 11½
9 0 38	au fil mobile	7 15½	4 11½
2 17	37 40	— —	— —
3 7½	au fil mobile	4 47	4 11¾
4 49	38 0	3 2	— —
5 39½	au fil mobile	2 16	4 12⅜
7 23½	38 20	0 34½	4 13
8 14½	au fil mobile	2 59 43	4 13
9 53¾	38 40	58 3¾	4 12¾
10 46	au fil mobile	57 9½	4 12
12 30	39 0	55 25	4 11⅔

Donc par un milieu Midi vrai à la Pendule le 13. d'Aout à 0h 4′ 12″¼.

Midi obſervé le même jour à la meridienne 0h 4′ 16″
— — le 15 d'Aout à la meridienne 0 5 38
— — le 18 — — — 0 7 46

d'où l'on tire

l'Immerſion de θ du *Serpentaire* le 12. d'Aout à 7h 59′ 51″ de tems vrai
& l'émerſion — — — — — 9 0 14¼.

MEMOIRE, DANS LEQUEL ON EXAMINE, SI L'ON PEUT ESPERER LA MEME PRE'CISION DANS LA DÉTERMINATION DES LONGITUDES DES OBSERVATIONS DES OCCULTATIONS DES ETOILES FIXES PAR LA LUNE, OU DES DISTANCES DE CETTE PLANETE AUX ETOILES FIXES, QUE DES ECLIPSES DES SATELLITES DE JUPITER,

PAR M. CASSINI DE THURY.

Autant qu'il eſt avantageux pour les Sciences, que l'on imagine differentes methodes pour parvenir aux mêmes connoiſſances; autant il eſt important pour les Savans, de connoître le degré de préciſion que l'on peut eſperer de chaque Methode en particulier, & les avantages qu'elles ont les unes ſur les autres, ſelon les différens cas où on les employe. La connoiſſance des longitudes, tant ſur terre, que ſur mer, a toujours été l'objet des recherches des Sçavans de toute l'Europe. Combien de methodes différentes ont été propoſées? Combien de tentatives infructueuſes; combien de machines ont été imaginées? Ce n'eſt que depuis l'invention des Lunettes, & la découverte des Satellites de Jupiter, que l'on a eu un moyen ſur & exact pour connoître les longitudes.

Je ne pourrois rappeller ici, ſans répeter tout ce qui a été ſuffiſamment expliqué par mon grand-pére, tous les avantages que l'on peut retirer des obſervations des Eclipſes des Satellites de Jupiter, toutes

toutes les experiences qui ont été faites de concert par differens Aſtronomes, pour reconnoître avec quelle exactitude l'on pourroit déterminer les inſtans des immerſions & emerſions de ces Satellites, quelles étoient les Lunettes les plus propres pour mieux diſcerner ces phaſes, tous les Voyages qui ont été entrepris par ordre du Roi, pour réformer la Géographie du Royaume en ſuivant cette Methode; il ſuffit de parcourir tous les Mémoires de l'Academie pour voir que cette Methode a été adoptée, & employée avec beaucoup de ſuccés par tous les Aſtronomes de l'Europe.

Comme l'objet de ce Mémoire n'eſt point ſeulement de faire ſentir tous les avantages de cette Méthode, dont tout le monde convient mais auſſi d'examiner le point de préciſion qu'elle peut donner dans la détermination des Longitudes, nous allons entrer dans quelque détail des Expériences qui ont été faites à ce ſujet, & de leurs réſultats.

Quoique l'on découvre trés diſtinctement avec une Lunette de trois pieds les Satellites de Jupiter, l'on ne ſauroit cependant employer de trop grandes & de trop bonnes Lunettes lorsqu'il s'agira de déterminer le moment précis où un Satellite commence à ſortir de l'ombre ou à y entrer; & après pluſieurs expériences faites dans le même lieu par des Aſtronomes exercés, l'on a reconnu qu'il étoit facile d'eſtimer les phaſes à un quart de minute près, en employant des Lunettes de 15 pieds de longueur, & que ſouvent même les differences dans l'eſtime étoient fort au deſſous de cette quantité. Or il eſt à remarquer que pour la détermination des longitudes, il n'eſt point néceſſaire que les deux Obſervateurs ſaiſiſſent préciſément le moment de l'apparition ou diſparition du Satellite, il ſuffit qu'ils le voyent paroître, ou diſparoître dans le même inſtant; & c'eſt ce qui doit arriver, lorsque l'on employe des Lunettes d'une égale bonté & de la même grandeur. Ainſi les mêmes Obſervateurs pourroient avec une Lunette de ſix à ſept pieds

piéds (*) déterminer les différences de longitude avec à peu-près la même préciſion, que s'ils avoient employé de plus grandes Lunettes.

Il n'en ſera pas de même, ſi au défaut d'un ſecond Obſervateur l'on eſt obligé d'employer les Tables des mouvemens des Satellites pour calculer pour un lieu connu le tems de leurs Eclipſes. Le Calcul, ſi les Tables ſont exactes doit donner le moment vrai de l'immerſion ou émerſion, & non pas l'apparent, celui où on l'apperçoit, ou qu'on le perd de vuë. Mais il me ſemble qu'il eſt fort aiſé de remedier à cet inconvénient en tenant compte de la quantité de tems que doit produire la différente grandeur des Lunettes, que l'on détermine très exactement par un grand nombre d'obſervations faites dans le même lieu avec les Lunettes de comparaiſon. L'on ſçait par exemple, par les experiences que mon grand-père a faites, que d'une Lunette de 10. pieds à une de 16. la différence eſt de 30″ de tems. On pourroit ainſi ſe régler pour des longueurs différentes.

A l'egard de la préciſion que l'on peut attendre des Tables, & des Obſervations, Mr. *Maraldi* a rapporté dans un Mémoire qu'il a lû à l'Académie en 1748, que parmi un grand nombre d'Obſervations des Eclipſes du premier ſatellite de Jupiter, qu'il a examiné, rarement il a trouvé une différence de plus d'une minute entre les obſervations & le calcul tiré des Tables de Mr. *Wargentin*. Cette préciſion, qui eſt au delà de tout ce qu'on pouvoit eſpérer, donne un nouvel avantage à l'uſage des Eclipſes des ſatellites de Jupiter pour la détermination des longitudes. L'on verra dans la ſuite ces conjectures fondées ſur de nouvelles expériences.

Pour ce qui concerne l'exactitude que comportent ces Obſervations, c'eſt à l'expérience plûtôt qu'aux raiſonnemens que l'on doit s'en rappor-

(*) En 1720. on a fait des Expériences pour reconnoître l'avantage qu'avoit une Lunette de Campani de 15. pieds ſur une Lunette de ſix pieds ; & dans une Obſervation la difference n'etoit que de 30″.

rapporter. Nous avons eu occaſion, au moyen des grands Triangles formés dans toute l'etenduë de la France, de déterminer la poſition des principales Villes du Royaume, où l'on avoit déja fait des Obſervations Aſtronomiques pour établir leur longitude & latitude, & nous avons eu la ſatisfaction de voir que les longitudes, à l'exception de celle de St. *Malo*, étoient auſſi exactement connuës, qu'il etoit permis de l'eſperer, & que les differences n'excédoient point un quart de minute: je les rapporte ici * pour que l'on puiſſe voir d'un coup d'oeil les differences que l'on y remarque;

* Voy. les Voyages de M.M. de l'Academie.

	Selon les Satellites				*Selon les Triangles dans la ſuppoſition*		
Montpellier	0	6	10		0	6	10
Breſt	0	27	36		0	27	20
St. Malo	0	18	0		0	17	29
Calais	0	2	10		0	1	56
Antibes	0	19	11		0	19	14
Toulon	0	14	22		0	14	26
Nantes	0	15	30		0	15	36

de la terre Sphérique.

Je n'ai point eu egard à l'applatiſſement de la Terre dans le calcul des longitudes déduites de nos Triangles, parce qu'il ne doit produire qu'une trés petite correction, lorsque la difference des longitudes n'eſt que d'un ou deux degrés.

Quoique les obſervations des Eclipſes des Satellites de Jupiter ſoyent fort fréquentes, puisqu'il en arrive ordinairement tous les ans plus de * 1300, il n'eſt pas cependant poſſible de faire uſage de cette Methode pendant deux mois de l'année, lorsque Jupiter eſt en conjonction avec le Soleil. Il faut donc avoir recours aux autres phenomenes qui arrivent dans le Ciel. Les Eclipſes de Lune arrivent trop rarement pour que l'on puiſſe en tirer beaucoup d'avantage; & d'ailleurs on ne diſtingue point les phaſes avec aſſez d'exactitude. Celles

* Tom. X. p. 625.

du Soleil ſont auſſi rares, les occultations des Etoiles fixes par la Lune ſont plus fréquentes; & à leur défaut, on a penſé que l'on pourroit en meſurant la diſtance de la Lune aux Etoiles fixes, déterminer les longitudes avec une grande préciſion. Ce ſont ces deux Methodes que je me ſuis propoſé principalement d'examiner.

Pour déduire la différence des Méridiens d'une occultation d'une Etoile fixe par la Lune obſervée dans deux lieux différens: Voici en peu de mots tous les élémens que ce calcul exige.

* Voy. 1705. Il faut connoître premiérement, * la latitude des lieux où l'on a fait les obſervations correſpondantes, ſecondement la parallaxe de la Lune, troiſiémement l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de la Lune, en quatrième lieu l'inclinaiſon de ſon orbite & ſon mouvement horaire, en cinquième lieu ſon diametre horizontal, & en ſixième lieu la déclinaiſon de l'Etoile & l'heure de ſon paſſage au méridien d'un des lieux connus.

Ces élémens ſuppoſés connus, l'on ne ſauroit ſe diſpenſer de conſtruire une figure pour trouver à peu-près la difference des Méridiens, & lorque l'on a trouvé par la figure, on par le calcul, que le tems de la durée de l'eclipſe, eſt plus grand on plus petit que celui qui a été obſervé, l'on a une preuve certaine, que la trace de la Lune n'eſt pas exactement décrite, on ce qui revient au même, que les élémens que l'on a employé ne ſont pas exacts. Il faut donc la corriger, & ſouvent arbitrairement lorsque l'on manque d'obſervations pour reconnoître dans le grand nombre d'élémens que l'on employe, celui où eſt l'erreur. L'on ſent aſſez combien il eſt important pour cette recherche que l'on ait obſervé les deux phaſes de ces Eclipſes, ſçavoir l'immerſion & l'emerſion de l'Etoile, & combien il ſeroit à déſirer que l'on pût par des Obſervations faites le même jour, ſoit du paſſage de la Lune au Meridien, ſoit de ſa diſtance aux Etoiles fixes, conclure ſon vrai lieu ſans emprunter des Tables une grande partie des élémens neceſſaires pour le calcul.

Au

Au défaut d'occultation des Etoiles fixes par la Lune, l'on a propoſé une autre methode qui ſuppoſe que l'on obſerve ſur la terre, ou ſur mer, le Triangle formé par la Lune & deux Etoiles; & au cas que l'on n'ait point d'obſervations correſpondantes, que l'on calcule par le moyen des Tables à quelle heure dans un lieu connu, ou d'où l'on eſt parti, la Lune forme avec les deux mêmes Etoiles le Triangle tel qu'on l'a obſervé.

Nous ferons remarquer d'abord, qu' excepté le tems de la pleïne Lune (*) l'on ne peut déterminer directement la diſtance de deux Etoiles au centre de la Lune, ou les deux côtés du Triangle ſuppoſés: il eſt vrai que l'on trouve par le calcul la réduction qu'il faut faire à la diſtance de l'Etoile au bord apparent de la Lune pour avoir le centre, mais cette réduction ſuppoſe du calcul & des connoiſſances (**) que l'on n'a encore que trés imparfaitement.

L'obſervation de l'angle qui meſure la diſtance de la Lune aux deux Etoiles n'eſt pas auſſi facile qu'on pourroit ſe l'imaginer. Il y aura des cas où elle ſe fera aiſément & exactement, lorsque les Etoiles ſeront très proches de la Lune, & à une diſtance que l'on pourra meſurer avec un Micrometre; mais lorsque les Etoiles ſeront eloignées, il faudra avoir recours à d'autres inſtrumens. Le quart de cercle garni de deux lunettes ſuppoſé deux Obſervateurs, & j'ai éprouvé pluſieurs fois qu' avec un quart de cercle de deux pieds de roi il étoit difficile de pouvoir déterminer cet angle à une minute près. L'on pourroit ſe ſervir utilement des nouveaux quartiers de réfléxions inventés par Mr. *Newton*; mais il ne paroit pas que l'on puiſſe attendre de ces inſtrumens une préciſion plus grande que celle avec laquelle on eſtime les hauteurs du Soleil. Il ſeroit à deſirer que ceux

(*) Lorsque la Lune eſt pleine, ſa lumiere efface ſouvent les petites Etoiles aux environs.

(*) Ces connoiſſances ſont celles de la hauteur de la Lune, de ſa déclinaiſon & de ſon demi diametre horizontal.

qui nous promettent une exactitude plus grande que celle d'une minute dans les Obſervations, en euſſent fait l'expérience.

Le point de perfection où l'on a porté dans ces derniers tems les Inſtrumens Aſtronomiques ſemble nous promettre que l'on perfectionnera encore les Inſtrumens propres à meſurer l'angle en queſtion. Ainſi il n'y a point de doute que l'on ne parvienne à déterminer avec une trés grande exactitude les diſtances de la Lune aux Etoiles voiſines, mais il ne s'enſuivra pas que l'on connoiſſe la longitude de la Lune à une minute près. Nous remarquons tous les jours, ſoit en examinant une longue ſuite d'Obſervations des paſſages de la Lune au Meridien, (Methode la plus exacte que l'on puiſſe pratiquer,) ſoit en comparant les Obſervations de deux Aſtronomes des differences dans les réſultats qui excédent plus d'une minute, & même que deux Aſtronomes qui feront uſage de la même Obſervation donnent des réſultats bien differens. En vain ſoupçonneroit-on des erreurs, ſoit dans les Obſervations, ſoit dans les calculs ; ce n'eſt que la différence des élémens qu'ils ont employés qui a produit ces pretenduës erreurs. L'aſcenſion droite de la Lune dépend de celle du Soleil ou des Etoiles fixes ; or les meilleures Tables du Soleil different ſouvent entr'elles de trente ſecondes. La poſition des Etoiles fixes n'eſt pas plus certaine, car à l'exception des principales auxquelles les Aſtronomes modernes ſe ſont attachés, les autres ne ſont placées que très imparfaitement dans les Catalogues. Il en eſt de même de la parallaxe de la Lune, ſur laquelle les Aſtronomes ne s'accordent pas à 30″ près, & different quelque fois d'une minute. (*) Enfin la réfraction, la hauteur du pole, & divers autres élémens, ſur leſquels les Aſtronomes ne s'accordent pas & ne conviendront jamais abſolument, prouvent aſſez que l'on ne peut déterminer le lieu de la Lune à une minute près, & par conſéquent la longitude à un demi-degré près.

On

(*) *Flamſteed*, 58. 2. Newton, 57. 30 M 57. 2. Voy. *Inſtit.* p. 185.

On pourra m'objecter que ma ſuppoſition eſt vraye dans l'etat d'imperfection où ſont actuellement les Tables de la Lune, mais qu'elle n'aura plus lieu, lorsque les efforts que les Aſtronomes font depuis long-tems pour les perfectionner, les auront mis en état de reconnoitre toutes les inegalités des mouvemens de cette Planete. Il me paroit fort aiſé de répondre à cette objection, que les Tables ne ſauroient être portées à une plus grande exactitude que celle que comportent les Obſervations ſur leſquelles elles ſont fondées. En effet comment pourra t-on diſcerner à laquelle de deux Tables différentes qui repreſenteroient le lieu de la Lune à une minute près, l'on doit donner la préférence, dès que les Obſervations des Aſtronomes differeront entre elles d'une égale quantité. On ſait, pour peu qu'on ſoit au fait de la pratique des Obſervations, qu'il n'eſt point de détermination Aſtronomique que l'on puiſſe conſtater à cinq ſecondes près. Ainſi, en ſuppoſant que l'on connoiſſe à cinq ſecondes : premiérement, la différence d'aſcenſion droite entre la Lune & le Soleil ou une Etoile : ſecondement, l'aſcenſion droite du Soleil ou de l'Etoile : troiſiémement, la hauteur de la Lune : quatrièmement, ſa parallaxe, & ſon demi-diametre, pour avoir la hauteur du centre : cinquiémement, la réfraction pour avoir la vraye hauteur : ſixièmement, la hauteur du pole pour en conclure la déclinaiſon de la Lune : ſeptiémement, l'obliquité de l'Ecliptique, pour avoir le lieu de la Lune ſur l'Ecliptique, il en pourra réſulter une différence de $35''$ dans le lieu de la Lune calculé ſur des élémens qui ne différeront entr'eux que de cinq ſecondes.

Je crois avoir ſuffiſamment expoſé toutes les difficultés qui ſe préſentent dans la détermination des longitudes par le moyen de la Lune, & avoir prouvé, que ſi d'un côté la rapidité de ſon mouvement, donnoit un nouveau moyen pour les longitudes, d'un autre côté ſa proximité de la Terre, rendoit les inégalités de ſon mouvement ſi ſenſibles qu'il étoit néceſſaire d'y avoir égard pour déterminer ſon vrai lieu dans le Ciel. Malgré la quantité de Tables, & même de bonnes Tables qui ont paru juſqu'à préſent, nous ne voyons point que

l'on soit encore parvenu à bien connoître toutes les inégalités du mouvement de la Lune. Il me seroit fort aisé de le prouver, mais pour donner plus de force à mes preuves, je vais les fonder sur l'expérience.

Comme l'on a essayé en dernier lieu de déterminer les longitudes par les occultations des Etoiles fixes par la Lune, en employant les Tables de *Flamsteed* publiées dans les Institutions Astronomiques; j'ai calculé sur nos Observations un grand nombre de lieux de la Lune & je les ai comparé avec le calcul tiré de ces Tables, pour que l'on puisse voir d'un coup d'oeil les différences tant en longitude qu'en latitude.

	Passage au meridien	*Longitude observée*	*Longitude calculée*	*Latitude observée*	*Latitude calc.*
48. Juill.	25 - 12″ 1 33	- - - -	3 1 49	0 28 45	environ 0 26 25
Aoust.	8 - 11 59 57	+ 2 56	16 49 34	0 50 36	− 27 − ″ 0 51 3
Sept.	29 5 51 37	+ - 56	3 46 54	2 41 20	− − 16 2 41 36
Sept.	30 6 51 51	+ 1 34	18 26 16	1 30 25	− − 25 1 30 40
Oct.	2 - 8 44 14	+ 1 54″	18 4 44	1 5 30	+ 1 3 1 5 27
	4 - 10 25 54	+ - 22	17 51 38	3 25 3	+ 1 3 3 24 2
	5 - 11 14 55	+ - 51	2 37 12	4 16 0	+ 1 55 4 14 5
	10 - 3 32 30	+ 1 40	12 0 0	4 1 15	+ 1 12 4 0 3
Oct.	14 - 5 47 37	− 2 32	19 34 2	1 19 57	+ 2 17 1 17 40
19. Jan.	3 - 12″ 15 15	− 1 11″	17 16 55	1 2 45	+ - - 25 1 2 20
Fevr.	21 - 3 36 45	− - 37″	3 27 7	5 11 40	+ 1 53 5 9 47
	22 - 4 29 8	− 20″	17 24 10	4 55 52	+ 2 31 4 53 21
	23 - 5 22 23	+ - 42	0 51 58	4 24 0	+ 2 58 4 21 2
	24 - 6 15 58	+ 2 21	13 55 17	3 38 30	+ 2 36 3 35 54
	25 - 7 8 48	+ 2 46	26 37 22	2 42 48	+ 1 28 2 41 20
	26 - 7 59 57	+ 2 24	5 4 44	1 41 27	+ 1 26 1 40 1
Mars	1 - 10 18 49	+ 2 15	15 38 50	1 33 54	− 1 13 1 35 7
	2 - 11 0 51	+ 2 23	27 48 37	2 34 7	− - 52 2 34 59
	3 - 11 41 47	+ 3 5	10 3 10	3 26 45	− 1 17 3 28 2
	4 - 12 22 23	+ 3 32	22 24 13	4 10 50	− 1 48 4 11 33

Les Observations que je rapporte ici ont été prises au hazard, dans les regitres d'Observations. Je n'ai point cherché celles dont les différences

feroient

ſeroient encore plus grandes, mais celles qui ont paru avoir été faites avec plus d'exactitude: on verra, à l'inſpection des réſultats des Obſervations, que ſouvent le calcul différe de l'obſervation de plus de deux minutes, tant dans la longitude que dans la latitude.

Si au défaut d'Obſervations correſpondantes faites dans les lieux dont on propoſe de déterminer la différence des Meridiens, l'on avoit été obligé d'avoir recours aux Tables, ces deux minutes d'erreur en auroient produit une très conſidérable dans la longitude. On trouve par exemple, que les Tables de *Flamſteed* donnent à quatre minutes près le tems de la conjonction du Soleil & de la Lune dans l'Eclipſe du Soleil du mois de Juillet 1748. Ainſi, ſi l'on ſe ſert de ces Tables pour déterminer le tems de la conjonction à Paris, où le tems n'a pas permis de faire l'obſervation, & que l'on cherche la différence des Méridiens entre ce lieu & tous ceux où l'on a obſervé l'Eclipſe, on aura toutes les differences des longitudes affectées de cette même erreur.

Nous ne voyons point, comme l'a remarqué Mr. *Maraldi*, & comme les derniéres Obſervations ſemblent le prouver, que le calcul des phaſes des Eclipſes du premier ſatellite de Jupiter différe de plus d'une minute de l'obſervation. Je vais rapporter quelques Obſervations faites à Paris & à Thury pendant l'Automne de 1748, & que Mr. *De L'iſle* a fait de ſon côté a Paris.

	Emerſion premiére, obſerv.				calculée			Differ.	
	26	Août	11	19 0	11	20	0	1	0
	18	Sept.	11	39 33	17	40	0		27
	21	Nov.	5	8 0	5″	9	0	1	0
à Thury.	13	Oct.	6	31 5	6	30	0	1	5
	4	Oct.	10	3 45	10	4	0		14″

On voit que la plus grande difference entre ces Obſervations va à une minute

minute. Elle ſeroit peut-être moindre, ſi l'on n'avoit point négligé dans le calcul les ſecondes de temps. Je laiſſe préſentement aux Obſervateurs à décider de la préférence que l'on doit donner aux différentes methodes que j'ai expoſées.

Je ne dois pas paſſer ici ſous ſilence un des grands inconvéniens que l'on peut oppoſer à la détermination des longitudes par l'obſervation de la diſtance de cette Planéte aux Etoiles fixes; je veux parler de la difficulté de conſtruire des Tables, ou des Cartes, à l'uſage des Pilotes, ou des Navigateurs, qui les diſpenſent du long & difficile calcul qu'ils ſeroient obligés de faire pour trouver la longitude du lieu où ils ſont; ſi l'on pouvoit dans tous les tems de l'année comparer la Lune aux deux mêmes Etoiles, on pourroit dreſſer des Tables, ou des Cartes, où l'on marqueroit pour un méridien connu, la trace de la Lune & la poſition de ces Etoiles. Mais, à l'exception des Etoiles de la premiére grandeur, que l'on découvre en tout tems, lorſqu'elles ſont ſous l'horizon, les autres ne peuvent être vûes que la nuit. Il ſeroit donc néceſſaire de comprendre dans ces Cartes un très grand nombre d'Etoiles; & il arrivera ſouvent, que dans un point de navigation où il ſeroit important de faire une Obſervation, l'on ne découvrira que de trés petites Etoiles qui ne ſeront pas marquées dans les Cartes. J'avois penſé que l'on pourroit conſtruire des Tables pour les différentes Etoiles qui ſe trouveroient aux environs de la Lune, ſelon les différentes ſaiſons de l'année. Mais auſſi quelle etenduë & quelle immenſité de Calculs! Je ne crois pasque l'on trouve des Aſtronomes, ou des Calculateurs, qui oſent l'entreprendre, avant que l'on ſoit aſſuré que l'on ſoit amplement dédommagé de ſes peines, par les avantages qu'on en pourra retirer. Je crois même pouvoir avancer que quand on donneroit aux Pilotes de pareilles Cartes, il ne s'en trouvera parmi eux qu'un trés petit nombre qui ſoient aſſez intelligents pour faire le reſte du calcul que cette methode exige. Le Probleme n'eſt pas auſſi ſim-

ple

ple qu'on ſe l'imagine. Il demande du calcul, il eſt fort aiſé de ſe tromper à moins que l'on n'ait une Figure, ou un Globe, pour ſe redreſſer.

Je crois donc pouvoir conclurre de ces réfléxions, que, quoique la Methode de déterminer les longitudes par les obſervations des diſtances des Etoiles fixes a la Lune, ſoit une des plus exactes que l'on puiſſe pratiquer, il ne faut point pour cela regarder le probleme des longitudes comme abſolument réſolu. Lorsque la Théorie de la Lune ſera portée au dernier terme de ſa perfection, il reſtera toujours des difficultés dans la pratique, qui doivent engager les Aſtronomes à chercher encore de nouveaux moyens pour les réſoudre. Ce n'a été qu'en les cherchant, & en faiſant tous les calculs néceſſaires pour faire uſage d'une methode dont je connoiſſois tout le prix, que j'ai reconnu toutes celles que j'ai expoſées dans ce Mémoire.

DESCRIPTION D'UN INSTRUMENT QUI SE TROUVE A' L'OBSERVATOIRE DE BERLIN.

Comme l'Inſtrument qu'a inventé Mr. *Hadley*', & dont cet illuſtre Auteur nous a communiqué le détail l'an 1732. dans les Tranſactions philoſophiques, a les mêmes parties eſſentielles que celui qui ſe trouve à notre Obſervatoire, celui-ci mérite bien qu'on en faſſe connoitre la conſtruction & les avantages. La premie-
Planche VII. re Figure fait voir l'inſtrument tout entier avec ſes pieces aſſemblées; c'eſt un quart de cercle de fer de $2\frac{1}{2}$ pieds anglois de rayon; ſon limbe eſt diviſé de dix en dix degrés par des marques de leton, il a deux lunettes AC & BC aux bouts desquelles C ſont appliqués des miroirs plans de metal ſous un angle de 45°, la lunette AC eſt immobile, &
PlancheVIII. ſon centre répond à 0° 90° ſur le limbe du quart de cercle. La Lunette mobile BC eſt ſur deux plaques de leton, dont l'inferieure finit en un arc 10° WS, & chaque degré eſt diviſé en 12 parties égales ou de 5 en 5 minutes; la petite échancrure VT fig. 2. qui eſt au bout de cette plaque ſert à ajuſter ſes diviſions à celles du limbe du quart de cercle, de ſorte que le fil délié qui eſt au milieu de VT tombe ſur les points de 83° 10°, 40° 50° &c. Cette plaque s'affermit au limbe du quart de cercle moyennant une vis appliquée à la partie averſe. La ſeconde plaque de leton, ou la ſupérieure à laquelle eſt attachée la lunette repréſente un rectangle $\nu\gamma\zeta\mu$, & eſt garnie d'une roüe E, d'un cadran D, & des vis B & X; à l'aide de ces deux vis B & X la plaque ſupérieure s'accroche dans l'arc taillé de la plaque inferieure, & en tournant le bras de fer $\gamma\zeta$, & par conſéquent la roüe E, la Lunette avance vers $\varkappa\lambda$ ou recule vers $\eta\theta$; & pendant que le fil délié & qui eſt ſous un petit verre, parcourt une diviſion de l'arc WS, c'eſt à dire 5 minutes,

l'aiguille

l'aiguille D fait une révolution entiere de 100 parties égales; de ſorte qu'une partie du micrometre D vaut 3 ſecondes. Les parties eſſen- Planche IX.
tielles de cet Inſtrument ſont les deux miroirs plans de metal appliqués au bout C des deux lunettes. Le miroir HI à la lunette immobile reçoit tous les raions qui paſſent par le tube AC, au lieu que le miroir FG à la lunette mobile ne reçoit que la moitié des rayons qui paſſent par le tuyau BC; l'Aſtre donc qui paſſe par le centre du tube BC tombe ſur la pointe N du miroir FG fig. 3, & l'oeil qui regarde par le trou Q de la plaque de leton FO voit l'Etoile dans la ligne NP; le rayon de l'autre Etoile qui traverſe le tube immobile AC ſe réflechit ſur le miroir HI en P, & paſſe par le verre K dans la même direction NP, & par conſéquent les deux Etoiles ſemblent ſe baiſer. C'eſt le principal but de notre Inſtrument, qu'on a rendu pourtant beaucoup plus univerſel, en y appliquant diverſes vis pour le mettre dans la ſituation qu'on voudra, de ſorte qu'il ſert non ſeulement à meſurer les diſtances des Aſtres, mais auſſi à prendre leurs hauteurs au deſſus de l'Horiſon. Il y a une vis particuliere α Planch. I. pour tourner toute la machine autour d'un axe perpendiculaire à l'arbre $\gamma\delta$; moyennant cette vis μ on peut mettre le plan de l'Inſtrument ſous divers angles avec l'Horiſon, & à l'aide de la vis M, l'arbre $\gamma\delta$, & avec lui l'inſtrument tourne autour de l'Horiſon. Après la deſcription de ce quart de cercle, il ne me reſte à dire ſinon que le tems précis depuis lequel il eſt à notre Obſervatoire, après pluſieurs recherches, m'eſt encore inconnu; tout ce que je ſçais, c'eſt qu'on trouve dans un Manuſcript de feu Mr. *Hoffmann*, ci-devant Aſtronome de la Societé des Sciences de Berlin, que cet Inſtrument avoit paſſé de Mr. *Hook* à nous; il eſt certain qu'il eſt travaillé en Angleterre, car ſur le limbe eſt marqué: *Whitehead fecit.* Au moins cet Inſtrument eſt-il depuis plus de trente ans à notre Obſervatoire.

EXTRAIT

D'UNE LETTRE DE Mr. *D'ALEMBERT* A' Mr. DE *MAUPERTUIS*. du 16. Nov. 1750.

C'eſt ſans doute par inadvertance, Monſieur, que Mr. EULER *m'a fait l'honneur de me citer dans vos Mémoires de* 1741. p. 197. *comme Auteur d'un Theoreme ſur les Equations differentielles à trois variables, que je n'ay jamais prétendu m'approprier, & dont je n'ay même fait mention juſqu'icy dans aucun de mes Ouvrages; ce Theoreme appartient à Mr.* FONTAINE, *ainſi qu'un grand nombre d'autres découvertes ſur la même matiere, qu'il ſeroit à ſouhaiter que l'Auteur publiât.* Je ſuis &c.

ME-

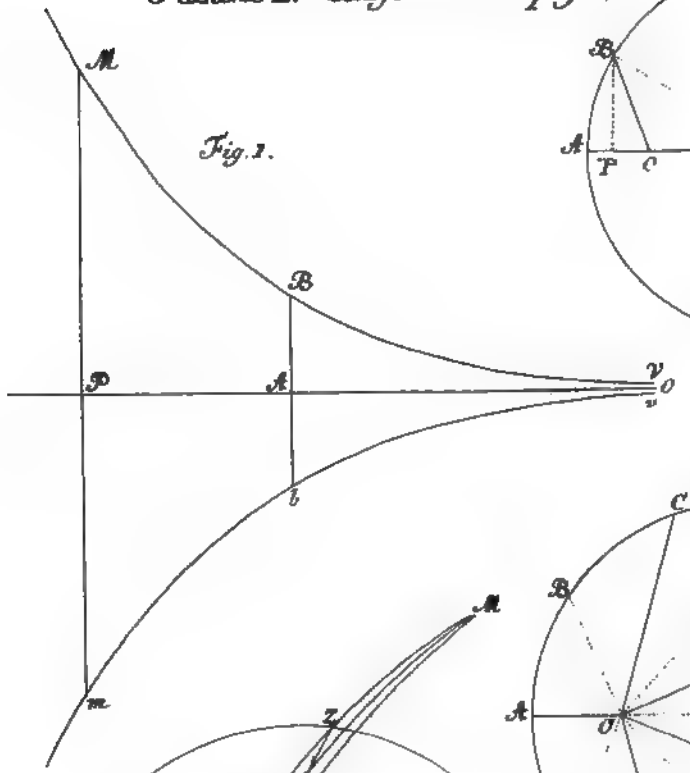


Fig. 1.

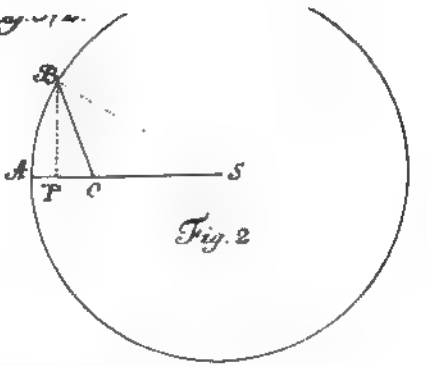
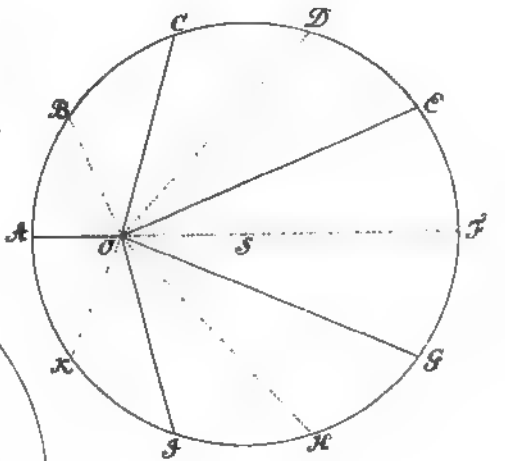


Fig. 2

Fig. 3



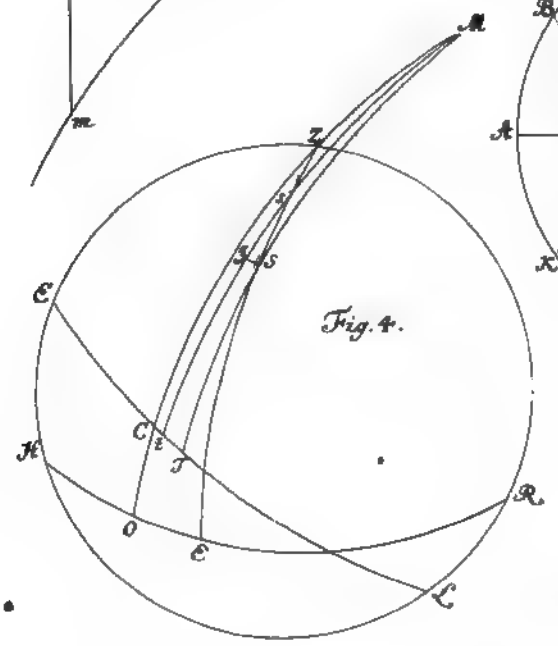


Fig. 4.

Mem. de l'Acad. Tom. V. pag. 192.

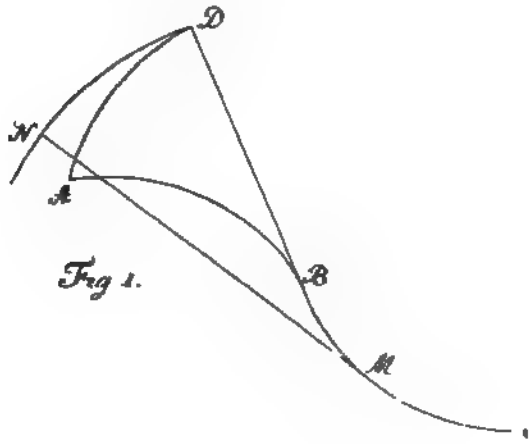


Fig 1.

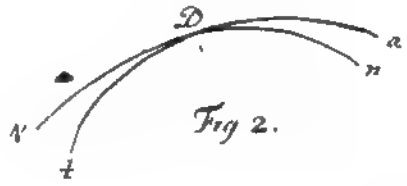


Fig 2.

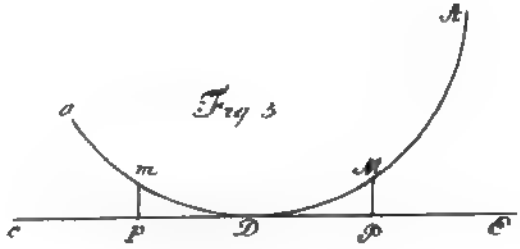
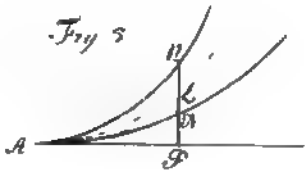


Fig 3

Fig 4

Fig 5



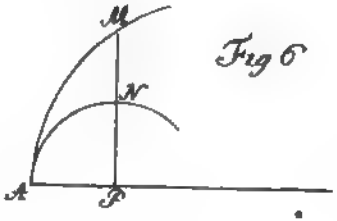


Fig 6

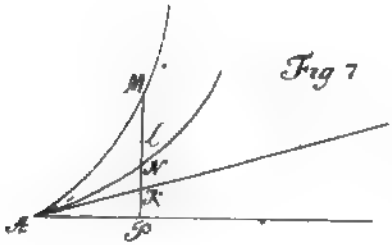


Fig 7

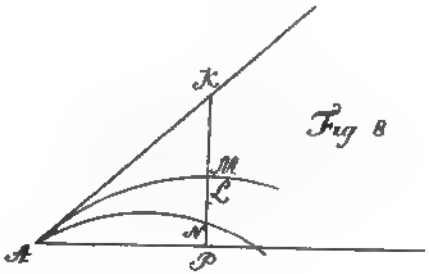


Fig 8

Mem. de l'Acad. Tom V pag 203.

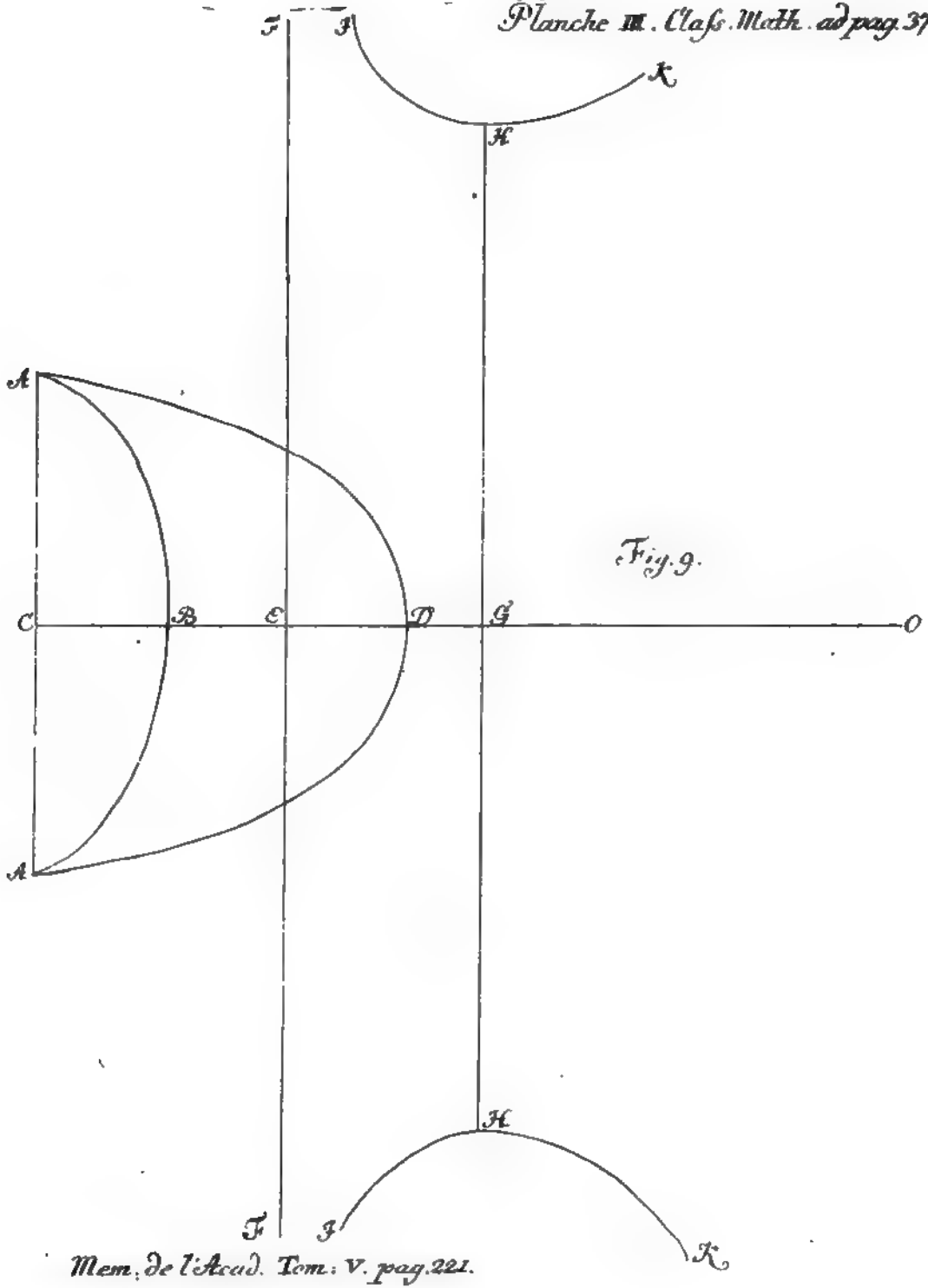


Fig. 9.

Mem. de l'Acad. Tom. V. pag. 221.

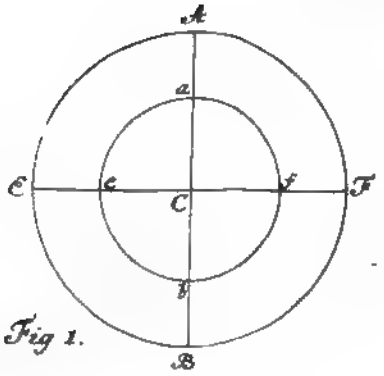


Fig 1.

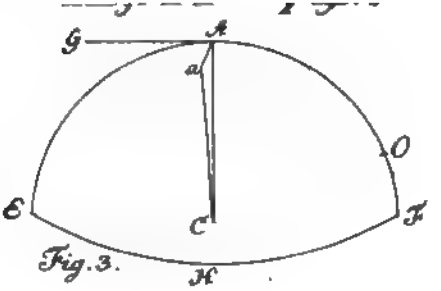


Fig. 3.

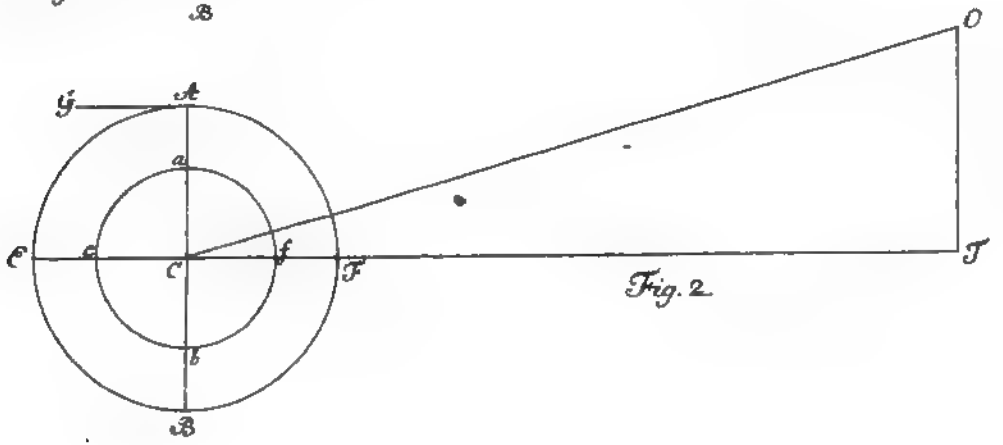


Fig. 2.

Fig. 4.

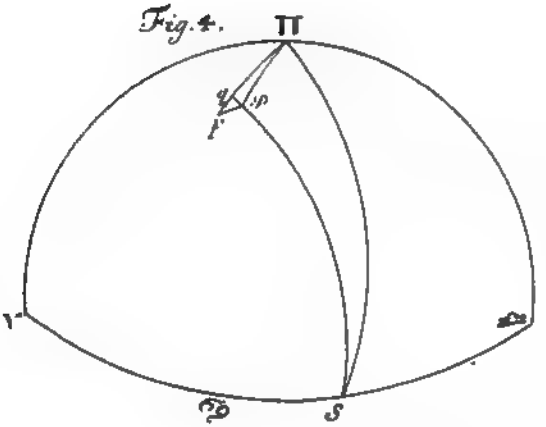
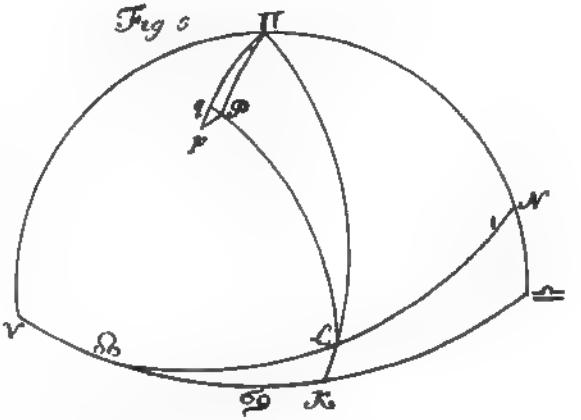


Fig 5



Mem: de l'Acad Tom. V. pag. 289.

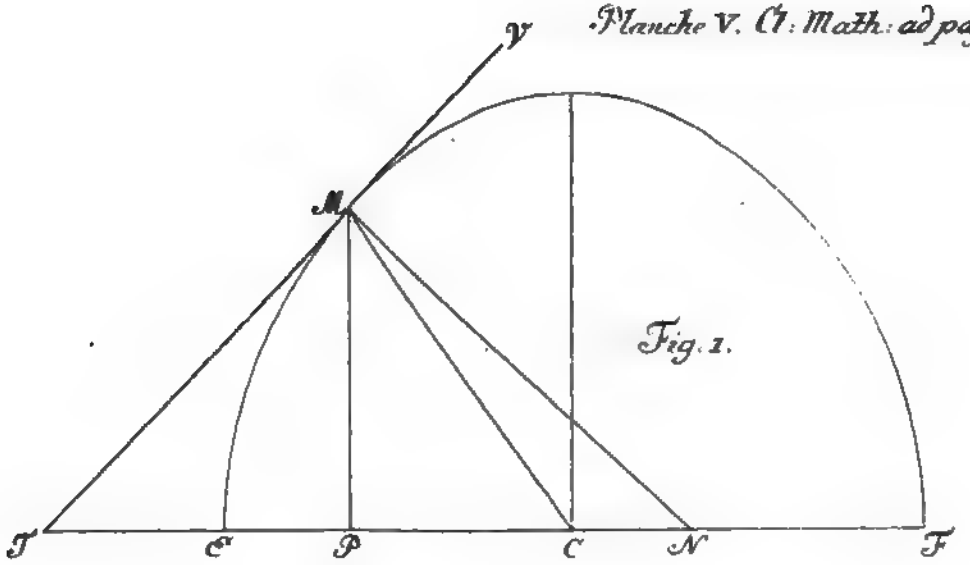


Fig. 1.

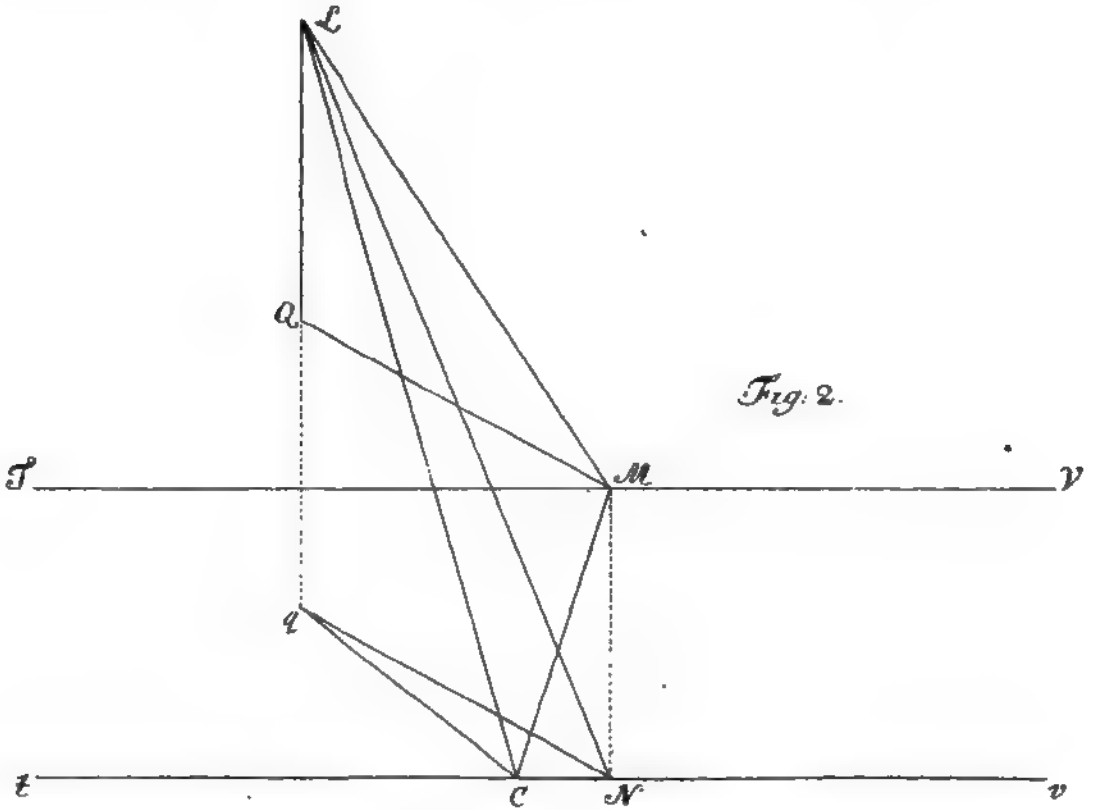


Fig. 2.

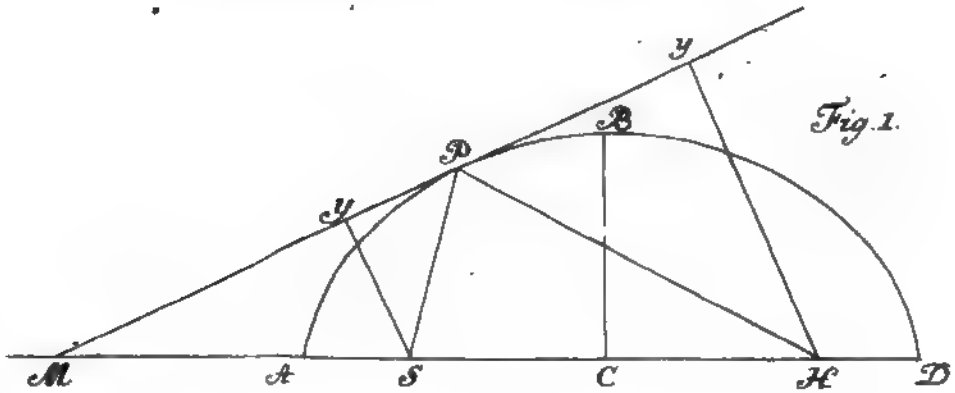


Fig. 1.

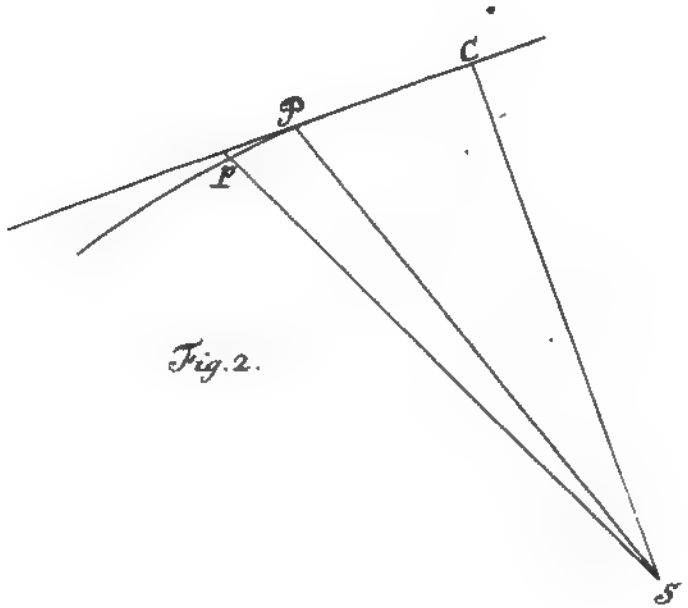
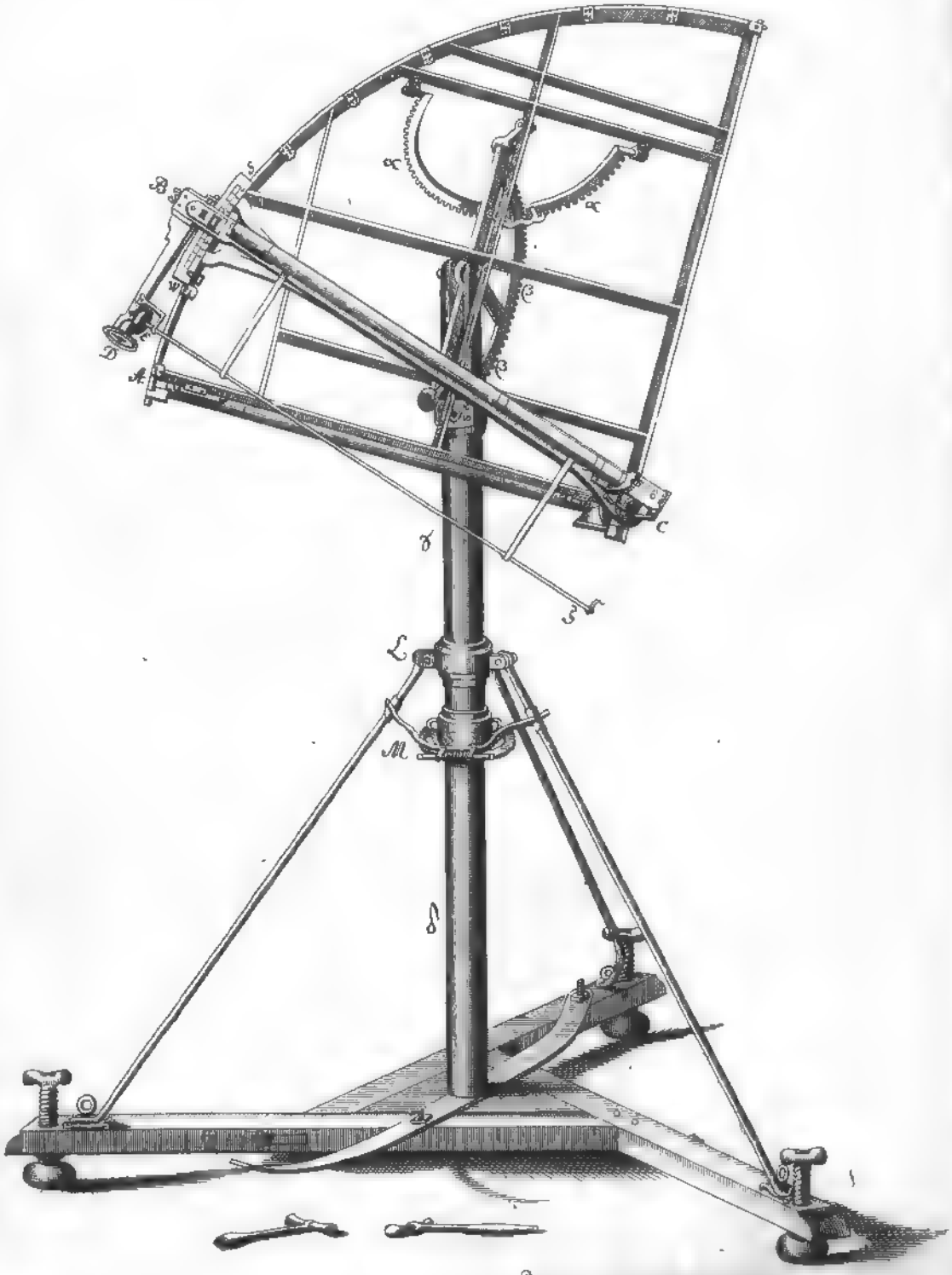


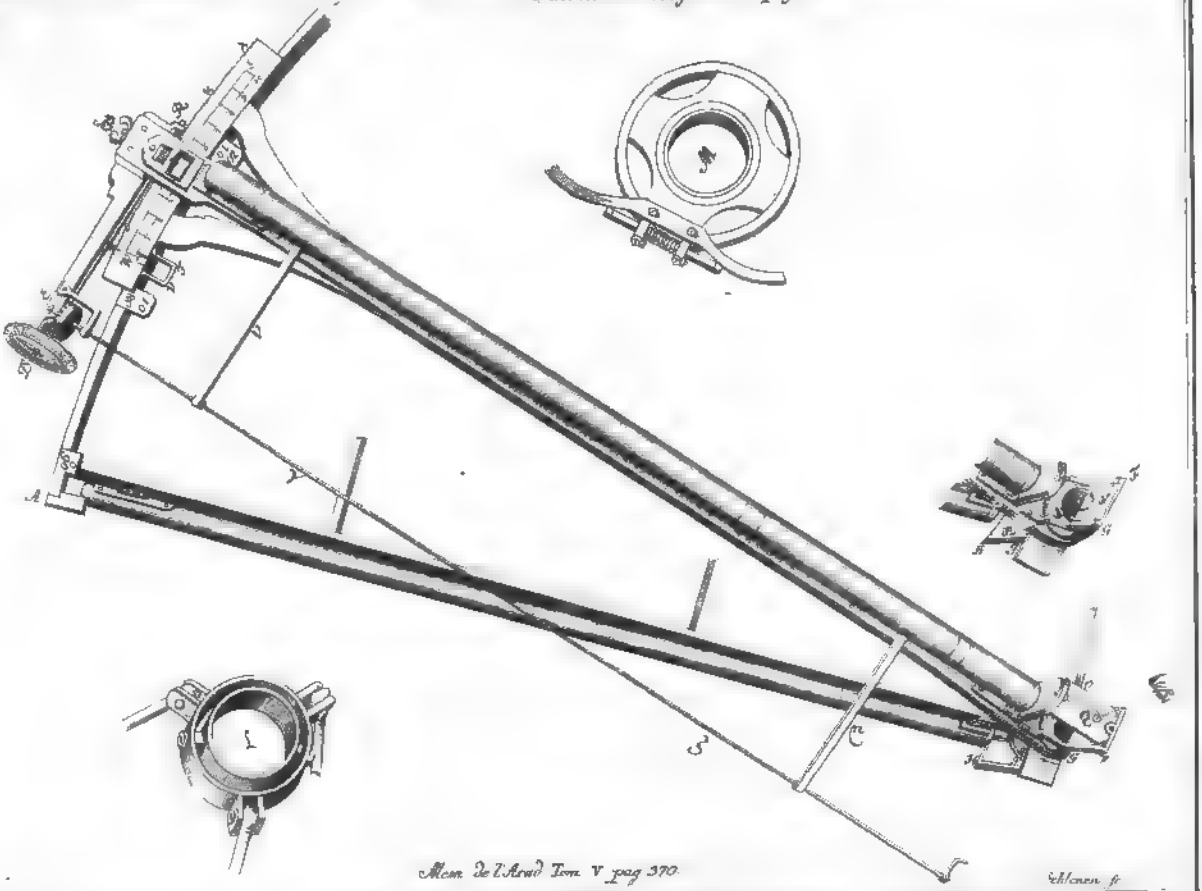
Fig. 2.

Planche VII. d'Math. ad pag. 572



Mem de l'Acad. Tom. V pag. 370.

Schleuen fc.



Mem. de l'Acad. Tom. V pag. 370.

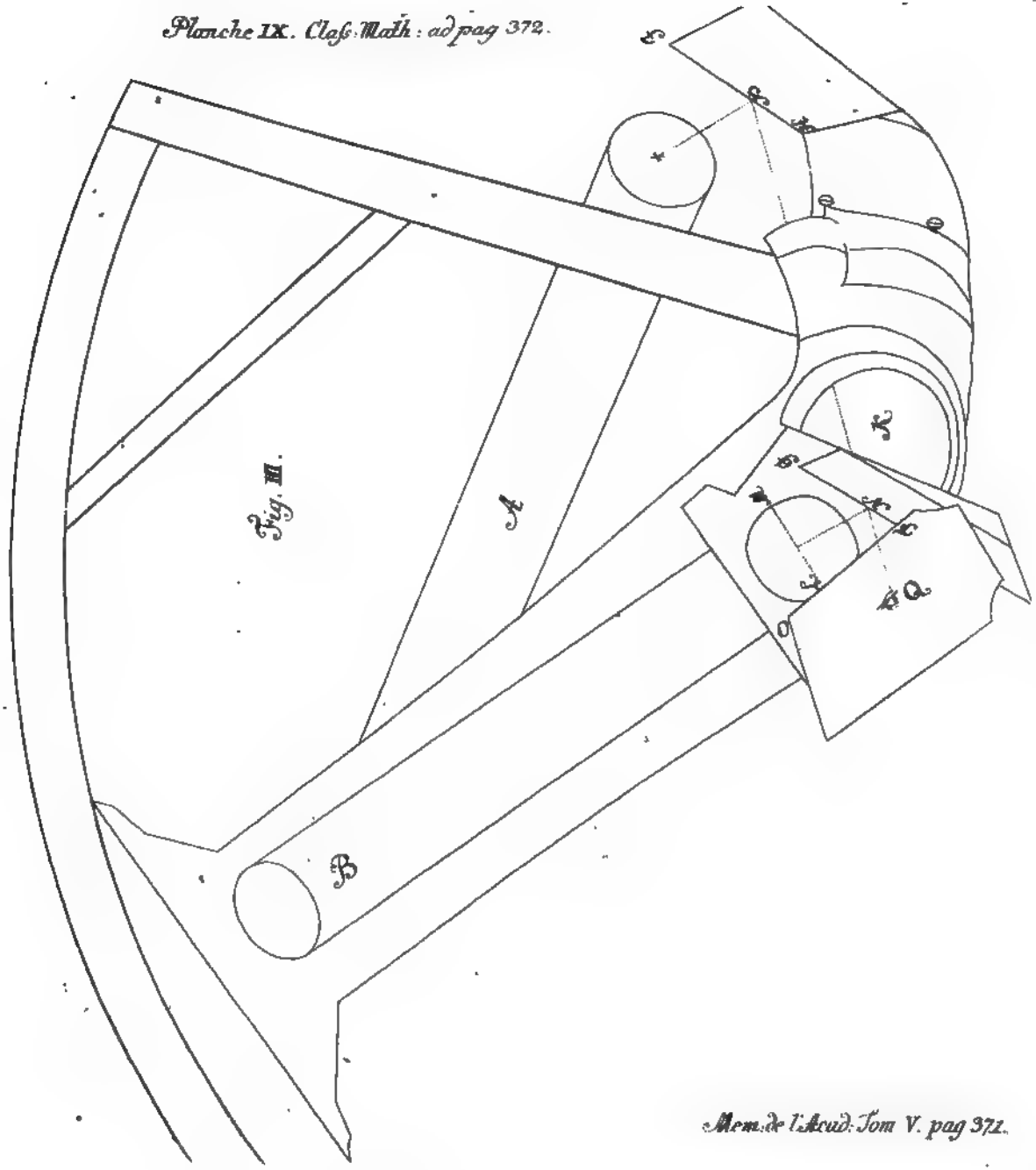


Fig. III.
A
B
K
Q

MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE SPECULATIVE.

* * *

An 3

DISSERTATION
SUR LES RAISONS
D'ETABLIR OU D'ABROGER
LES LOIX.

Ceux qui veulent acquérir une connoiſſance exacte de la maniére dont il faut établir ou abroger les Loix, ne la peuvent puiſer que dans l'Hiſtoire. Nous y voyons que toutes les Nations ont eû des Loix particuliéres; que ces Loix ont été établies ſucceſſivement; & qu'il a falû toujours beaucoup de tems aux hommes pour parvenir a quelque choſe de raiſonnable. Nous y voyons que les Législateurs, dont les Loix ont ſubſiſté le plus long-tems, ont été ceux qui ont eu pour but le Bonheur Public, & qui ont le mieux connu le Génie du Peuple dont ils régloient le Gouvernement.

Ce ſont ces Conſidérations qui nous obligent d'entrer ici en quelques détails ſur l'Hiſtoire même des Loix; & ſur la maniére dont elles ſe ſont établies dans les Païs les plus policés.

Il paroit probable que les Péres de Famille ont été les premiers Législateurs. Le béſoin d'établir l'ordre dans leurs Maiſons, les obligea ſans doute à faire des Loix Domeſtiques. Depuis ces premiers

miers tems, & lorsque les Hommes commencerent à ſe raſſembler dans des Villes, les Loix de ces Juriſdictions particulières ſe trouvérent inſuffiſantes pour une Societé plus nombreuſe.

La malice du Coeur humain, qui ſemble engourdie dans la ſolitude, ſe ranime dans le grand-monde: & ſi le Commerce des Hommes, qui aſſortit les caractéres les plus reſſemblans, fournit des Compagnons aux gens vertueux; il donne également des Complices aux Scelérats.

Les déſordres s'accrûrent dans les Villes; de nouveaux Vices prirent naiſſance; & les Pères de Famille, comme les plus intéreſſés à les réprimer, convinrent pour leur ſureté de s'oppoſer à ce débordement. On publia donc des Loix; & l'on créa des Magiſtrats pour les faire obſerver: tant eſt grande la dépravation du Coeur humain, que pour vivre en paix & heureux, on fut obligé de l'y contraindre par la puiſſance des Loix.

Les premières Loix ne parerent qu'aux grands Inconvéniens: les Civiles régloient le Culte des Dieux, le partage des Terres, les Contracts de mariage & les ſucceſſions: les Loix Criminelles n'étoient rigoureuſes que pour les crimes dont on redoutoit le plus les effets: & enſuite à meſure qu'il ſurvenoit des Inconvéniens inattendus, de nouveaux Déſordres donnoient naiſſance à de nouvelles Loix.

De l'union des Villes ſe formérent des Républiques; & par la pente que toutes les choſes humaines ont à la viciſſitude, leur Gouvernement changea ſouvent de forme. Laſſé de la Démocratie, le Peuple paſſoit à l'Ariſtocratie, à laquelle il ſubſtituoit même le Gouvernement Monarchique: ce qui arrivoit en deux maniéres; ou lorsque le Peuple mettoit ſa confiance dans la vertu éminente d'un de ſes Citoiens; ou lorsque par artifice quelque ambitieux uſurpoit le ſouverain Pouvoir. Il eſt peu d'Etats qui n'aïent pas eſſaïé de ces différens Gouvernemens; mais tous eurent des Loix différentes.

Oſiris

Oſiris eſt le premier Legislateur dont l'Hiſtoire Profane faſſe mention ; il étoit Roi d'Egypte, & il y établit ſes Loix : les Souverains même y étoient ſoumis : ces Loix, qui régloient le Gouvernement du Roïaume, s'étendoient ſur la conduite des Particuliers. Hérodote, Diodore de Sicile.

Les Rois n'acqueroient l'Amour de leur Peuple qu'autant qu'ils s'y conformoient. Oſiris * inſtitua trente Juges, dont le Chef portoit au cou la figure de la Verité pendüe à une chaine d'Or ; c'étoit obtenir gain de cauſe que d'être touché par cette figure.

Oſiris régla le Culte des Dieux, le partage des Terres, la diſtinction des Conditions : il ne voulut point qu'il y eut priſe de Corps contre le Débiteur ; toute ſéduction de Rhétorique étoit bannie des Plaidoïers : les Egyptiens engagoient les Cadavres de leurs Péres ; ils les dépoſoient chez leurs Créanciers pour nantiſſement ; & c'étoit une infamie que de ne pas les dégager avant leur mort. Ce Legislateur crut que ce n'étoit pas aſſez de punir les Hommmes pendant leur Vie, il établit un Tribunal qui les jugeoit après leur mort ; afin que la flétriſſure, attachée a leur condamnation, ſervit d'aiguillon pour animer les Vivans à la Vertu.

Après les Loix des Egyptiens, celles des Cretois ſont les plus anciennes : Minos fut leur Législateur ; il ſe diſoit Fils de Jupiter & aſſuroit avoir reçû ces Loix de ſon Père, afin de les rendre plus reſpectables. Rollin, Hiſtoire Ancienne.

Lycurgue, Roi de Lacedemone, fit uſage des Loix de Minos, auxquelles il en ajoûta quelques unes d'Oſiris, qu'il recueillit lui même dans un Voïage qu'il fit en en Egypte : il bannit de ſa République l'Or, l'Argent ; toute ſorte de Monnoies & les Arts ſuperflus ; il partagea également les Terres entre les Citoïens. Plutarque

Ce Legislateur, qui avoit intention de former des Guerriers, ne voulût point qu'aucune eſpéce de paſſion pût énerver leur courage, il

* Quelques Auteurs y ajoutent Iſis.

il permit pour cet effet la communauté des femmes entre les Citoïens, ce qui peuploit l'État, ſans attacher trop les Particuliers aux liens doux & tendres du mariage : tous les enfans étoient élevés aux fraix du Public : lorsque les Parens pouvoient prouver que leurs enfans étoient nés mal ſains, il leur étoit permis de les tuer. Lycurgue penſoit qu'un Homme, qui n'étoit pas en état de porter les Armes, ne méritoit pas la Vie.

Il régla que les Ilotes, eſpece d'Eſclaves, cultiveroient les Terres ; & que les Spartiates ne s'occuperoient qu'aux Exercices qui les rendoient propres à la Guerre.

La Jeuneſſe des deux ſexes luttoit; ils faiſoient leurs Exercices tout-nus, en place publique.

Leurs repas étoient réglés, où ſans diſtinction des états, tous les Citoyens mangeoient enſemble.

Il étoit défendu aux Etrangers de s'arrêter à Sparte ; afin que leurs moeurs ne corrompiſſent pas celles que Lycurgue avoit introduites.

On ne puniſſoit que les Voleurs mal-adroits : Lycurgue avoit intention de former une République militaire, & il y réuſſit.

Plutarque, Vie de Solon, Remarques de Dacier.

* Dracon fut à la vérité le premier Législateur des Atheniens; mais ſes Loix étoient ſi rigoureuſes, qu'on diſoit qu'elles étoient écrites plutôt avec du ſang qu'avec de l'encre.

Nous avons vû comme les Loix s'établirent en Egypte & à Sparte : voions maintenant comme elles furent réformées a Athénes.

Les déſordres qui régnerent dans l'Attique, & les ſuites funeſtes qu'ils préſageoient, firent qu'on eut recours a un Sage qui pouvoit ſeul réformer tant d'abus, Les Pauvres qui ſouffroient, a cauſe de leurs Dettes, des vexations cruelles de la part des Riches, ſongerent à ſe choiſir un Chef qui les délivrât de la Tyrannie des Créanciers.

Dans

* Dracon infligeoit punition de mort contre les plus petites fautes : il alla juſqu'à faire le Procès aux choſes inanimées; une Statüe, par exemple, qui en tombant avoit écraſé quelqu'un, étoit bannie de la Ville.

Dans ces diſſenſions, Solon fut nommé Archonte & Arbitre Souverain, du conſentement de tout le monde: les Riches, dit Plutarque, l'agréerent volontiers comme Riche, & les Pauvres, comme Homme de bien.

Solon déchargea les Débiteurs; il accorda aux Citoïens la liberté de teſter.

Il permit aux Femmes, qui avoient des Maris impuiſſans, d'en choiſir d'autres parmi leurs Parens.

Ces Loix impoſoient des chatimens à l'oiſiveté: elles abſolvoient ceux qui tuoient un Adultére; elles défendoient de confier la Tutéle des enfans à leurs plus proches Heritiers.

Ceux qui avoient crevé l'oeil à un Borgne, étoient condamnés à perdre les deux yeux: les Débauchés n'oſoient point parler dans les Aſſemblées du Peuple.

Solon ne fit aucune Loi contre le Parricide: ce crime lui paroiſſoit inoüi: il penſoit que c'eut été l'enſeigner pluſſôt que de le défendre.

Il voulut que ſes Loix fuſſent dépoſées dans l'Aréopage: ce Conſeil fondé par Cécrops, qui au commencement avoit été compoſé de trente Sages, s'augmenta jusqu'a cinq cens: l'Aréopage tenoit ſes Séances de nuit; les Avocats y plaidoient les Cauſes ſimplement, il leur étoit défendu d'exciter les paſſions. Moreri Dictionaire, Rollin, Plutarque.

Les Loix d'Athenes paſſerent enſuite à Rome: mais comme les Loix de cet Empire devinrent celles de tous les Peuples qu'il conquit, il ſera néceſſaire de nous étendre davantage ſur leur ſujet.

Romulus fut le Fondateur & le premier Legislateur de Rome; voici le peu qui nous reſte des Loix de ce Prince. Tite Live, Plutarque, Ciceron.

Il vouloit que les Rois euſſent une Autorité Souveraine dans les Affaires de Juſtice & de Religion; qu'on n'ajoutât point foi aux Fables qu'on rapporte des Dieux; qu'on eut d'eux des ſentimens ſaints & religieux, en n'attribuant rien de deshonnête a des Natures Bienheureuſes. Plutarque ajoute, que c'eſt une Impiété de croire que la Di-

vinité prenne plaiſir aux attraits d'une Beauté mortelle. Ce Roi ſi peu ſuperſtitieux, ordonna cependant qu'on n'entreprit rien, ſans avoir préalablement conſulté les Augures.

Romulus plaça les Patriciens dans le Sénat ; les Plébeiens dans les Tribus ; & il ne comptoit pour rien les Eſclaves dans ſa République.

Les Maris avoient le droit de punir de mort leurs femmes, lorsqu'elles étoient convaincües d'adultere ou d'yvrognerie.

La Puiſſance des Péres ſur leurs enfans n'avoit point de bornes : il leur étoit permis de les faire mourir, lorsqu'ils naiſſoient monſtrueux : on puniſſoit les Parricides de mort : un Patron, qui fraudoit ſon Client, étoit en abomination : une Belle-Fille qui battoit ſon Pére, étoit abandonnée à la Vengeance des Dieux Pénates. Romulus voulut que les Murailles des Villes fuſſent ſacrées ; & il tua ſon frére Remus, pour avoir transgreſſé cette Loi en ſautant par deſſus les Murs de la Ville qu'il élevoit.

Ce Prince établit des Aſiles ; il y en avoit entre-autres auprés de la Roche Tarpéienne.

Plutarque, Vie de Numa.

A ces Loix de Romulus, Numa en ajouta de nouvelles. Comme ce Prince étoit fort pieux, & que ſa Religion étoit épurée, il défendit que perſonne ne donnât aux Dieux la figure Humaine, ou celle de quelque Bête. De là vint que les CLX. premiéres Années depuis la Fondation de Rome, il n'y eut point d'Images dans les Temples.

Danet, Dictionaire des Antiquités.

Tullus Hoſtilius, afin d'exciter le Peuple à la multiplication de l'eſpece, voulut que, lorsqu'une femme accoucheroit de trois Enfans à la fois, ils fuſſent nourris aux dépens du Public, jusqu'à l'age de puberté.

Nous remarquons parmi les Loix de Tarquin, qu'il obligea chaque Citoien de donner au Roi le dénombrement de tous ſes Biens, au risque d'être puni s'il y manquoit ; qu'il régla les Dons que chacun devoit faire aux Temples ; & qu'entre autres il permit que les Eſcla-

ves

ves mis en liberté puſſent être reçus dans les Tribus de la Ville ; les Loix de ce Prince furent favorables aux Débiteurs.

Telles ſont les principales Loix que les Romains reçurent de leurs Rois. Sextus Papirius les recueillit toutes; & elles prirent de lui le nom de Code Papirien.

La plûpart de ces Loix, faites pour un Etat Monarchique, furent abolies par l'expulſion des Rois.

Valerius Publicola, Collègue de Brutus dans le Conſulat, un des Inſtrumens de la liberté dont Rome jouïſſoit; ce Conſul, ſi favorable au Peuple, publia de nouvelles Loix, propres au genre de Gouvernement qu'il venoit d'établir.

Ces Loix permettoient d'appeller au Peuple des Jugemens des Magiſtrats, & défendoient, ſous peine de mort, d'accepter des Charges ſans ſon aveu. Publicola diminua les Tailles, & autoriſa le meurtre des Citoïens qui aſpiroient à la Tyrannie.

Ce ne fut qu'aprés lui que s'établirent les uſures, les Grands de Rome les porterent jusqu'au Denier Huit: ſi le Débiteur ne pouvoit acquitter ſa dette; il étoit trainé en Priſon, & réduit à l'Eſclavage, lui & toute ſa Famille: la dureté de cette Loi parut inſupportable aux Plébéiens, qui en étoient ſouvent les Victimes: ils murmurerent contre les Conſuls: le Sénat ſe montra inflexible, & le Peuple, irrité de plus en plus, ſe retira au Mont ſacré; de là il traitta d'égal avec les Sénateurs, & il ne rentra à Rome, qu'a condition qu'on abolit ſes Dettes, & que l'on créât des Magiſtrats, qui par la charge de Tribuns ſeroient autoriſés à ſoutenir ſes Droits: ces Tribuns réduiſirent l'Uſure au Denier Seize; & enfin elle fut tout à fait abolie pour un tems. Tite Live, Livr. II Echard. Ch. II. Tacite, Annales.

Les deux Ordres qui compoſoient la République Romaine formoient ſans ceſſe des deſſeins ambitieux, pour s'élever les uns aux dépens des autres: de là naquirent les défiances & les jalouſies: quelques ſéditieux, qui flattoient le Peuple, outroient ſes prétentions; & quelques jeunes Senateurs, nés avec des paſſions vives & avec beaucoup d'orgueil, rendoient les réſolutions du Senat ſouvent trop ſéveres.

La Loi Agraire ſur le partage des Terres couquiſes, diviſa plus d'une fois la République: il en fut queſtion l'année CCLXVII. de ſa Fondation. Ces diſſenſions auxquelles le Senat faiſoit diverſion par quelques guerres, mais qui ſe réveilloient toujours, continuerent juſqu'en l'année CCC.

Tite Live. Liv. III.

Rome reconnut enfin la néceſſité d'avoir recours à des Loix, qui puſſent ſatisfaire les deux Partis: on envoïa à Athenes Poſthumius Albus, Antonius Manlius, & Sulpicius Camerinus, pour y compiler les Loix de Solon: ces Ambaſſadeurs à leur retour furent mis au nombre des Decemvirs; ils rédigerent ces Loix, qui furent approuvées du Sénat par un Arrêt, & du Peuple par un Plébiſcit: on les fit graver ſur dix Tables de Cuivre; & l'année d'aprés on en y ajouta encore deux autres: ce qui forma un Corps de Loix, ſi connu ſous le nom de celui des Douze Tables.

Dane, Dictionnaire des Antiquites Romaines.

Ces Loix limitoient la Puiſſance Paternelle; elles infligeoient des punitions aux Tuteurs qui fraudoient leurs Pupilles; elles permettoient de léguer ſon Bien a qui l'on voudroit: les Triumvirs ordonnerent depuis que les Teſtateurs ſeroient obligés de laiſſer le quart de leur Bien à leurs Heritiers; & c'eſt l'origine de ce que nous appellons la légitime. *

Les Enfans poſthumes, nés dix mois aprés la mort de leurs Péres, étoient déclarés légitimes; l'Empereur Adrien étendit ce Privilége juſqu'a l'onzieme mois.

Le Divorce, juſqu'alors inconnu des Romains, n'eut force de Loi que par celle des Douze Tables: il y avoit des peines infligées coutre les Injures d'effet, de paroles & par écrit.

L'Intention ſeule de Parricide étoit punie de mort.

Les Citoiens étoient autoriſés à tuer les Voleurs armés, ou qui entroient de nuit dans leur Maiſon.

Tout

* *Il n'y avoit que deux ſortes d'Heritiers ab Inteſtat, les Enfans, & les Parens Maſculins.*

Tout faux Témoin devoit être précipité de la Roche Tarpéienne. En matiéres Criminelles, l'Accuſateur avoit deux jours, dans leſquels il formoit l'Accuſation, qu'il ſignoit; & l'Accuſé avoit trois jours pour y répondre. * S'il ſe trouvoit que l'Accuſateur eut calomnié l'Accuſé; il étoit puni des mêmes peines que méritoit le crime dont il l'avoit chargé.

Voilà en ſubſtance ce que contenoient les Loix des Douze Tables, dont Tacite dit qu'elles furent la fin des bonnes Loix: l'Egypte, la Gréce, & tout ce qu'elle connoiſſoit de plus parfait, y avoient contribué: ces Loix ſi équitables & ſi juſtes ne reſſerroient la Liberté des Citoiens, que dans les cas, où l'abus qu'ils en pouvoient faire, auroit nui au repos des Familles & à la ſûreté de la République.

L'Autorité du Sénat, ſans ceſſe en oppoſition avec celle du Peuple; l'ambition outrée des Grands; les pretentions des Plébéiens qui s'accroiſſoient chaque jour, & beaucoup d'autres raiſons, qui ſont proprement du reſſort de l'Hiſtoire, cauſerent de nouveau des Orages violens: les Gracques & les Saturninus publierent quelques Loix ſéditieuſes: pendant les troubles des Guerres Civiles, on vit un nombre d'Ordonnances que les événemens faiſoient paroitre, & diſparoitre. Sylla abolit les anciennes Loix, & en établit de nouvelles que Lepidus détruiſit; la corruption des moeurs qui augmentoit avec ces diſſenſions domeſtiques, donna lieu à la multiplication des Loix à l'infini. Pompée élû pour réformer ces Loix, en publia quelques unes qui périrent avec lui. Pendant vingt-cinq Ans de Guerres Civiles & de Troubles, il n'y eut ni Droit, ni Coûtume, ni Juſtice; & tout demeura dans cette confuſion jusqu'au régne d'Auguſte; qui ſous ſon ſixiéme Conſulat rétablit les anciennes Loix, & annula toutes celles qui avoient pris naiſſance pendant les déſordres de la République.

L'Empereur Juſtinien remédia enfin à la confuſion que la multiplicité des Loix apportoit à la Juriſprudence; & il ordonna, à ſon Chance-

* *L'Accuſé comparoiſſoit en Suppliant devant le Magiſtrat avec ſes Parens & ſes Clients.*

Chancelier Tribonien de compoſer un Corps de Droit parfait: celui-ci le réduiſit en trois Volumes qui nous ſont reſtés; ſavoir, le Digeſte, qui contient les Opinions des plus célébres Juriſconſultes; le Code, qui renferme les Conſtitutions des Empereurs; & les Inſtituts, qui forment un Abregé du Droit Romain.

Ces Loix ſe ſont trouvées ſi admirables, qu'après la deſtruction de l'Empire, elle ont été embraſſées par les Peuples les plus policés, qui en ont fait la baſe de leur Juriſprudence.

Daniel, Hiſtoire de France.

Les Romains avoient apporté leurs Loix dans les Païs de leurs Conquêtes; les Gaules les reçûrent, lorsque Jules Ceſar, qui les ſubjugua, en fit une Province de l'Empire.

Pendant le cinquiéme Siécle après le démembrement de la Monarchie Romaine, les Peuples du Nord inonderent une partie de l'Europe: ces différentes Nations Barbares introduiſirent, chez leurs Ennemis vaincus, leurs Loix & leurs Coûtumes: les Gaules furent envahies par les Viſigoths, les Bourguignons & les Francs.

En 487. ſelon Daniel.

Clovis crût faire grace à ſes nouveaux ſujets en leur laiſſant l'option des Loix du Vainqueur, ou de celles du Vaincu: il publia la Loi Salique; & ſous les Régnes de ſes Succeſſeurs, ou créa ſouvent de nouvelles Loix. Gondebaud, Roi de Bourgogne, fit une Ordonnance, par laquelle il défere le Duel à ceux qui ne voudront pas s'en tenir au ſerment.

Hénault, Abregé Chronologique.

Anciennement les Seigneurs avoient le Droit de juger ſouverainement & ſans appel.

Sous le Régne de Louïs le Gros, s'établit la Juſtice ſupérieure & Roiale en France: nous voions depuis que Charles IX. avoit intention de réformer la Juſtice & d'abréger les Procédures; c'eſt ce qui paroit par l'Ordonnance de Moulins. Il eſt à remarquer que des Loix ſi ſages furent publiées dans des tems de troubles; mais, dit le Préſident Hénault, le Chancelier de l'Hôpital veilloit pour le ſalut de la Patrie. Ce fut enfin Louïs XIV. qui fit rédiger toutes les Loix, depuis Clovis jusques à lui, dans un Corps qu'on appella de ſon nom le Code Louïs.

De Thou.

Les

Les Bretons, que les Romains ſubjuguerent, de même que les Gaulois, reçurent également les Loix de leurs Conquérans. Rapin Thoiras, Introduction.

Avant d'être aſſujettis, ces Peuples étoient gouvernés par des Druides, dont les maximes avoient force de Loix.

Les Péres de Famille chez ces Peuples avoient droit de Vie & de Mort ſur leurs Femmes & leurs Enfans ; tout Commerce étranger leur étoit défendu : ils égorgoient les Priſonniers de Guerre, & en faiſoient un ſacrifice aux Dieux.

Les Romains maintinrent leur Puiſſance & leurs Loix chez ces Inſulaires, juſqu'a l'Empire d'Honorius, qui rendit aux Anglois leur liberté, l'An CCCCX. par un Acte ſolemnel.

Les * Pictes, alliés avec les Ecoſſois, les attaquerent enſuite : les Bretons, foiblement ſecourus des Romains, & toujours battus par leurs Ennemis, eurent recours aux Saxons ; ceux-ci ſubjuguerent toute l'Isle après une Guerre de 150. Ans ; & de leurs Auxiliaires, ils devinrent leurs Maitres.

Les Anglo-Saxons introduiſirent dans la grande Bretagne leurs Loix ; les mêmes qui ſe pratiquoient anciennement en Allemagne : ils partagérent l'Angleterre en ſept Roïaumes, qui ſe gouvernoient ſéparément : ils avoient tous des Aſſemblées ** générales, compoſées des Grands, du Peuple & de l'Ordre des Païſans : la forme de ce Gouvernement, qui étoit enſemble Monarchique, Ariſtocratique, & Démocratique, s'eſt conſervée juſqu'a nos jours ; l'Autorité ſe trouve encore partagée entre le Roi, la Chambre des Seigneurs & celle des Communes. Selon Brandi.

Alfred le grand donna à l'Angleterre les premiéres Loix, réduites en Corps. Quoiqu'elles fuſſent douces, ce Prince fut inéxorable envers les Magiſtrats convaincus de corruption : l'Hiſtoire remarque

* Les Pictes, Peuples venus du Mecklenbourg.

** Ces Aſſemblées s'appelloient *Wittenagemot*, ou Conſeil des Sages ; dont le Gouvenement prit le nom d'Heptarchique.

marque qu'en une ſeule Année il fit pendre quarante quatre Juges qui avoient prévariqué.

Selon le Code d'Alfred le grand, tout Anglois accuſé de quelquelque crime devoit être jugé par ſes Pairs, & la Nation conſerve encore ce Privilege.

L'Angleterre prit une nouvelle forme par la Conquête qu'en fit * Guillaume Duc de Normandie: ce Conquerant érigea de nouvelles Cours Souveraines; dont celle de l'Echiquier ſubſiſte encore: ces Tribunaux ſuivoient la Perſonne du Roy: il ſépara la Juriſdiction Eccleſiaſtique de la Civile: & de ſes Loix qu'il fit publier en Langue Normande, la plus ſevére étoit l'Interdiction de la Chaſſe, ſous peine de mutilation, ou de mort même.

Rapin Thoiras, en 890.

Depuis Guillaume le Conquérant, les Rois ſes Succeſſeurs firent différentes Chartres.

En 1100. Henri I. dit Beauclerc, permit aux Héritiers Nobles de prendre poſſeſſion des Succeſſions qui leur retomboient, ſans rien païer au Souverain: il permit même à la Nobleſſe de ſe marier, ſans le conſentement du Prince.

En 1136. Nous voions encore que le Roi Etienne donna une Chartre, par laquelle il reconnoit tenir ſon Pouvoir du Peuple & du Clergé; qui confirme les Prérogatives de l'Egliſe, & abolit les Loix rigoureuſes de Guillaume le Conquerant.

Rapin Thoiras Liv VIII. En 1215. Enſuite Jean Sans-Terre accorda à ſes ſujets la Chartre, dite la Grande-Chartre: elle conſiſte en LXII. Articles.

Les Articles principaux réglent la façon de relever les Fiefs; le partage des Veuves, en défendant de les contraindre à convoler en ſecondes Nôces: elle les oblige ſous caution à ne ſe point remarier ſans la permiſſion de leur Seigneur ſuſerain: ces Loix établiſſent les Cours de Juſtice dans des Lieux ſtables; elles défendent au Parlement de lever des Impôts, ſans le conſentement des Communes, à moins que ce ne ſoit

* Couronné à Londres en 1066.

ne ſoit pour racheter la Perſonne du Roi, ou afin de faire ſon fils Chevalier, ou pour doter ſa fille; elles ordonnent de n'empriſonner, de ne dépoſſeder, ni de ne faire mourir perſonne, ſans que ſes Pairs l'ayent jugé ſelon les Loix du Royaume; & de plus le Roi s'engage à ne vendre ni refuſer la Juſtice à perſonne.

Les Loix de Weſtminſter, qu'Edouard I. publia, n'étoient qu'un renouvellement de la grande Chartre; excepté qu'il défendit l'acquiſition des Terres aux gens de main morte, & qu'il bannit les Juifs du Roïaume. En

Quoique l'Angleterre ait beaucoup de ſages Loix, c'eſt peut-être le Païs de l'Europe où elles ſont le moins en vigueur. Rapin Thoiras remarque très bien que par un vice du Gouvernement, le pouvoir du Roi ſe trouve ſans ceſſe en oppoſition avec celui du Parlemeet; qu'ils s'obſervent mutuellement, ſoit pour conſerver leur Autorité, ſoit pour l'étendre; ce qui diſtrait, & le Roi, & les repréſentans de la Nation, du ſoin qu'ils devroient employer au maintien de la Juſtice; & ce Gouvernement turbulent & orageux change ſans ceſſe ſes Loix par Acte de Parlement; ſelon que les conjonctures & les événemens l'y obligent; d'où il s'enſuit que l'Angleterre eſt dans le cas d'avoir plus beſoin de réforme dans ſa Juriſprudence qu'aucun autre Royaume.

Il ne nous reſte qu'à dire deux mots de l'Allemagne. Nous reçûmes les Loix Romaines, lorsque ces Peuples conquirent la Germanie, & nous les conſervâmes, parce que les Empereurs abandonnant l'Italie transporterent chez nous le ſiége de leur Empire: cependant il n'eſt aucun Cercle, aucune Principauté, quelque petite qu'elle ſoit, qui n'ait un Droit Coutumier différent; & ces droits, par la longueur du tems, ſe ſont acquis force de Loix.

Après avoir expoſé la maniere dont les Loix ſe ſont établies chez la plûpart des Peuples policés, nous remarquerons que dans tous les Païs où elles ont été introduites du conſentement des Citoiens, c'étoit le beſoin qui les y fit recevoir; & que dans les Païs ſubjugués, c'é-

toient les Loix des Conquerans qui devenoient celles des Conquis; mais qu'également partout elles ont été augmentées ſucceſſivement. Si l'on eſt étonné de voir au premier coup d'oeil, que les Peuples puiſſent être gouvernés par tant de Loix différentes; on peut revenir de ſa ſurpriſe, en obſervant que pour l'eſſentiel des Loix elles ſe trouvent à peu près les mêmes, j'entens celles qui, pour le maintien de la Societé, puniſſent les crimes.

Nous obſervons encore, en examinant la conduite des plus ſages Legislateurs; que les Loix doivent être adaptées au genre du Gouvernement & au génie de la Nation qui les doit recevoir; que les meilleurs Legislateurs ont eû pour but la Félicité Publique, & qu'en général toutes les Loix, qui ſont les plus conformes à l'Equité Naturelle, à quelques exceptions près, ſont les meilleures.

Comme Licurgue trouva un Peuple ambitieux, il lui donna des Loix plus propres à faire des Guerriers que des Citoiens; & s'il bannit l'Or de ſa République, c'étoit parce que l'Interêt eſt de tous les Vices celui qui eſt le plus oppoſé à la gloire.

Plutarque, Vie de Solon.

Solon diſoit de lui-même, qu'il n'avoit pas donné aux Atheniens les Loix les plus parfaites, mais les meilleures qu'ils fuſſent capables de recevoir: ce Legislateur conſidéra non ſeulement le génie de ce Peuple, mais auſſi la ſituation d'Athènes qui étoit aux bords de la mer: par cette raiſon, il infligea des peines pour l'oiſiveté, il encouragea l'Induſtrie, & il ne défendit point l'Or & l'Argent, prévoyant que ſa République ne pouvoit devenir grande ni puiſſante, que par un Commerce floriſſant.

Il faut bien que les Loix s'accordent avec les génies des Nations, ou il ne faut point eſpérer qu'elles ſubſiſtent: le Peuple Romain vouloit la Démocratie, tout ce qui pouvoit altérer cette forme de Gouvernement, lui étoit odieux: de là vint qu'il y eut tant de Séditions pour faire paſſer la Loi Agraire, le Peuple ſe flattant que, par le partage des Terres, il rétabliroit une ſorte d'égalité dans les fortunes des

Ci-

Citoiens : de-là vint qu'il y eut de frèquentes émeutes pour l'abolition des Dettes ; parce que les Créanciers qui étoient les Grands, traitoient les Plébéiens, avec inhumanité ; & que rien ne rend plus odieuſe la difference des Conditions, que la Tyrannie que les Riches exercent impunément ſur les Miſérables.

On trouve trois ſortes de Loix dans tous les Païs; à ſçavoir, celles qui tiennent à la Politique, & qui établiſſent le Gouvernement; celles qui tiennent aux Moeurs & qui puniſſent les Criminels; & enfin les Loix Civiles, qui réglent les Succeſſions, les Tutéles, les Uſures & les Contracts. Les Legislateurs, qui établiſſent des Loix dans des Monarchies, ſont ordinairement eux-mêmes Souverains: ſi leurs Loix ſont douces & équitables, elles ſe ſoutiennent d'elles-mêmes; tous les Particuliers y trouvent leur avantage : ſi elles ſont dures & tyranniques, elles ſeront bientôt abolies ; parce qu'il faut les maintenier par la violence, & que le Tyran eſt ſeul contre tout un Peuple, qui n'a de déſir que de les ſupprimer.

Dans pluſieurs Républiques, où des Particuliers ont été Legislateurs; leurs Loix n'ont réüſſi qu'autant qu'elles ont pu établir un juſte équilibre entre le Pouvoir du Gouvernement & la Liberté des Citoiens.

Il n'eſt que les Loix qui regardent les Moeurs ſur leſquelles les Legislateurs conviennent en général du même principe ; excepté qu'ils ſe ſont plus roidis contre un crime que contre un autre : & cela ſans doute, pour avoir connu les Vices auxquels la Nation avoit le plus de penchant.

Comme les Loix ſont des digues qu'on oppoſe au débordement des Vices, il faut qu'elles ſe faſſent reſpecter par la terreur des Peines; mais il n'en eſt pas moins vrai que les Legislateurs, qui ont le moins aggravé les chatimens, ſont au moins les plus humains, s'ils ne ſont pas les plus rigides.

Les Loix Civiles ſont celles qui different le plus entre elles: ceux qui les ont établies, ont trouvé certains Uſages introduits généralement

ment avant eux, qu'ils n'ont oſé abolir ſans choquer les préjugés de la Nation, ils ont reſpecté la Coutume, qui les fait regarder comme bonnes; & ils ont adopté ces Uſages, quoiqu'ils ne ſoient pas équitables, purement en faveur de leur Antiquité.

Quiconque s'eſt donné la peine d'examiner les Loix avec un eſprit philoſophique, en aura ſans doute trouvé beaucoup, qui d'abord paroiſſent contraires à l'Equité naturelle, & qui cependant ne le ſont pas: je me contente de citer le Droit de Primogéniture; il paroit que rien n'eſt plus juſte que de partager la Succeſſion Paternelle en portions égales entre tous les enfans: cependant l'expérience prouve que les plus puiſſans Héritages ſubdiviſés en beaucoup de parties, réduiſent avec le tems des Familles opulentes à l'indigence; ce qui a fait que des Pères ont mieux aimé deshériter leurs Cadets; que de préparer à leur Maiſon une décadence certaine; & par la même raiſon des Loix, qui paroiſſent génantes & dures à quelques Particuliers, n'en ſont pas moins ſages, dès qu'elles tendent à l'avantage de la Societé entiére. Ceſt un tout, auquel un Législateur éclairé ſacrifiera conſtamment les parties.

Les Loix qui régardent les Débiteurs, ſont ſans contredit celles qui exigent le plus de circonſpection & de prudence, de la part de ceux qui les publient: ſi ces Loix favoriſent les Créanciers, la condition des Débiteurs devient trop dure; un malheureux haſard peut ruïner à jamais leur fortune: ſi au contraire cette Loi leur eſt avantageuſe, elle altère la confiance Publique, en infirmant des Contracts, qui ſont fondés ſur la bonne-foi.

Ce juſte milieu, qui, en maintenant la validité des Contracts, n'opprime pas les Débiteurs inſolvables, me paroit la Pierre Philoſophale de la Jurisprudence.

Nous ne nous étendrons pas davantage ſur cet Article; la nature de cet Ouvrage ne nous permet point d'entrer dans un plus grand détail: nous nous bornons aux réfléxions générales.

Un

Un Corps de Loix parfaites ſeroit le Chef-d'oeuvre de l'Eſprit humain, dans ce qui regarde la Politique du Gouvernement: on y remarqueroit une unité de deſſein, & des régles ſi exactes & ſi proportionnées, qu'un Etat conduit par ces Loix reſſembleroit à une Montre, dont tous les reſſorts ont été faits pour un même but; on y trouveroit une connoiſſance profonde du Coeur humain, & du génie de la Nation; les chatimens ſeroient tempérés, de ſorte qu'en maintenant les bonnes Moeurs, ils ne ſeroient ni legers ni rigoureux: des Ordonnances claires & préciſes ne donneroient jamais lieu au litige: elles conſiſteroient dans un choix exquis de tout ce que les Loix Civiles ont eu de meilleur, & dans une application ingénieuſe & ſimple de ces Loix aux Uſages de la Nation: tout ſeroit prévû, tout ſeroit combiné, & rien ne ſeroit ſujet a des inconvéniens: mais les choſes parfaites ne ſont pas du reſſort de l'Humanité.

Les Peuples auroient lieu d'être ſatisfaits, ſi les Legislateurs ſe mettoient à leur égard dans les mêmes diſpoſitions d'eſprit, où étoient ces Pères de Famille, qui donnerent les premiéres Loix: ils aimoient leurs Enfans; les maximes, qu'ils leur preſcrivoient, n'avoient d'objet que le bonheur de leur Famille.

Peu de Loix ſages rendent un Peuple heureux; beaucoup de Loix embarraſſent la Juriſprudence: par la raiſon, qu'un bon Médecin ne ſurcharge pas ſes Malades de remédes; le Législateur habile ne ſurcharge pas le Public de Loix ſuperfluës: trop de Médecines ſe nuiſent, & empêchent reciproquement leurs effets; trop de Loix deviennent un Dédale, où les Juriſconſultes & la Juſtice s'égarent.

Chez les Romains les Loix ſe multiplierent, lorsque les révolutions étoient fréquentes: tout ambitieux qui ſe voyoit favoriſé de la fortune, ſe faiſoit Legislateur. Cette confuſion dura, comme nous l'avons dit, jusqu'au tems d'Auguſte, qui annula toutes ces Ordonnances injuſtes, & remit les anciennes Loix en vigueur.

En France les Loix devinrent plus nombreuſes, lorsque les Francs, en conquérant ce Royaume, y introduiſirent les leurs. Louïs

XI.

XI. eut deſſein de réünir toutes ces Loix, & d'établir dans ſon Empire, comme il le diſoit lui-même, une ſeule Loi, un ſeul poids & une ſeule meſure.

Il eſt pluſieurs Loix auxquelles les hommes ſont attachés, parce qu'ils ſont la pluspart des Animaux de Coûtume : quoi qu'on put en ſubſtituer de meilleures à leur place, il ſeroit peut-être dangereux d'y toucher : la confuſion, que cette réforme mettroit dans la Juriſprudence, ſeroit peut-être plus de mal que les nouvelles Loix ne produiroient de bien.

Cela n'empêche pas qu'il n'y ait des cas où la réforme ſemble abſolument néceſſaire ; c'eſt lorſqu'il ſe trouve des Loix contraires au bonheur public & à l'Equité naturelle ; lorſqu'elles ſont énoncées en termes vagues & obſcurs, & lors enfin qu'elles impliquent contradiction dans le ſens, ou dans les termes.

Entrons dans quelques éclairciſſemens ſur cette matiére.

Diodore de Sicile.

Les Loix d'Oſiris ſur le Vol ſont, par exemple, dans le cas de ces premiéres, dont nous avons parlé ; elles ordonnoient que ceux, qui voudroient faire le mêtier de Voleurs, ſe fiſſent inſcrire chez leurs Capitaines, & qu'on portât chez lui à l'inſtant tout ce qu'on déroberoit. Ceux ſur qui s'étoit fait le Vol, venoient chez le Chef des Voleurs revendiquer leurs Biens, qu'on leur reſtituoit, pourvû que le Propriétaire donnat le quart de la valeur ; le Legislateur penſoit que par cet expédient il fourniſſoit aux Citoyens un moyen de recouvrer ce qui leur appartenoit, moyennant une legére redevance : c'étoit le moyen de faire des Voleurs de tous les Egyptiens. Oſiris n'y penſoit pas ſans doute en établiſſant cette Loi ; à moins qu'on ne veüille dire qu'il conniva au Vol, comme à un mal qu'il ne pouvoit pas empêcher, de même que le Gouvernement d'Amſterdam ſouffre les Mulicos, & celui de Rome les Maiſons de Joye privilégiées.

Les bonnes Moeurs & la ſureté Publique demanderoient cependant qu'on abrogeât cette Loi d'Oſiris, ſi malheureuſement on la trouvoit établie.

Les

Les François ont pris le contrepied des Egiptiens : ceux-là étoient trop doux ; ceux-ci trop ſévéres ; les Loix Françoiſes ſont d'une rigueur terrible ; tous les Voleurs Domeſtiques ſont punis de mort ; ils diſent, pour ſe juſtifier, qu'en puniſſant ſévérement les Coupeurs de Bourſes, ils détruiſent la ſemence des Brigands & des Aſſaſſins.

L'Equité naturelle veut qu'il y ait une proportion entre le crime & le chatiment : les Vols compliqués méritent la mort ; ceux qui ſe commettent ſans violence ont des cotés, par lesquels on peut enviſager avec compaſſion ceux qui en ſont coupables.

Il y a l'infini entre le Deſtin d'un riche & d'un miſérable : l'un regorge de biens & nage dans le ſuperflu ; l'autre abandonné de la Fortune manque même du néceſſaire ; qu'un malheureux dérobe, pour vivre, quelques Piſtoles, une Montre d'or, ou pareilles bagatelles, à un Homme que ſa magnificence empêche de s'appercevoir de cette perte ; faut-il que ce miſérable ſoit devoué à la mort ? L'Humanité n'exige-t-elle pas qu'on adouciſſe cette extrême rigueur ? Il paroit bien que les Riches ont fait cette Loi : les Pauvres ne ſeroient-ils pas en droit de dire ? „ Que n'a-t-on de la commiſération de nô-
„ tre état déplorable ? Si vous étiez charitables, ſi vous étiez hu-
„ mains, vous nous ſecourriez dans nos miſéres, & nous ne vous vo-
„ lerions pas : parlez, eſt-il juſte que toutes les Felicités de ce mon-
„ de ſoient pour vous, & que toutes les Infortunes nous accablent ?

La Juriſprudence Pruſſienne a trouvé un tempérament entre le relâchement de celle d'Egipte & la ſévérité de celle de France : les Loix ne puniſſent point de mort le Vol ſimple ; elles ſe contentent de condamner le coupable à certain tems de priſon : peut-être feroit-on mieux encore d'introduire la Loi du Talion, qui s'obſervoit chez les Juifs, par laquelle le Voleur étoit obligé de reſtituer le double de ce qu'il avoit dérobé, ou de ſe conſtituer l'eſclave de celui dont il avoit ſaiſi le bien. Si l'on ſe contente de punir legérement les petites fautes, on reſerve les derniers ſupplices aux Brigands, aux Meur-

triers, aux Aſſaſſins ; de ſorte que la Punition marche toujoûrs de pair avec le crime.

Aucune Loi ne révolte plus l'Humanité, que le Droit de vie & de mort, que les Péres avoient ſur leurs enfans, à Sparte, & à Rome : en Gréce, un Pere, qui ſe trouvoit trop pauvre pour fournir aux beſoins d'une Famille nombreuſe, faiſoit périr les enfans qui lui naiſſoient de trop : à Sparte & à Rome, qu'un enfant vint au monde mal conformé ; cela autoriſoit ſuffiſamment le Pére à lui ôter la Vie. Nous ſentons toute la Barbarie de ces Loix, à cauſe que ce ne ſont pas les nôtres ; mais examinons un moment, ſi nous n'en avons pas d'auſſi injuſtes.

N'y a-t-il point quelque choſe de bien dur dans la façon dont nous puniſſons les avortemens ? A Dieu ne plaiſe que j'excuſe l'action affreuſe de ces Médées, qui, cruelles à elles-mêmes & à la voix du ſang, étouffent la race future, (ſi j'oſe m'exprimer ainſi,) ſans lui laiſſer le tems de voir le jour ! Mais que le Lecteur ſe dépoüille de tous les préjugés de la Coutume ; & qu'il daigne prêter quelque attention aux réfléxions que je vais lui préſenter.

Les Loix n'attachent-elles pas un dégré d'infamie aux Couches clandeſtines ? Une fille née avec un tempérament trop tendre, trompée par les promeſſes d'un Débauché ; ne ſe trouve-t-elle pas, par les ſuites de ſa crédulité, dans le cas d'opter entre la perte de ſon honneur, ou celle du fruit malheureux qu'elle a conçû ? N'eſt-ce pas la faute des Loix, de la mettre dans une ſituation auſſi violente ? Et la ſévérité des Juges ne prive-t-elle pas l'Etat de deux ſujets à la fois ? de l'Avorton qui a péri, & de la Mére qui pourroit réparer abondamment cette perte par une propagation légitime ? On dit à cela qu'il y a des Maiſons d'Enfans trouvés : je ſais qu'elles ſauvent la vie à une infinité de Bâtards ; mais ne vaudroit-il pas mieux trancher le mal par ſes racines, & conſerver tant de pauvres Créatures qui périſſent miſérablement, en aboliſſant les flétriſſures attachées aux ſuites d'un amour imprudent & volage ?

Ciceron, Verrine.

Mais

Mais rien de plus cruel que la Queſtion : les Romains la donnoient à leurs Eſclaves, qu'ils regardoient comme une eſpece de Bétail domeſtique : jamais aucun Citoien ne la recevoit. Ciceron pour Cluentius.

La Queſtion ſe donne en Allemagne aux Malfaiteurs, après qu'ils ſont convaincus ; afin d'arracher de leur propre bouche l'aveu de leurs crimes : elle ſe donne en France pour avérer le Fait, ou pour découvrir les complices : autrefois les Anglais avoient * l'ordéal ou l'Epreuve par le feu & par ** l'eau ; ils ont à preſent une eſpece de Queſtion moins dure que l'ordinaire, mais qui revient à peu près à la même choſe. Rapin Thoiras.

Qu'on me le pardonne, ſi je me recrie contre la Queſtion ; j'oſe prendre le parti de l'Humanité contre un Uſage honteux à des Chrétiens & à des Peuples policés ; & j'oſe ajouter, contre un Uſage auſſi cruel qu'inutile.

Quintilien, le plus ſage & le plus éloquent des Rhéteurs, dit, en traittant de la Queſtion, que c'eſt une affaire de Tempérament : un ſcélerat vigoureux nie le fait : un Innocent d'une compléxion foible l'avoüe : un Homme eſt accuſé, il y a des Indices, le Juge eſt dans l'incertitude, il veut s'éclaircir : ce malheureux eſt mis à la queſtion, s'il eſt innocent, qu'elle barbarie de luy faire ſouffrir le martyre ! ſi la force des tourmens l'oblige à dépoſer contre-lui-même : quelle inhumanité épouvantable que d'expoſer aux plus violentes douleurs, & de condamner à la mort un Citoyen vertueux, contre lequel il n'y a que des ſoupçons ! Il vaudroit mieux pardonner a vingt coupables que de ſacrifier un Innocent : ſi les Loix ſe doivent établir pour le bien des Peuples, faut-il qu'on en tolére de pareilles, qui mettent les Quintilien, liv. 5 des Preuves & de la Réfutation

* L'ordéal par le feu : on mettoit entre les mains de l'accuſé un morceau de fer ardent ; s'il etoit aſſes heureux pour ne ſe point brûler, il etoit abſous ; ſinon, on le puniſſoit comme coupable.

** L'ordéal par l'eau ; on lioit le coupable & le jettoit dans l'eau ; s'il ſurnageoit, il étoit abſous.

Jugés dans le cas de commettre méthodiquement des actions criantes qui révoltent l'Humanité?

Il y a huit ans que la Queſtion eſt abolie en Pruſſe: on eſt ſûr de ne point confondre l'Innocent & le Coupable; & la Juſtice ne s'en fait pas moins.

Examinons à preſent les Loix vagues, & les Procédures qui ſont dans le cas d'être réformées.

Il y avoit une Loi en Angleterre qui défendoit la Bigamie: un Homme fut accuſé d'avoir cinq femmes, & comme la Loi ne s'expliquoit pas ſur ce cas, & qu'on l'interpréte littéralement, il fut mis hors de Cour & de Procés. Pour que cette Loi fut claire, elle auroit dû porter, que quiconque prend plus d'une femme, ſoit puni &c. Les * Loix vagues & littéralement interprétées en Angleterre, ont donné lieu aux abus les plus ridicules.

Des Loix préciſes ne donnent point lieu à la Chicane, elles doivent s'entendre ſelon le ſens de la lettre: lorsqu'elles ſont vagues ou obſcures; elles obligent de recourir à l'intention du Legiſlateur, & au lieu de juger des Faits, on s'occupe à les définir.

La Chicane ne ſe nourrit pour l'ordinaire que de Succeſſions & de Contracts; & par cette raiſon les Loix, qui roulent ſur ces Articles, ont beſoin de la plus grande clarté: ſi l'on s'occupe à vétiller ſur les termes, en compoſant des Ouvrages d'eſprit frivoles, à combien plus forte raiſon les termes de la Loi méritent ils d'être peſés ſcrupuleuſement?

Les Juges ont deux piéges à craindre; ceux de la corruption, & ceux de l'erreur: leur conſcience doit les garantir des premiers; & les Legiſlateurs des ſeconds: des Loix claires, qui ne donnent pas lieu a des Interprétations, y ſont un premier reméde; & la ſimplicité

* *Murálr* Un homme coupa le nés a ſon Ennemi; on voulut le châtier d'avoir mutilé un Citoyen, mais il ſoutint que ce qu'il avoit coupé n'étoit point un membre, & le Parlement déclara par un Arrêt qu'on regarderoit le nés comme un membre.

plicité des Plaidoiers, le ſecond. On peut reſtraindre les Diſcours des Avocats à la Narration du Fait, fortifiée de quelques preuves, & terminée par une Epilogue, ou courte récapitulation: rien n'eſt plus fort dans la bouche d'un homme éloquent que l'Art de manier les paſſions: l'Avocat s'empare de l'eſprit des Juges; il les intéreſſe, il les émeut; il les entraine: & le preſtige du ſentiment fait illuſion ſur le fond de la verité. Licurgue & Solon interdirent tous les deux cette ſorte de Perſuaſion aux Avocats: & ſi nous en rencontrons dans les Philippiques & dans les Harangues ſur la Couronne, qui nous reſtent de Démoſthéne & d'Eſchine, il faut obſerver qu'elles ne ſe prononcerent pas devant l'Aréopage, mais devant le Peuple; que les Philippiques ſont du Genre Délibératif; & que celles ſur la Couronne ſont plutôt du Genre Démonſtratif que du Judiciaire.

Les Romains n'étoient pas auſſi ſcrupuleux que les Grecs ſur les Harangues de leurs Orateurs: il n'eſt poins de Plaidoïer de Ciceron, qui ne ſoit plein de paſſion: j'en ſuis faché pour cet Orateur; mais nous voions dans ſa Harangue pour Cluentius, qu'il avoit auparavant plaidé pour ſa Partie adverſe: la Cauſe de Cluentius ne paroit pas abſolument bonne; mais l'Art de l'Orateur l'emporta Le chef-d'oeuvre de Ciceron eſt ſans doute la Peroraiſon de la Harangue pour Fonteius; elle le fit abſoudre, quoiqu'il paroiſſe coupable. Quel abus de l'Eloquence, que de ſe ſervir de ſon enchantement pour énerver les Loix les plus ſages!

La Pruſſe a ſuivi cet uſage de la Grece: & ſi les rafinemens dangereux de l'Eloquence ſont bannis des Plaidoyers, elle en eſt redevable à la ſageſſe du Grand-Chancelier; dont la probité, les lumiéres, & l'activité infatigable, auroient fait honneur aux Républiques Grecques & Romaines, dans les tems où elles étoient les plus fécondes en Grands-Hommes.

Il eſt encore un Article, qui doit être compris ſous l'obſcurité des Loix; c'eſt la Procédure & le nombre d'inſtances que les Plaideurs ont a parcourir, avant que de terminer leurs Procès. Que ce

ſoient de mauvaiſes Loix, qui leur faſſent injuſtice ; que ce ſoient des Plaidoiers artificieux, qui obſcurciſſent leurs Droits ; ou que ce ſoient des longueurs, qui, abſorbant le fond même du litige, leur faſſent perdre les avantages qui leur ſont dûs ; tout cela revient au même : l'un eſt un mal plus grand que l'autre ; mais tous les abus méritent réforme : ce qui allonge les Procés, donne un avantage conſidérable aux riches ſur les Plaideurs qui ſont pauvres ; ils trouvent le moien de traduire le Procès d'une Inſtance à l'autre ; ils mattent & ruïnent leur Partie ; & ils reſtent à la fin les ſeuls dans la Carrière.

Autrefois dans ce Païs les Procés duroient au delà d'un Siécle : lors même qu'une cauſe avoit été decidée par cinq Tribunaux, la Partie adverſe, au plus haut mépris de la Juſtice, en appelloit aux Univerſités, & les Profeſſeurs en Droit réformoient ces Sentences à leur gré. Un Plaideur jouoit bien de malheur, qui, dans cinq Tribunaux & je ne ſais combien d'Univerſités, ne trouvoit pas des Ames vénales & corruptibles. Ces uſages ont été abolis, les Procés ſont jugés en dernier reſſort dès la troiſiéme inſtance ; & le terme limité d'un an eſt preſcrit aux Juges, dans lequel ils doivent terminer les cauſes les plus litigieuſes.

Il nous reſte encore à dire quelques mots ſur les Loix qui impliquent contradiction, ſoit par les termes, ſoit par le ſens même.

Lorsque dans un Etat les Loix ne ſont pas raſſemblées en un ſeul Corps, il faut qu'il y en ait qui ſe contrediſent entre-elles : comme elles ſont l'ouvrage de différens Legislateurs, qui n'ont pas travaillé ſur le même Plan, elles manqueront de cette unité ſi eſſentielle & ſi néceſſaire à toutes les choſes importantes.

Quintilien liv. 7. ch. 7.

Quintilien traitte de cette matiére dans ſon livre de l'Orateur ; & nous voyons, dans les Oraiſons de Ciceron, qu'il oppoſe ſouvent une Loi à une autre. Nous trouvons de même, dans l'Hiſtoire de France, des Edits, tantôt en faveur, & tantôt contre les Huguenots. Le beſoin de rédiger ces ſortes d'Ordonnances eſt d'autant plus indiſpenſable, que rien n'eſt moins digne de la Majeſté des Loix, (qu'on

Edit de Nantes de 1598. revoqué par Louis XIV.

ſup-

ſuppoſe toujours établies avec ſageſſe,) que d'y découvrir des contradictions ouvertes & manifeſtes.

L'Edit contre les Duels eſt très-juſte, très équitable, très-bien fait : mais il n'amene point au but que les Princes ſe ſont propoſé en le publiant; des prejugés plus anciens que cet Edit l'emportent ſur lui de haute-lute, & il ſemble que le Public, rempli de fauſſes opinions, ſoit convenu tacitement de n'y point obeïr. Un point d'Honneur mal entendu ; mais généralement reçû, brave le Pouvoir des Souverains ; & ils ne peuvent maintenir cette Loi en vigueur, qu'avec une eſpece de cruauté. Tout homme qui a le malheur d'être inſulté par un Brutal, paſſe pour un lâche dans tout l'Univers, s'il ne ſe venge de ſon affront, en donnant la mort à celui qui en eſt l'Auteur : ſi cette affaire arrive à un Homme de Condition, on le regarde comme indigne des Titres de Nobleſſe qu'il porte ; s'il eſt Militaire, & qu'il ne termine point ſon différent, on le force de ſortir avec ignominie du Corps dans lequel il ſert, & il ne trouve de l'Emploi dans aucun Service de l'Europe. Quel parti prendra donc un Particulier, s'il ſe trouve engagé dans une Affaire auſſi épineuſe ? Voudra-t-il ſe deshonorer en obeïſſant à la Loi, ou ne risquera t-il pas plutôt ſa Vie & ſa Fortune pour ſauver ſa Réputation ?

Le point de la difficulté qui reſte à réſoudre, ſeroit de trouver un expédient, qui, en conſervant l'honneur aux Particuliers, maintint la Loi dans toute ſa vigueur.

La puiſſance des plus grands Rois n'a rien pû contre cette Mode barbare. Louis XIV. Fréderic I. & Fréderic Guillaume, publierent des Edits rigoureux contre les Duels : ces Princes n'avancerent rien ; ſinon que les Duels changerent de nom, & paſſerent pour des rencontres; & que bien des Nobles qui avoient été tués, furent enterrés, comme étant morts ſubitement.

Si tous les Princes de l'Europe n'aſſemblent pas un Congrés, & ne conviennent entre-eux d'attacher un deshonneur à ceux qui malgré leurs Ordonnances tentent de s'égorger dans ces combats ſinguliers ;

liers; ſi, dis-je, ils ne conviennent pas de refuſer tout Aſile à cette eſpece de Meurtriers, & de punir ſévérement ceux qui inſulteront leurs pareils, ſoit en paroles, ſoit par écrit, ou par voies de fait, il n'y aura point de fin aux Duels.

Qu'on ne m'accuſe point d'avoir hérité des Viſions de l'Abbé de Saint-Pierre: je ne voi rien d'impoſſible à ce que des Particuliers ſoumettent leurs querelles à la déciſion des Juges, de même qu'ils y ſoumettent les differents, qui décident de leurs fortunes: & par quelle raiſon les Princes n'aſſembleroient-ils pas un Congrés pour le bien de l'Humanité, aprés en avoir fait tenir tant d'infructueux ſur des ſujets de moindre importance? J'en reviens là, & j'oſe aſſurer que c'eſt le ſeul moyen d'abolir en Europe ce Point-d'Honneur mal placé, qui a coûté la Vie à tant d'honnêtes-gens, dont la Patrie pouvoit s'attendre aux plus grands ſervices.

Telles ſont en abregé les réfléxions que les Loix m'ont fournies: je me ſuis borné à faire une Eſquiſſe au lieu d'un Tableau, & je crains même de n'en avoir que trop dit.

Il me ſemble enfin que, chez des Nations qui ſortent à peine de la Barbarie, il faut des Legislateurs ſévères; que, chez les Peuples policés dont les Mœurs ſont douces, il faut des Legislateurs humains.

S'imaginer que les Hommes ſont tous des Démons, & s'acharner ſur eux avec cruauté, c'eſt la viſion d'un Miſantrope farouche: ſuppoſer que les Hommes ſont tous des Anges, & leur abandonner la bride; c'eſt le rêve d'un Capucin imbécile: croire qu'ils ne ſont, ni tous bons, ni tous mauvais; récompenſer les bonnes actions au delà de leur prix, punir les mauvaiſes au deſſous de ce qu'elles méritent, avoir de l'indulgence pour leurs foibleſſes, & de l'humanité pour tous, c'eſt comme en doit agir un Homme raiſonnable.

(o)

EXA-

EXAMEN DE L'USURE
SUIVANT LES PRINCIPES DU DROIT NATUREL,
PAR M. FORMEY.

Il y a peu de matiere ſur laquelle on ait autant écrit & diſputé que celle de l'USURE. Philoſophes, Theologiens, Juriſconſultes, ſemblent avoir multiplié à l'envi les prétendües difficultés dont elle eſt heriſſée. Je n'ai pas deſſein de donner ici l'Hiſtoire de cette Controverſe : elle me meneroit trop loin, & d'ailleurs on peut ſe ſatisfaire abondamment là deſſus, en conſultant les ſavans Auteurs que j'indique au bas de la page. *

Je ne m'arrêterai point non plus aux ſcrupules, qui ont embaraſſé de tout tems les eſprits ſur cette doctrine ; qui ont engagé les anciens Philoſophes eux-mêmes, Ariſtote, Caton, Seneque, à condamner toute uſure ; qui ont dicté tant de Canons de Concile** dans tous

* Voyez M. *Boëmer* dans le V. Tome de ſon *Jus Eccleſiaſticum Proteſtantium*, & M. *Thomaſius* dans la IV. Partie de ſon Commentaire ſur les *Inſtitution. Jur. Can.* de *Lancelot*. Ceux qui ont du tems & de la patience, peuvent y joindre l'Ouvrage de *Braderſen*, *de Uſuris licitis & illicitis, vulgo nunc compenſatoriis*, gros *in folio*, qui a paru en 1743. à la Haye, chez *Ant. Groot*. Le P. *Dominique Concina* l'a refuté par un Ecrit intitulé : *Uſura contractus trini Diſſertationibus Hiſtorico-Theologicis demonſtrata* 1746. Romæ. *in quarto*.

** Les Loix des Hebreux ont été une des principales ſources d'embarras pour les Juriſconſultes Chrêtiens. *Grotius* leur avoit d'abord attribué une néceſſité mo-

tous les Siecles, qui ont fait renouveller avec une nouvelle chaleur toute la Diſpute au commencement de celui-ci, & qui tout nouvellement ont excité une eſpece de tempête contre l'Ouvrage du célébre Marquis *Maffei*. Je me borne à donner un petit Eſſai de ce que les premiers principes du Droit Naturel fourniſſent de poſitif & d'inconteſtable au ſujet de l'Uſure. Cela ſuffit, ſi je réüſſis dans mon deſſein, pour terminer toute diſpute. On verra dans mes Réfléxions la preuve évidente, ſi je ne me trompe, d'une Remarque que je ne me laſſerai jamais de faire, parce qu'il n'y a presque point de ſujet dans l'examen duquel l'occaſion ne s'en préſente; c'eſt que l'obſcurité de la plupart des Queſtions qui ſont agitées, vient uniquement de ce qu'on néglige de remonter aux Notions les plus diſtinctes, les plus générales, aux Notions communes, qui ſont néanmoins les ſeuls guides incapables de nous tromper.

Il y a deux manieres de ſe communiquer l'uſage des choſes; l'une gratuite, & l'autre avec profit. Quand on le fait avec profit, les choſes peuvent être de deux eſpeces differentes: il y en a que l'uſage ne détruit point, comme une Maiſon, un Caroſſe, un Cheval; il y en a d'autres au contraire qui périſſent en quelque ſorte entre les mains de celui qui les reçoit, comme l'argent & les denrées.

L'USURE dans le ſens le plus général eſt *tout ce que l'on donne pour l'uſage d'une choſe, dont on ne peut jouïr qu'en la conſumant, & par conſéquent en diſpoſant d'elle, comme de ſon bien propre.* C'eſt pourquoi il eſt de la nature du prêt à uſure, que celui qui le reçoit en acquiere la propriété, & en devienne maitre abſolu. Cela diſtingue eſſentiellement l'uſure du *prix de loüage*, ou de toute autre rétribution ſtipulée pour ſe ſervir d'une choſe que l'uſage ne détruit

rale dans ſon *Droit de la Guerre & de la Paix*, L. II. ch. XII. §. 20. Mais il changea depuis de ſentiment, comme on le peut voir dans ſa longue Note ſur S. Luc, que M. *Barbeyrac* a inſerée dans la ſienne ſur l'endroit cité. M. *Noodt* a épuiſé cette matiere dans ſon Traité *de Fœnore & Uſuris*, où il ſatisfait parfaitement aux Objections tirées de l'Ecriture.

truit pas. Et comme il n'y a rien dont la deſtruction ſoit plus prompte & plus ſenſible que celle de l'argent confié à quelcun pour le faire valoir par le Négoce, l'Uſure purement & ſimplement ainſi dite ſe prend conſtamment pour *l'argent qu'on donne, afin d'avoir l'uſage d'une ſomme d'argent que quelcun nous confie.* Comme il n'eſt point encore queſtion de la Moralité de ces engagemens, ces définitions ſont arbitraires, & il ne s'agit que de leur donner la préciſion Logique, propre à les rendre utiles dans la ſuite de nos raiſonnemens.

Je trouve l'etat de la Queſtion propoſé ſi nettement dans *Domat*,* que je vais me ſervir de ſes propres termes. „Il ne s'agit, „ pour ſçavoir ſi l'on peut prendre l'interêt du prêt, que d'exami- „ ner; ſi, comme il y a deux manieres de donner l'uſage d'un che- „ val, d'une maiſon, d'une tapiſſerie, & des autres choſes ſembla- „ bles, l'une par le prêt à uſage, & gratuitement, & l'autre par un „ loüage pour un certain prix, & l'une & l'autre honnête & licite; „ il y a auſſi deux manieres de donner l'argent, les grains, les li- „ queurs, & les autres choſes ſemblables, l'une par un prêt gratuit, „ & l'autre par un loüage, ou prêt à profit. De ſorte que comme il „ eſt indifféremment juſte & naturel, que celui qui donne ſon che- „ val, ait le droit de dire, qu'il le prête, ou bien qu'il le loüe; il „ ſoit de même indiſtinctement naturel & juſte que celui qui donne „ ſon argent, ſon bled, ſon huile, ſon vin, ait le choix de dire qu'il „ la prête à interêt, ou ſans interêt.„ Il eſt ſurprenant que cet Auteur partant delà, ait pu s'égarer comme il l'a fait, & former ſur un ſujet auſſi exactement exprimé, des Raiſonnemens dont nous montrerons plus bas la foibleſſe. Commençons par traitter la Queſtion en elle-même.

* *Loix Civil.* p. 75. de l'Edit *in fol* Luxemb. 1702.

D'abord je poſe en fait, que l'uſage que nous cedons à autrui d'un bien quelconque, eſt ſuſceptible d'eſtimation, tant par rapport à celui qui cede l'uſage, que par rapport à celui qui l'obtient. En effet l'un & l'autre y ſont intereſſés: celui qui reçoit, y trouve du profit; celui qui donne, ſe dépouïlle d'un avantage, & ſe conſtitüe en perte,

à moins que quelque compenſation ne le dédommage. Tout cela ſe réduit au calcul, ſoit qu'il s'agiſſe d'argent, ou de denrées ; car les denrées peuvent toujours être évaluées en argent.* Que je prête une telle ſomme, ou tant de boiſſeaux de bled valant cette ſomme; que je ſtipule qu'au bout d'un an le froment en nature, ou ſon juſte prix, me ſeront reſtitués; c'eſt la même choſe. D'un côté, celui qui a l'uſage de mon argent, ou de mon bled, en tire parti; de l'autre j'aurois pu moi-même en tirer ce parti, & mon capital, dont le produit doit ſervir à ma ſubſiſtance, demeure inutile en attendant. J'ai, par exemple, deux cens Ecus en argent comptant, dont je puis faire l'emplette d'un Caroſſe de remiſe, que je loüerai à tant de profit. En prêtant mon argent je me dépouïlle de cet avantage, & je mets en état celui qui reçoit cette ſomme en eſpeces, de ſe le procurer, ou même un plus grand, ſi l'occaſion s'en préſente. Il en eſt de même des denrées, que je puis convertir en argent, ou en autres choſes, dont l'uſage me donnera du profit.

C'eſt une ſubtilité bien vaine que de prétendre, comme le font quelques Auteurs, que dans le prêt, l'uſage ne ſçauroit être diſtingué de la choſe même, & qu'il ſe confond avec la propriété; de ſorte qu'auſſi-tôt qu'on accorde à quelcun l'uſage d'une choſe qui ſe détruit, on lui en transfere en même tems la propriété. On conclut de là tres inconſéquemment, qu'il ſuffit que le Débiteur rende une choſe pareille, ou de même eſpece, & que le Créancier n'a aucun droit d'exiger quelque choſe de lui, pour l'uſage qu'il en fait. Où ſont les prémiſſes, où eſt le nœud de la concluſion dans ce raiſonnement?

* La Monnoye publique fait le prix de toutes les choſes qui ſont dans le Commerce. Le Juriſconſulte Romain en donne une idée fort nette dans la Loi I. des Dig. *de contrab. emt* en ces termes : *Electa materia cujus publica ac perpetua eſtimatio difficultatibus permutationum æqualitate quantitatis ſubveniret.* C'eſt ce Prix des choſes déterminé par l'argent qu'on nomme *Prix éminent:* au lieu que le *Prix vulgaire* ſe fonde ſur les rapports & les proportions que les choſes mêmes ont entr'elles.

ment? On ne ſçauroit diſtinguer l'uſufruit de la conſommation de la ſubſtance. Soit. Donc on ne ſçauroit eſtimer le droit qu'on donne à quelcun de conſumer une choſe qu'il emprunte de nous, & qu'il ne nous rendra que dans un certain eſpace de tems, (car la circonſtance du tems eſt eſſentielle ici, comme nous le verrons plus bas.) Cette conſéquence ne découle aſſurément d'aucun principe.

Je toucherai legèrement ici les raiſons de *Domat*, dont j'ai promis de parler. Ses Argumens les plus forts ſont pitoyables. „ L'argent, dit-il, par exemple, ou les choſes conſomptibles que je „ prête, ne portent de leur nature aucun fruit.„ Mais ma Maiſon, mon Champ, mon Caroſſe, en produiſent-ils d'eux-mêmes? Ne faut-il pas que je les faſſe valoir? „La ſomme que je prête à autrui, „ continuë-t-il, demeurera peut-être ſans fruit chez lui, ou même „ il la perdra.„ Mais m'emprunte-t-il de l'argent pour l'enfouïr? Il peut le perdre, dites-vous, en s'en ſervant. Cela eſt vrai; mais quand je troque mon champ contre une Maiſon, n'y a-t-il pas les mêmes risques. La Maiſon eſt combuſtible; & le champ que j'ai donné en échange, ne l'etoit pas. Ne puis-je pas auſſi troquer mon champ contre un nombre de meſures de bled, & tout le hazard ne retombe-t-il pas alors ſur moi? „Enfin celui qui prête, dit *Domat*, „ n'entre dans aucune part, ni de l'induſtrie, ni de la perte de celui „ qui emprunte.„ Je répons qu'il y a là une trés juſte compenſation. Celui qui m'a emprunté de l'argent, s'eſt procuré telles choſes, dont il tire tels avantages, qui le mettent avec le tems en état de me rembourſer mon Capital, & même de s'en amaſſer un.

L'eſtimation qui peut-être faite de l'uſage d'une choſe dans le prêt à profit, n'eſt pas fixe & invariable; elle dépend au contraire des circonſtances, & du plus ou moins d'avantage qui s'y trouve pour le Prêteur & pour l'Emprunteur. Ceci mérite une attention particuliere, & fournit une régle conſtante pour diſtinguer entre le *Fœnus*, & l'*Interêt*, ou l'Uſure honnête, que l'on ne ſçauroit interdire, ſans renoncer aux principes du Droit Naturel. On ſe méprendroit con-

ſidérablement en ſe réglant ſur la ſeule quantité d'argent, pour la hauteur des interêts ſtipulés. Le même *quantum* peut-être dans certaines circonſtances une odieuſe extorſion, & dans d'autres une eſpece de grace & de condeſcendance. Un Marchand fait un Négoce où ſon argent lui rapporte 30. 40. 50. pour cent. Un Artiſan, s'il a de l'argent à faire valoir, en tirera à grand peine 10. 12. 15. Eſt-il naturel de leur laiſſer ſon Capital au même interêt?

Voici encore un Exemple pris de la diverſité des circonſtances mêmes. Je vous prête mon blé dans une tems où il vaut deux Ecus le boiſſeau; quand vous me le rendrez, il n'en vaudra qu'un. Ne faut-il pas que je joigne aux interêts le ſupplément de cette perte; & quelque forts qu'ils puiſſent paroître par une ſemblable addition, ils ne vont pourtant pas au delà de ce que les circonſtances exigent.

En me réglant donc ſur ces conſidérations, je puis eſtimer équitablement ce que vaut l'uſage de la choſe que je prête, & ne la prêter qu'aprés m'être aſſuré de ce retour. C'eſt une aſſertion dénuée de toute preuve, que de dire que le Prêt dont il s'agit, eſt gratuit de ſa nature. Pourquoi le feroit-il plutôt que le Prêt à uſage? C'eſt au contraire une vérité conſtante, que perſonne n'eſt obligé de donner à un autre, ou de faire gratis, ce que celui-ci eſt en état de donner, ou faire réciproquement. Autant vaudroit que les choſes fuſſent demeurées en commun. Les mêmes raiſons qui ont perſuadé aux hommes que l'etabliſſement des domaines étoit préférable à la communauté primitive, prouvent auſſi qu'on n'eſt point obligé de donner ou de faire gratis pour un autre, lorsque cet autre peut donner ou faire réciproquement. Si donc je donne à quelcun l'uſage de mon bien, & que cet uſage ſoit, comme nous avons vû qu'il l'eſt, ſuſceptible d'eſtimation, j'ai naturellement droit de demander & de me faire donner ce que vaut cet uſage. Ainſi, quand on propoſe la Queſtion générale; l'Uſure eſt-elle licite? on peut ſans héſiter répondre affirmativement.

Entrons

Entrons à préſent dans quelque détail. Celui qui m'emprunte une ſomme d'argent, ne veut pas la tenir oiſive dans ſon Coffre, il ſe propoſe de la faire valoir. Que fais-je à proprement parler en mettant mon Capital entre ſes mains, afin que ſon induſtrie s'exerce à le rendre profitable? J'entre réellement en Société avec lui, quoique je ne prenne pas ces engagemens étroits qui lient des Aſſociés de commerce proprement ainſi nommés. Mon bien & ſon travail ſervent en commun à ſoutenir ſon Négoce; il faut donc que chacun de nous perçoive des fruits proportionnels à ce qu'il met du ſien. On diroit d'abord que les choſes ſont égales, ſi tant eſt que l'avantage ne fut pas pour celui qui donne l'argent, qu'on peut regarder comme le mobile eſſentiel. Cependant un peu plus d'attention découvre le contraire.

Je donne mon bien, il eſt vrai; mais celui qui le reçoit, me le garantit, & s'oblige à me le rendre, tandis qu'il s'expoſe ſeul à tous les risques des pertes à peu prés inévitables dans le Négoce. Deux Aſſociés proprement dits partagent les profits, parce qu'ils courent même fortune, & ſupportent enſemble les pertes. Mais, dans la Societé du ſimple prêt, ſeroit-il juſte que, tranquille ſur le fonds de mon bien, je fuſſe auſſi avantagé que celui qui, du ſoir au matin, peut voir ſes entrepriſes traverſées par les disgraces les plus cruelles. La régle naturelle de l'Uſure, ou de l'Interêt, eſt donc de tirer de ſon argent le profit qui revient à une partie contractante dans une Société; mais déduction faite des riſques & dommages, qui tombent uniquement ſur l'Emprunteur. Or tout cela eſt fort aiſé à régler ſur l'etat actuel du Commerce, & ſur les proportions entre les eſpeces & les denrées.

On ne ſçauroit mieux confondre ceux qui condamnent toute Uſure que par l'idée que nous venons d'indiquer, & qui eſt une de ces notions communes, ſur lesquelles nous avons promis de fonder nos raiſonnemens. Ils ne ſçauroient nier que les Sociétés, ou Aſſociations, ne ſoient une choſe juſte & permiſe. Ils ne ſont pas moins obligés

de

de reconnoître que dans ces Aſſociations l'un peut fournir ſon argent, l'autre ſon induſtrie. Pourquoi donc cette derniere clauſe ſeroit-elle illicite; ſavoir, que celui qui fournit ſon argent, ne ſe reſerve qu'une partie du profit qui en naît, afin d'aſſurer ſon Capital, & de ſe mettre à couvert des riſques du Commerce? * Or c'eſt là préciſément en quoi conſiſtent les prêts uſuraires. Je donne à quelcun 4000. Ecus, avec leſquels il eſt probable qu'il gagnera 800. Ecus par an. Mais il a ſeul toute la peine, qui en vaut bien 400., & il court les riſques que j'evaluëra à 200. Il reſtera donc 200. Ecus pour le profit de mon argent, que je puis ſtipuler & recevoir licitement.

Voici une autre maniere de conſidérer la choſe. En donnant mon argent à un Négociant, avant toute ſtipulation, j'ai naturellement part au gain annuel qui en proviendra. Mais, comme ce gain eſt une choſe variable & incertaine, & qu'il y a bon an, & mal an, je puis en vendre l'eſperance, & au lieu de ma quote-part tous les ans, m'en tenir à un revenu fixe & proportionnel a ces inégalités. Il eſt impoſſible de trouver rien dans tout cela qui donne la moindre atteinte au Droit Naturel; & il l'eſt également de ne pas reconnoitre, que l'Uſure, ou l'Interêt, ne different point de ces ſuppoſitions.

Jusqu'ici nous n'avons parlé que de l'argent placé dans le Négoce. Changeons le cas, & raiſonnons ſur les interêts de l'argent prêté pour acquerir quelque fonds, ou placé en hypotheque ſur ce fonds, afin que le poſſeſſeur ne ſoit pas réduit à la néceſſité de le vendre. La premiere idée qui ſe préſente naturellement, c'eſt que ce prêt revient à la même choſe, que ſi vous achetiez un fonds en communauté avec quelcun, & lui donniez enſuite votre portion à loüage. Ici il n'en eſt pas de même que dans le Négoce; vôtre communauté eſt complette, & vous autoriſe à percevoir des revenus proportionnels à ce que le fonds rapporte, & à ce que vous avez fourni pour ſon acquiſition. Vous avez prêté 12000. Ecus à quelcun qui a fait

* Pour prouver que les riſques peuvent être évalués, il n'y a qu'à faire attention aux *Contracts d'aſſurance*, qui ſont généralement reconnus pour très licites.

a fait emplette d'une Terre de 30000. Cette Terre rapporte 1500. Ecus par an; vous pouvez en tirer 600. d'interêt pour vos 12000., parce que toutes les proportions ſont égales. On ne ſçauroit objecter que le poſſeſſeur a pourtant certains riſques à ſupporter, qui devroient changer la proportion; car il eſt quelquefois permis de contracter une Societé dans laquelle on partage également le profit, ſans entrer dans les pertes. Cette Propoſition qui appartient à la doctrine des *Actes permutatoires*, ou *Contracts onéreux*, eſt inconteſtable. Il y a bien des cas où le ſecours d'un autre vous eſt ſi utile, ſi néceſſaire, que plutôt que d'en être privé, vous conſentez à vous charger de tous les événemens fâcheux. C'eſt une eſpece de pacte ſéparé *de periculo remittendo*, qu'on ajoute au Contract de Societé, & qui n'en change point la nature. En appliquant donc ce principe au cas que nous examinons, celui qui prête ſon argent pour procurer à un autre les moyens d'acheter, ou de conſerver quelque fonds, peut le prêter dans des conjonctures, où l'Emprunteur trop heureux de trouver quelcun qui ſoit diſpoſé à lui faire cette avance, trouve ſon avantage à partager également le profit, même en garantiſſant les riſques.

Allons plus loin. Nous n'avons encore fait qu'entrer en communauté de gain avec celui qui fait valoir nôtre argent; & cela va, pour ainſi dire, de plein pied. Mais prenons des cas, où celui auquel nous prêtons nôtre argent n'en tire rien, & ne fait par là que ſubvenir à quelque néceſſité preſſante, ſortir de quelque mauvais pas. Quelcun eſt condamné à 500. Ecus d'amende; il n'a pas dequoi les payer ſur le champ, il ſera mis en priſon, ou pis encore lui arrivera, s'il ne trouve cette ſomme. Je l'ai chez moi, j'allois la placer à un interêt legitime; je conſens à la prêter à cet homme qui eſt dans le beſoin: ſuis-je obligé de le faire ſans interêt? Ceux qui trouvent quelque difficulté dans cette Queſtion, & qui pour l'embarraſſer encore, viennent débiter des Maximes de charité, ne raiſonnent que ſur des idées extrémement confuſes. Il s'agit du Droit, & de l'obli-

gation que la Nature impoſe. S'etend-elle cette obligation à détourner le mal d'un autre à mon propre dommage, dans les cas où je puis recevoir de cet autre des indemniſations, qui lui ſont moins onéreuſes, qu'il ne me le ſeroit d'en être privé. Si cela étoit, un homme qu'on va mettre en priſon pour une amande à laquelle il a été condamné, à cauſe d'une faute qu'il ne peut imputer qu'à lui-même, pourroit également m'obliger à lui faire un don de la ſomme dont il a beſoin pour payer cette amande, & me faire ainſi porter ſa ſottiſe. Tout cela répugne à l'equité naturelle, qui permet au contraire de tirer du profit d'un argent prêté à une perſonne qui n'en tire point à la verité elle-même, mais qui avoit interêt à obtenir l'uſage de mon argent, tandis que de mon côté j'avois interêt à n'accorder cet uſage que moyennant une certaine rétribution.

En effet prêter ſon argent ſans interêt, ce n'eſt pas, à proprement parler, prêter; c'eſt donner. La choſe eſt facile à comprendre. L'uſage de mon argent eſt ſuſceptible d'eſtimation, comme nous l'avons vû, & peut-être évalué en argent. Cent Ecus prêtés en valent cinq par an. Je les prêté à quelcun pour un an ſans interêt. Qu'eſt-ce à dire autre choſe, ſinon que je lui fais préſent de cinq Ecus, que j'avois naturellement droit d'exiger.

Il réſulte de là, que, bien loin qu'il ſoit illicite de recevoir des interêts, il le ſeroit presque toujours de n'en point prendre. J'ai une Famille à entretenir, & je ne puis le faire que par l'interêt de mon Capital. Je le confie à un Marchand, qui en tire 20. ou 30. pour cent par an. Mes interêts annuels montent a 2. ou 300. Ecus par an; je les lui laiſſe, c'eſt à dire, que je donne annuellement à un Marchand qui nage dans l'opulence une ſomme ſur laquelle eſt fondée la ſubſiſtance de moi & des miens. Cela eſt-il plauſible & naturel? Cela eſt-il même licite? Voilà pourtant où nous menent ceux qui proſcrivent toute uſure.

Tant s'en faut néanmoins que nous détruiſions ici tous les offices d'humanité, & que nous établiſſions que l'on peut prendre des interêts,

terêts, même en ſuivant la taxe ordinaire, en tout tems, & de toutes ſortes de perſonnes. Cela ſeroit ſouvent trés odieux & parfaitement illicite. Trois circonſtances caracterifent les cas dont nous parlons. 1. Vous avez de l'argent en caiſſe, dont vous ne vouliez faire aucun uſage. 2. Une perſonne ſe trouve dans le beſoin, & 3. Il ne s'agit que d'un terme fort court pour la reſtitution de l'emprunt. Si vous demandez alors quelque interêt, vous êtes un vrai Uſurier dans le ſens ordinaire de ce terme. Il n'y a qu'un deſir bas, une honteuſe avidité pour toute ſorte de gain, qui puiſſe vous faire perdre de vuë qu'il ne s'agit pas d'une occaſion de gagner, mais d'une occaſion mille fois plus précieuſe pour un bon coeur, c'eſt celle d'obliger, de rendre ſervice.

Il en eſt de même de la ſuppoſition ſuivante. L'argent que vous prêtez a quelcun, ne peut lui produire que ce qui eſt abſolument néceſſaire pour ſa ſubſiſtance, & s'il vous paye des interêts, il eſt réduit à la derniere miſere. Vous lui donnez du pain d'une main, en lui prêtant dequoi faire aller ſon métier, ſon petit trafic; mais vous le lui arrachez de l'autre, en exigeant vos interêts. Dans un pareil cas l'uſure eſt aſſurément illicite; & il ne ſçauroit être permis d'accroître ſon bien d'un gain, qui laiſſe celui dont le travail produit ce gain en proye à toutes les horreurs de la pauvreté. Le Droit Naturel enſeigne formellement que l'on eſt obligé d'aider de tout ſon pouvoir ceux qui ſont dans le beſoin, pour les mettre en état de s'en tirer, & les empêcher de tomber dans de fâcheuſes extremités. Et ce ſeroit violer ces offices d'humanité que de recevoir des interêts dans le cas que nous venons d'indiquer.

Mais, direz-vous, j'ai beſoin moi même de mes interêts, je ſuis à l'étroit, & ce ſera moi qui ſouffrirai, ſi j'en ſuis privé. La réponſe eſt aiſée. Ce n'eſt plus vous qui êtes appellé à la pratique de ces devoirs, ils ſont cenſés n'être point en vôtre pouvoir, & tous ſes offices d'humanité ne ſont des obligations qu'avec cette reſtriction; autant qu'ils ne nous obligent pas à négliger ce que nous devons

à nous mêmes. Ainſi une perſonne qui ſçait qu'elle n'a préciſément que ce qu'il faut pour vivre, en jouïſſant de tous les interêts de ſon petit bien, ne doit pas prêter ſon argent à quiconque ne pourroit, en faiſant valoir cet argent, en tirer autre choſe que ce qui eſt eſſentiel à ſa propre ſubſiſtance. La pratique du devoir qui oblige à ſe relâcher de ſon droit, ne regarde que les perſonnes, qui ayant un bien honnête, & diverſes ſommes diſperſées, en auront quelcune qui ſe trouvera entre les mains d'une perſonne placée dans le cas ſuppoſé. On ſent bien qu'il n'y a point de comparaiſon entre la perte legere qui en réſulte d'un coté, & la ruïne inévitable de l'autre. Le coeur & ſes ſentimens ne doivent-ils pas tenir ici lieu de Loi?

Il pourroit néanmoins ſe rencontrer une colliſion, un conflict de devoirs, qu'il faut toucher ici. On a prêté ſon avoir à une perſonne, qui, dans le tems qu'elle l'a reçu, pouvoit gagner ſa vie là deſſus, & payer les interêts. La ſituation de cette perſonne a changé, le payement des interêts qu'elle doit, va au détriment de ſon néceſſaire; & le mien réciproquement ſouffre de ce qu'ils ne ſont pas payés. Il faut alors deſcendre dans des détails d'eſtimation & de proportion, voir jusqu'où peut s'etendre l'effort de part & d'autre, & régler là deſſus les portions reſpectives. Au lieu des interêts entiers, cela ſera réduit aux trois quarts, à la moitié, &c. ſuivant la nature des beſoins, & toujours en ſe ſouvenant que la balance doit pencher du coté de celui à qui le bien appartient; lequel comme nous l'avons déjà vû, ne ſçauroit être aſtreint à aucune obligation qui emporte l'entiere négligence de ce qu'il ſe doit à ſoi-même. *

En

* C'eſt ſuivant ces principes qu'il eſt réglé dans les Loix que *colon à une portion des fruits ſouffre les cas fortuits*, & qu'il ne peut rien prétendre contre le Maître, ni pour la culture, ni pour la ſemence, quelque perte qui puiſſe arriver par un cas fortuit, quand même il n'en auroit aucune récolte. La raiſon que *Domat* en allegue, eſt préciſément la même dont je me ſuis ſervi ci-deſſus. „ Car, *dit-il*, leur bail fait entr'eux une eſpece de Societé, où le propriétaire

En prêtant des choſes que l'on pourroit vendre, c'eſt tout comme ſi l'on prêtoit de l'argent effectif; & ce que nous avons dit pour établir que les interêts ſont licites, ſubſiſte dans toute ſa force. Les mêmes reſtrictions ont auſſi lieu. On vous demande à emprunter pour peu de tems une choſe que vous avez ſimplement en reſerve, ſans penſer à la faire valoir, une certaine quantité de bled qui repoſe dans vos greniers, & que l'on vous rendra à la moiſſon prochaine: l'humanité veut que de ſemblables prêts ſoient gratuits.

Paſſons à préſent à une dépendance de cette matiere, qu'on a auſſi embaraſſée de difficultés, dont nos principes viendront à bout avec la même facilité. Il s'agit de ce qu'on appelle *Interêt de l'interêt*. On peut bien s'imaginer que ceux, qui dans leur enthouſiaſme ont voulu ôter à la Societé une reſſource auſſi utile que celle de l'Uſure permiſe, doivent ſe récrier étrangement contre l'uſure de l'uſure. Voyons en quoi elle conſiſte, & enſuite il ſera aiſé de décider. J'ai 10000. Ecus placés, qui au bout de l'an rapporteront 500. Ecus. Le jour de l'echéance, cette ſomme de 500. Ecus eſt à moi, je puis la prendre, & l'aller remettre à quelcun, qui à pareil jour de l'année ſuivante m'en donnera 25. Ecus d'interêt. Au lieu de cela je la laiſſe à mon premier Débiteur, qui ſe trouve me devoir 10500. Ecus, & qui aura à me payer dans un an 525. Ecus. Je continuë ainſi d'année en année, & ma ſomme groſſit, double, triple par ce moyen. Y a-t-il là dedans quelque choſe qui bleſſe le moindre principe d'equité? Ces ſommes qui m'appartenoient toutes aux jours d'echéance, diſperſées en divers endroits, & leurs interêts réünis par la même manoeuvre, auroient produit exactement le même accroiſſement de Capital, auquel une ſeule opération me conduit chez mon unique Débiteur. Ce Débiteur fait ce qu'auroient

„ taire donne le fonds, & le fermier, ou coloh, la ſemence & la culture, „ chacun hazardant la portion que cette Societé lui donnoit aux fruits. „ *Loix Civil.* p. 63.

roient fait les autres ; il employe avec profit des ſommes qui n'auroient point été à lui, puiſqu'il me les auroit comptées dans les termes indiqués, & que je lui ai laiſſées, parce qu'étant à moi, j'etois le maître d'en diſpoſer. Il faut aſſurément avoir bien peu de netteté dans l'eſprit pour ne pas ſuivre le fil d'idées auſſi ſimples, & ne pas ſe convaincre de leur juſteſſe. Il eſt donc permis de tirer de cette maniere l'interêt de l'interêt, & il l'eſt même de faire là deſſus avec ſon Débiteur l'accord nommé *Anatocisme*, qui régle une fois pour toutes qu'à chaque payement d'interêt, il ajoutera les interêts au principal, & que les interêts ſuivans ſeront proportionnés à cet accroiſſement de la maſſe.

Les mêmes principes nous conduiſent à décider, que, ſans aucun accord préalable, quand un Débiteur laiſſe accumuler les interêts, cela ſe fait dans la même progreſſion, & qu'à proportion du nombre d'années qui s'eſt écoulé, nous pouvons redemander, ſuivant le Droit Naturel, (car dans tout ceci nous n'avons aucun égard aux reſtrictions établies par les Loix Civiles,) nous pouvons, dis-je, redemander toute la ſomme qui en réſulte, fut-elle au delà du double de la premiere ſomme que nous avons prêtée. Car, conformément au §. précedent, toutes ces rentes échües, chacune en leur tems, étoient de nouvelles ſommes, qui auroient fructifié préciſément de la maniere & dans les proportions, ſur leſquelles nous fondons nos prétentions actuelles. Il n'eſt point queſtion non plus ici des cas d'inſolvabilité, où les offices de l'humanité reprennent la place ; il s'agit uniquement du Droit conſideré en ſoi.

On peut donc diſtinguer entre les Uſures *volontaires*, ou *conventionelles*, & les Uſures *néceſſaires*, qui ont lieu ſans aucune convention, comme ſont celles dont nous venons de parler, & qui naiſſent du retardement des interêts courans. Seulement, comme on pourroit être préſumé conſentir au retardement du Débiteur, ſi on ne l'aver-

l'avertiſſoit pas qu'on prétend être payé, c'eſt du jour de l'avertiſſement que commence le droit d'exiger l'interêt de l'interêt.

Tout ce qui paſſe les limites que nous venons de poſer devient Uſure *mordante*, & métier d'Uſurier ; choſes que l'humanité & la Religion déſaprouvent également, & qui ne doivent point être tolerées dans la Societé, puisqu'elles ne font qu'engraiſſer un vil Citoyen du ſang & de la ſubſtance d'une foule de malheureux. Les Caſuiſtes peuvent s'armer de toutes leurs déciſions, les Théologiens ranimer tout leur zele, les Prédicateurs déployer toute leur Eloquence, contre ces ſangſuës publiques. Mais, en voulant éviter une extremité, il faut toujours prendre garde de ne pas ſe jetter dans l'autre. Et c'eſt cependant ce qui arrive tous les jours, parce qu'on ne fait attention qu'aux mots, & que raſſemblant confuſément pluſieurs idées differentes ſous un même terme, on porte enſuite un jugement univerſel, dénué de vérité Logique, l'attribut ne pouvant être affirmé du ſujet dans toute ſon étenduë, & ne lui convenant que ſous certaines limitations, ou reſtrictions.

MEMOIRE

SUR L'APPERCEPTION DE SA PRO-PRE EXISTENCE.

PAR Mr. MERIAN.

Ceux qui s'attachent à décompoſer les connoiſſances humaines, & à les réſoudre dans leurs élémens, parviennent à des perceptions primitives, que l'on conſidere, comme objets d'un ſentiment immédiat de l'ame, nommé *Apperception*, *Intuition*, *ſimple Vûe*. Ce ſentiment raſſemble les matériaux des Sciences les plus ſublimes, & les plus abſtraites, comme ceux des connoiſſances les plus groſſiéres, & les plus vulgaires. Il trace les rudimens au premier des Philoſophes, auſſi bien qu'au dernier des payſans, & il dirige les premiers pas que nous faiſons dans la Logique naturelle. L'infinie variété, qui régne dans la tournure des eſprits, la grandeur des uns, la médiocrité, & la baſſeſſe des autres, ne proviennent vray-ſemblablement, que de la differente combinaiſon, & du different emploi de ce fond de perceptions que la nature ſemble nous avoir départi en commun, On trouveroit ſans doute une ſolution aiſée de la plupart des paradoxes de l'eſprit humain, ſi l'on pouvoit toujours reprendre le fil des penſées, & remonter juſqu'au point d'où elles ſont parties.

C'eſt

C'eſt une verité atteſtée par l'expérience, & démontrée par la raiſon, qu'on ne ſauroit connoître les facultés de l'entendement, qu'*a poſteriori*, ou après qu'elles ſe ſont déployées. En vain feroit-on ſes efforts pour les attraper ſur le fait, (ſi j'oſe m'exprimer ainſi,) ou dans l'opération même; lorsqu'on croira les ſaiſir, il ſe trouvera, qu'on ne fait que les mettre en uſage; & pour nous tenir à nôtre ſujet, aprés vous avoir donné la torture pour appercevoir l'apperception, il n'en réſultera tout au plus, que trois choſes, qui ſe ſuccédent: 1. Vous appercevrez quelque objet. 2. Vous vous ſouviendrez que vous l'avez apperçu. 3. Vous réfléchirez ſur l'acte, en vertu duquel vous l'avez aperçu.

La propoſition: *je m'apperçois àppercevoir*, eſt contradictoire; car il faudroit, pour que cela fut, que je fuſſe en même tems Moi-même & un autre, & que je puſſe, pour ainſi dire, appercevoir à travers de moi-même apperçevant; à peu près, comme on regarde les objets au travers des lunettes d'aproche; ou il faudroit, comme le Dieu Janus, regarder en avant, & en arriere, c'eſt à dire, appercevoir, & réfléchir dans le même inſtant. Si cela étoit, non ſeulement l'être appercevant pourroit ſe doubler, mais encore par la même raiſon ſe multiplier à l'infini: abſurdités trop palpables pour mériter qu'on s'y arrête.

Ce n'eſt donc, qu'en retournant ſur nos pas, & en réfléchiſſant ſur ce qui vient de ſe paſſer dans nôtre intérieur, que nous parvenons à nous former la notion de ce premier acte de l'être intelligent.

On peut dire en général, que les facultés intellectuelles ſe définiſſent elles mêmes par leur exercice, & que tout ce qu'on pourroit tenter par une autre voye pour les rendre intelligibles, ne feroit qu'y répandre plus d'obſcurité. On définiroit vainement la vûe, & les objets viſibles à un aveugle né; celui de Mr. *Locke* confondoit la couleur avec le ſon de la trompette. Un homme au contraire, qui a l'uſage de ſes yeux, n'a pas beſoin qu'on lui définiſſe ces choſes;

de même pour connoître l'apperception il ne faut qu'avoir apperçu; mais il le faut de toute néceſſité.

Encore n'en découvrons-nous que fort peu de choſe, ſavoir, qu'il exiſte une faculté, qui produit de certains actes. Dans la Phyſique on a découvert la ſtructure, & le mécanisme de l'oeil; on connoit la vûe, entant qu'elle ſe paſſe dans l'organe corporel; mais de cette modification de l'ame, qui eſt la vuë proprement dite, nous ne connoiſſons rien, que ſon exiſtence; & il en eſt de même de toutes les opérations des intelligences entant qu'intelligences.

Il ne nous reſte donc qu'à conſidérer les objets ſur lesquels nos facultés s'exercent; c'eſt ce que nous allons faire au ſujet de l'apperception. Nous puiſerons dans cette ſource les notions les plus préciſes, auxquelles il ſoit poſſible d'atteindre, & ſans prétendre ſonder les abîmes de l'eſprit humain, prenant l'éxperience pour guide nous ne bâtirons que ſur un petit recueil d'obſervations qu'elle nous fournit, perſuadés que c'eſt le ſeul moyen de traiter nôtre ſujet avec juſteſſe.

Dans un ſens tout ce que nous penſons, eſt immédiatement préſent à nos ames; mais dans un autre les connoiſſances acquiſes de vûe immédiate ſont oppoſées à celles, qui nous viennent par les voyes du raiſonnement, & de la réfléxion. A la rigueur on pourroit rapporter aux connoiſſances médiates les perceptions retracées dans la mémoire, & les ombres de l'imagination, comme copies des perceptions immédiates, qui les ont devancées; pluſieurs ſenſations même pourroient être nommées médiates, entant qu'elles marchent conſtamment à la ſuite d'autres ſenſations.

Dans le plan de nos recherches ſur l'apperception, nous croyons à propos de la conſidérer comme immédiate, non ſeulement à l'égard de l'indépendance, où ſont les objets apperçus de toute apperception antécedente; mais encore comme étant immédiatement préſens à l'ame, dans le ſens dans lequel cette préſence dans l'ame convient à toutes les penſées ſans exception; leſquelles on peut toutes conſidérer

rer dans l'inſtant de leur apperception comme détachées de ce qui ſuit ou précede dans l'ame. A l'egard du premier point, pluſieurs objets de l'intuition étant ſujets à être confondus avec ceux que le raiſonnement ou la réfléxion découvrent, (confuſion, qui pour l'ordinaire entraîne une longue ſuite d'erreurs,) nous aurons ſoin de les en diſtinguer en conſtatant leur indépendance, autant qu'elle leur convient; & à l'égard du ſecond point, ſavoir de l'exiſtence de ces objets dans l'ame, ou de l'apperception même, nous ferons les réfléxions que nous jugerons les plus propres, ſinon à eclaircir entierement la matiere, du moins à en écarter les notions fauſſes, & à nous rendre modeſtes & retenus dans nos déciſions. Ceux qui ſont verſés dans la ſpéculation, reconnoîtront l'importance, mais en même tems la difficulté, & la delicateſſe de notre entrepriſe; nous en ſoumettons le ſuccés à leurs jugements impartiaux, ſurtout à ceux des célébres Philoſophes, qui compoſent cette illuſtre Aſſemblée.

Toutes les choſes, qu'on peut prétendre avec quelque vraiſemblance appercevoir immédiatement, ſe rangent naturellement en trois claſſes, vû que cette apperception ne peut être rélative, qu'à nous même, à nos idées, & à nos actions. C'eſt donc à nous d'examiner, ſi la connoiſſance de ces choſes vient en effet d'une apperception indépendante, & en quoi elle conſiſte. Le préſent Mémoire eſt deſtiné à conſidérer l'apperception de nôtre propre exiſtence, ou au *conſcium ſui.*

* * *

Je ſai que j'exiſte; de quelle façon ſuis-je parvenu à m'en aſſurer? Il n'y a que deux voyes, qui m'y ayent pu conduire, l'une médiate, & l'autre immédiate; & on peut propoſer, ce me ſemble, l'alternative ſuivante. Si je ne connois pas mon exiſtence par raiſonnement ou par réfléxion, il faut de néceſſité, que je l'apperçoive directement & immédiatement dans la plus grande propriété du terme; & réciproquement. Je ne penſe pas, que perſonne veuille dériver

le *conſcium ſui* de la mémoire ou de l'imagination, en un mot de quelque autre ſource que celles, dont je viens de faire mention.

A entendre les Philoſophes nommer le ſentiment de nôtre exiſtence *intime* & *immédiate*, on diroit, que l'ame va tout droit à penſer: *j'exiſte.* Cependant les mêmes deduiſent encore cette vérité par voye de raiſonnement: de là le fameux enthymême: *je penſe; donc je ſuis*, mis en vogue par Des-Cartes, & rebattu depuis par presque tous les Metaphyſiciens.

Cet argument étant l'unique, par lequel on ait entrepris jusqu'icy de démontrer ſa propre exiſtence, je m'imagine, que l'analyſe que nous en allons faire, ſervira à répandre ſur cette matiere le jour dont elle eſt ſuſceptible: nous le conſidérerons ſous deux fâces: 1. en lui-même pour en apprécier la valeur intrinſéque: 2. par raport à l'effet, qu'il doit produire.

Il ſuppoſe d'abord, que la certitude de nôtre exiſtence eſt fondée ſur des preuves démonſtratives, & qu'ainſi nous ne ſaurions l'adopter immédiatement, comme verité de ſimple vûe, & évidente d'elle même, puisque dans ce dernier cas non ſeulement les preuves ſeroient hors de ſaiſon, mais totalement impoſſibles; on peut démontrer les propoſitions non évidentes d'elles même par celles, qui le ſont; mais celles-cy ne ſauroient s'entrecommuniquer l'évidence, vû que l'une n'en a pas plus que l'autre. Nous n'oſerions aſpirer à un plus haut point d'évidence, que nous n'en trouvons dans les verités de *ſimple vûe*, & les vouloir démontrer ce ſeroit chercher le Soleil à la lueur d'une lanterne.

Tout ſyllogisme par conſéquent, qu'on peut imaginer en faveur des verités intuitives, doit donner dans le ſophiſme d'*idem per idem*, ſes prémiſſes préſuppoſant la conſéquence, ou du moins l'évidence des prémiſſes préſuppoſant l'evidence de la concluſion: ce qu'on apelle dans les écoles *obſcurum per æque obſcurum*, peut être apellé dans le cas préſent *clarum per æque clarum*: nous éprouverons l'enthymême Carteſien à cette pierre de touche.

Lors-

Lorsqu' on le réduit à un ſyllogisme parfait en reſtituant la propoſition ſupprimée, il doit être énoncé de la maniere ſuivante : *Tout ce qui penſe exiſte* ; *Je penſe* : *Donc j'exiſte.* Mais ne voit-on pas au premier coup d'oeil que la mineure renferme toute la concluſion, & que le pronom ſeul *Je*, ſans lequel elle ne peut pas même être conçûe, préſuppoſe ce qui eſt en queſtion, ſavoir l'exiſtence propre? Si vous y ajoutez le verbe, vous trouverez que *penſer* ſignifie *exiſter ſous une certaine modification*, & que la propoſition : *Je penſe*, coïncide avec : *Je ſuis penſant.* Je ne crois pas, qu' après cela on attribue plus de force à ce ſyllogisme, qn' à celui qu'on trouve dans le Luculle de Ciceron : * *S'il fait jour, il fait jour* ; *or il fait jour* ; *donc il fait jour.* Concevez, ſi vous voulez, un mot indifferent ajouté au premier : *s'il fait jour* : ou ſubſtituez lui une expreſſion ſynonyme, je me trompe fort, ſi malgré ce changement l'argument deviendra meilleur, ou le ſophisme moins ſophisme. L'impoſſibilité de concevoir la mineure ſans adopter la concluſion, n'eſt-elle pas un caractére non équivoque de la *petition du principe* ? L'exemple rapporté vient d'autant mieux au ſujet, que démontrer qu'il faſſe jour, & démontrer que nous exiſtions, ſont deux choſes également impoſſibles.

De plus la mineure eſt manifeſtement un réſultat de la réfléxion; & pour dire avec fondement : *Je penſe*, il faut qu' auparavant j'aye penſé quelque choſe, puisque penſer ſans penſer quelque choſe ſeroit penſer & ne pas penſer en même tems; par conſéquent la propoſition : *je penſe*, qui renferme un attribut abſtrait, ne peut pas être l'objet de l'apperception primitive ; & penſer que l'on penſe quelque choſe eſt une abſurdité détruite dés l'entrée de ce Mémoire. A parler à la rigueur philoſophique on ne peut jamais dire avec aſſurance : *je penſe*, mais ſeulement : *j'ai penſé.* Il s'enſuit donc, que ſi nôtre exiſtence nous étoit connuë par le ſyllogisme en queſtion, nous ne ſerions jamais aſſurés de nôtre exiſtence préſente, mais ſeulement de la paſſée, puis-

* *Si lucet, lucet : lucet autem; lucet igitur.* Cic. in Lucullo c. 23.

que de la propoſition : *j'ai penſé*, il ne réſulte pas celle-cy : *j'exiſte*; mais : *j'ai exiſté*. Or la mineure venant de la réfléxion, ce à quoi il faut avoir penſé avant que de pouvoir réfléchir, doit être le : *j'exiſte* même, ou encore le préſuppoſer, ce qui revient à la même choſe.

Enfin la majeure : *tout ce qui penſe exiſte*, ſe fonde uniquement ſur le *principe de contradiction*, lequel dérivant toute ſa force, & toute ſon evidence de la certitude de nôtre exiſtence, ne peut point la devancer dans l'ordre de nos connoiſſances, ni par là devenir une de ſes preuves. La majeure ſuppoſe donc ce qui eſt en queſtion tout comme la mineure.

Il faut ſe ſouvenir dans tout cet examen, que la ſolidité des argumens ne dépend nullement du choix arbitraire des termes, dont on ſe ſert pour les exprimer : ſans cela le même ſyllogisme pourroit être régulier dans une langue & ſophiſtique dans l'autre, & ſouvent bon & mauvais dans la même langue ſuivant ſes differentes expreſſions. Nôtre enthymême p. e. éblouït davantage en Latin, qu'en François, puisque dans cette derniere langue le pronom, qui caracterise *l'Egoïté*, eſt exprimé formellement, au lieu que dans la premiere & le pronom, & le verbe ſubſtantif, ſont engloutis dans le mot de *cogito*. Cependant quand même on fabriqueroit une langue toute nouvelle, on ne trouvera aucune expreſſion, où le pronom ne doive être ſous-entendu, & la notion même de l'antécedent s'evanouit, dèsque le pronom ſous-entendu en eſt retranché. Du reſte toutes les langues ſont arbitraires dans leur origine, & inventées pour le corps plutôt que pour l'ame ; c'eſt pourquoi le Philoſophe abandonnant au Grammairien le terrain de la ſyntaxe, ne s'occupe que de la réalité.

Il y a lieu de s'étonner, que le Syllogisme, que nous venons d'analyſer, ſoit prôné par des hommes illuſtres comme un modéle de preuve, qui conduit au plus haut periode de certitude. A ne conſulter que mes foibles lumieres, il ne me paroit prouver abſolument rien, la concluſion n'étant vraye que par hazard, & il me ſemble, que ſi on y modéloit tous ſes raiſonnemens, comme on le conſeille, au lieu d'avan-

d'avancer dans les connoiſſances, on ſe promèneroit éternellement dans des cercles vicieux. Je conviens qu' aucune certitude ne ſurpaſſe celle de nôtre exiſtence propre, mais je ne tombe pas d'accord, qu'elle naiſſe de la force d'une démonſtration quelconque: ces deux aſſertions me paroiſſent même ſe contredire ; car ſi c'eſt en vertu d'un argument, que nous nous convainquons de nôtre exiſtence, il faut néceſſairement, qu'il y ait des propoſitions plus certaines, ſavoir les prémiſſes du ſyllogisme qu'on met en oeuvre.

On juſtifie encore l'Enthymême de Des-Cartes, parce que, dit-on, le Philoſophe doit rendre raiſon de tout ; mais ſeroit-ce donc rendre raiſon, que de commettre des pétitions de principe ? Et ſi le Philoſophe devoit encore rendre raiſon des vérités évidentes d'elles mêmes, quel *non plus ultrà* y auroit-il pour lui ? Non ſeulement ſa vie entiere, mais toute l'éternité future ne ſuffiroient pas pour terminer la queſtion la moins compoſée. La Philoſophie ſeroit l'art de ne ſe jamais taire, & un Philoſophe un homme, qui ne déparle point.

Spinoza a parfaitement ſenti l'invalidité de cet argument ; c'eſt pourquoi il nie que c'en ſoit un, en le fondant dans une ſeule propoſition* : *Je penſe, donc je ſuis*, dit-il, *n'eſt qu'une propoſition, qui eſt équivalente à celle-cy : je ſuis penſant.* Si Spinoza vouloit dire par là, qu'ayant apperçu nôtre exiſtence nous réfléchiſſons enſuite ſur l'acte de l'apperception, il ne diroit rien que de fort raiſonnable, & Des-Cartes s'eſt exprimé en effet en pluſieurs endroits conformément à cette paraphraſe. Ce qu'il y auroit a rectifier, ce ſeroit de couper la propoſition en deux, & de mettre au milieu la réfléxion, qui produit la ſeconde ; vû que nous avons déjà prouvé, que dans ſon entier elle ne peut pas être l'objet de l'apperception primitive. Si on vouloit transformer l'enthymême en ſentence enthymématique, on tomberoit dans une abſurdité encore plus grande ; ce ſeroit ſoutenir, que l'ame apperçoit intuitivement un ſyllogisme tout entier.

Voyons

* *Cogito, ergo ſum, unica eſt propoſitio, quæ huic : Ergo ſum cogitans, æquivalet.* Princ. Phil. more Geom. demonſtr. prol, p. 4. & prop. 1. & 2.

Voyons préſentement, quel effet nôtre enthyméme, ou tout autre argument en faveur de l'exiſtence propre, (car le cas eſt le même,) pourroit produire ſur un Sceptique déterminé, ou ſur un Carteſien outré.

Le *cogito*, *ergò ſum*, ſeroit il un organe ſuffiſant pour convertir le Sceptique ? Je ne le ſaurois croire, ſuppoſé même, que l'argument fut auſſi bon, qu'il eſt vicieux & ſophiſtique. Celui qui pouſſe le Scepticisme au point de révoquer en doute ſa propre exiſtence ne peut, ce me ſemble, convenir de rien de poſitif, & ne s'accordant avec nous ſur aucun principe, il eſt hors de la portée de nos raiſonnemens. Que pourra-t-on avancer contre un tel homme, dont il ne doute auſſi tôt ; ou qu'eſt-ce qui paroitra trop extravagant à celui, qui ſe regarde ſoi-même comme un problême ? D'ailleurs on ne ſauroit entrer en diſpute avec le Sceptique ſans lui ceder un avantage des plus conſiderables, vû qu'en s'engageant à démontrer l'exiſtence propre on ſe met dans l'obligation tacite de démontrer de même toute propoſition auſſi evidente que celle là ; ce qui lui donne droit de vous tailler de la beſogne à perte de vûe.

Il faudroit être peu familiariſé avec l'eſprit du Scepticisme pour ignorer, que ſi les Sceptiques ſe ſervent du raiſonnement, ce n'eſt que dans la vûe de battre les Dogmatiques de leurs propres armes. Ce ſeroit donc ſe méprendre groſſiérement, que de croire qu'ils y faſſent le moindre fond eux-mêmes, ou de leur attribuer les theſes, qu'ils défendent même avec le plus d'opiniatreté. Leur prétention eſt, que nous manquons de *criterium* pour diſcerner le vray du faux, & qu'en toute queſtion il y a (ἰσοσθένεια) *équilibre de raiſons*. De là on les voit, dans le même cas, tantôt démontrer l'affirmative, tantôt la négative, ſuivant que cela leur vient à propos. * Si le Sceptique

* τάχα γὰρ ἀσφαλέστερος παρὰ τὸς ὡς ἑτέρως φιλοσοφοῦντας ἐυρεθήσεται ὁ σκεπτικὸς, κατὰ μὲν τὰ πάτρια ἔθη καὶ τὸς νόμους λέγων

qui ſoutient l'exiſtence des Dieux & leur rend un culte religieux en bon Citoyen, qui ſe conforme aux loix de la Patrie, il le fait (ἀδοξάστως) *ſans dogmatiſer*, mais en Philoſophe il ne ſe précipite point à décider ſur cette matiere, trouvant également démontré *, qu'il y a des Dieux, & qu'il n'y en a point. Il n'eſt pas plus poſitif ſur d'autres ſujets, & il prend toujours garde à ne ſe laiſſer attraper ſur aucun dogme. On gagneroit donc fort peu à l'amener à contradiction, puiſqu'il ne nie point, qu'il n'y ait contradiction en tout, & que jamais il ait ſoutenu la theſe, que vous combattez, attendu qu'il ne ſoutient pas, mais qu'il doute ; & en effet n'êtes vous pas plaiſant de prétendre, qu'il écoute vos raiſons, & ſente l'energie du ſyllogisme favori, tandis qu'il doute de ſon propre être ? Enfin vous n'aurez priſe ſur le Sceptique par aucun endroit ; il eſt le rebours de l'Antée de la Fable : fils de l'air, il faudroit l'écraſer ſur terre, où il ne ſe hazarde point. La diſpute ne pourra donc ſe terminer, qu'à vôtre confuſion : vous ſerez obligés de la rompre en rempaquetant le ſyllogisme & en avouant, que vous avez eu tort de la commencer. Une huée générale de l'ecole de Pyrrhon vous ſonnera la retraitte.

Je crains, qu'on ne prenne ce portrait du Sceptique pour une piéce d'imagination ; & je vois qu'en effet nombre d'habiles gens ne font point ſcrupule d'avancer, que jamais le Soleil n'a éclairé d'homme, qui ait mis ſa propre exiſtence en problème, & que ce doute eſt une pure impoſſibilité. Sur quoi ces Meſſieurs me permettront de faire les remarques ſuivantes.

Premièrement, ſi je forge des Monſtres, ce n'eſt pas au moins pour les combattre ; car j'avouë volontiers, que ce ſeroit là une entrepri-

λέγων εἶναι θεὺς, καὶ πᾶν τὸ εἰς τὴν τούτων θρησκείαν καὶ εὐσέβειαν συντεῖνον ποιῶν. τὸ δ' ὅσον ἐπὶ τῇ Φιλοσόφῳ ζητήσει μηδὲν προπετευόμενος. S. Emp L. 1. adv. Phyſ. S. 49.

* ὂν μᾶλλον εἶναι ἢ μὴ εἶναι θεὸς Id.

treprise au dessus de mes forces. Je ne crois point avoir employé de fausses couleurs dans le tableau du Sceptique, sur tout de celui, qui doute de sa propre existence, & que l'enthymeme devroit ramener; un tel auroit certainement mauvaise grace d'être Sceptique à demi, & si après avoir nié le *j'existe*, il accordoit le *je pense*, ou se relâchoit sur quelque autre assertion que ce fut, il mériteroit assurément d'être banni de sa confrairie, mais il est impossible qu'il le fasse, s'il a jamais douté serieusement de sa propre existence; & s'il ne l'a fait que pour plaisanter, on ne sauroit mieux l'entretenir dans cette humeur, qu'en voulant démontrer ce qui n'est pas démontrable.

En second lieu, s'il est impossible de douter de sa propre existence, cette impossibilité ne peut venir, que de ce qu'elle est une verité d'intuition; vû qu'on peut douter de toute verité de raisonnement, du moins pour un tems.

En troisième lieu, je demanderois volontiers: S'il n'y a point de Sceptiques sur l'article en question, à quoi bon les réfuter par syllogismes, & faire tant de frais en démonstrations? „ Les Chevaliers „ errans, dit un Anglois, qui couroient le monde pour le purger „ de Géans & de Dragons, ne formerent jamais le moindre doute „ sur l'existence de ces Monstres. „

Mais enfin il n'est que trop sûr qu'il y a eu des douteurs, qui ont mis en problème, & toute existence, & toute pensée, savoir & l'antecedent & le consequent de l'enthymeme Cartesien; tant il est vray, qu'il n'y a rien de si extravagant, que quelque Philosophe n'ait soutenu. Je ne me prévaudrai pas de ce que Diogene Laërce dit des Pyrrhoniens, * *qu'ils ne déterminent rien, pas même le: Je ne détermine rien*, ni du passage de Seneque, dans lequel, aprés avoir raporté plusieurs Paradoxes des Anciens, il conclut: ** *Que sommes-nous*

* L. IX. §. 74.

** *Si Protagoræ credo, nihil in rerum natura est nisi dubium. Si Nausiphani, hoc unum certum est: nihil esse certi. Si Parmenidi, nihil est præter unum. Si Zenoni, ne unum quidem*

nous donc nous mêmes? (c'eſt à dire dans leurs opinions,) *que ſont toutes ces choſes, qui nous environnent, nous nourriſſent & nous ſoutiennent? Toute la Nature n'eſt qu'une ombre, ou vaine, ou trompeuſe. Je ne dirois pas aiſément, lesquels des deux me mettent plus en colere, ceux, qui prétendent, que nous ne ſavons rien, ou ceux, qui ne nous ont pas ſeulement loiſſé le plaiſir de ne rien ſavoir.* Je n'appuyerai pas non plus ſur le mot favori de Xenophane: * *L'opinion régne en tout.* Il me ſuffira de produire deux Philoſophes de l'Antiquité, Gorgias de Leonce, & Metrodore de Chios, diſciple de Democrite.

Le dernier écrivit un livre *de la Nature*, lequel au raport d'Euſebe donna à Pyrrhon la premiere occaſion de ſon doute univerſel. Ciceron nous en raporte le commencement dans les termes ſuivans: ** *Nego ſcire nos, ſciamuſne aliquid, an nihil ſciamus, ne hoc ipſum quidem neſcire aut ſcire ſcire nos, nec omnino, ſit-ne aliquid, an nihil.* Cet Ouvrage n'a point paſſé à nos jours; mais tout ſingulier qu'il doit être, il égalera à peine la ſingularité de celui de Gorgias, dont le titre eſt: *** *Sur le Néant, ou ſur la Nature.* Dans le premier des trois Chapitres, dans lesquels ce Traité eſt, diviſé, on démontre: ****

quidem. Quid ergo nos ſumus? quid iſta, quæ nos circumſtant, alunt, ſuſtinent? tota rerum natura umbra eſt, aut inanis, aut fallax. Non facile dixerim, utrum magis iraſcar illis, qui nos nihil ſcire voluerunt, an illis, qui ne hoc quidem nobis reliquerunt: nihil ſcire. Ep. 88.

* δόκος δ' ἐπὶ πᾶσι τέτυκται.

** In Lucullo c. 23. ἔλεγε μηδὲ αὐτὸ τοῦτο εἰδέναι, ὅτι οὐδὲν οἶδε. D. h. l. IX. 58.

*** περὶ τοῦ μὴ ὄντος, ἢ περὶ Φύσεως.

**** τρία κατὰ τὸ ἑξῆς κεφάλαια κατασκευάζει, ἓν μὲν καὶ πρῶτον, ὅτι οὐδέν ἐστι. δεύτερον, ὅτι, εἰ κάι ἐστιν, ἀκατάληπτον ἀνθρώπῳ τρίτον, ὅτι, εἰ καὶ καταληπτὸν, ἀλλὰ τοίγε ἀνέξοιστον, καὶ ἀνερμήνευτον τῷ πέλας. S. Emp. adv. Log. l. 1. S. 65.

que rien n'exiſte; dans le ſecond, *que, quand même quelque choſe exiſteroit, cette choſe nous ſeroit incompréhenſible;* & enfin dans le troiſième, *que quand même elle ſeroit compréhenſible, on ne pourroit pourtant, ni l'énoncer, ni en faire part à ſon prochain.* Ariſtote deſtina un Livre tout exprés à réfuter ces trois articles; & on nous a conſervé les démonſtrations, ſur leſquelles Gorgias les fonde, & qui font le plus plaiſant galimatias, dont peut-être l'Hiſtoire Philoſophique faſſe mention. Je ne puis m'empecher de faire connoître un doute des plus terribles, que le ſubtil Sextus tire du premier de ces articles: en voicy le précis: * „ Gorgias niant toute exiſtence, nie auſſi celle de l'entendement; „ d'autres au contraire ſoutiennent, qu'il y a un entendement: com- „ ment vuidera-t-on le different? On ne pourra pas le faire par l'enten- „ dement même; (ce ſeroit ſuppoſer, ce qui eſt en queſtion,) ni par „ aucun autre *criterium;* car on n'en admet point d'autre; ainſi il „ reſte indécis, & incompréhenſible à jamais, s'il y a un entende- „ ment, ou non.

Que ceux qui ſe piquent de tout démontrer, eſſayent leur Logique ſur ce paſſage de Sextus: pour moi je regarde le Scepticisme abſolu comme un mal incurable; & le Sceptique comme un homme, qui me parle une langue inconnuë, & avec lequel par conſéquent je ne ſaurois entrer en conférence; car comme pour s'entendre dans le langage ordinaire il faut s'accorder ſur le ſens des termes; ainſi en matiere de diſpute

* *ἐπεὶ γὰρ ὁ μὲν Γοργίας οὐδὲν εἶναι φάσκων, οὐδὲ διάνοιαν εἶναί φησι, τινὲς δὲ τούτην ἀποφαίνονται ὑπάρχειν· πῶς ἂν ἐπικρινοῦσι τὴν διαφωνίαν; ἔτε γὰρ διανοίᾳ (ἐπεὶ τὸ ζητούμενον συναρπάσουσι) ἔτε ἄλλῳ τινί, οὐδὲν γὰρ ἄλλο εἶναί φασι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὴν νῦν ὑποκειμένην, δι' ἧς κρίνεται τὰ πράγματα· ἀνεπικριτον ἄρα, καὶ ἀκατάληπτον ἔσαι, πότερόν ἐσι διάνοια, ἢ οὐκ ἔσιν.* Pyrrhon. Hypotyp. L. II. c. 6. §. 57. Confer. Hypotyp. I. II. c. 5. & adv. Log. L. I. §. 284.

pute il faut du moins s'accorder ſur quelque principe. En un mot le doute de ſa propre exiſtence eſt poſſible, ou non. Dans le premier cas c'eſt un mal ſans remède, dans le ſecond le remède eſt non ſeulement impoſſible, mais encore inutile & ſuperflu; donc dans tous les cas les argumens contre le Scepticisme, ſont & inſuffiſans, & inutiles.

Qu'on juge après cela, ſi c'eſt faire grand honneur à l'immortel Descartes, que de dire avec * quelques uns, qu'il n'a avancé ſon enthymême, que contre les Sceptiques; d'ailleurs ce ſoupçon me paroit aiſé à détruire par les ** expreſſions modeſtes de ce grand homme, qui déclare formellement, qu'il n'a d'autre deſſein que de défricher ſon propre terroir, & de corriger ſes opinions; ſi donc ſon intention avoit été d'argumenter, ce ne pourroit être que pour ſe débaraſſer de ſon propre doute, bien different du Scepticisme, comme nous allons voir.

Le doute du Sceptique eſt poſtérieur à l'examen, au lieu que celui de Des-Cartes le precède. Le premier a pour but une entiere indifference, dans laquelle il fait conſiſter ſa ſuprême beatitude. L'autre au contraire ne doute pas pour avoir le plaiſir de douter; animé d'un plus noble motif, il ne cherche qu'à ſe défaire des préjugés, & à ſe frayer le chemin vers la certitude: c'eſt *** l'Architecte, qui abat une maiſon ruïneuſe pour la relever ſur de meilleurs fondemens, & avec plus de ſymmetrie.

Il faut avouër cependant, que Des-Cartes ne s'eſt point expliqué ſur nôtre ſujet avec toute la préciſion deſirable. A le voir répandre ſon doute univerſel, on diroit qu'il paſſe l'éponge ſur toute certitude ſans exception, ſe défiant de toutes ſes connoiſſances, & de toutes ſes facultés. Mais à le voir ſur ſon retour il paroit non ſeulement ſuppoſer des axiomes généraux, & ſe confier entièrement en ſes facul-

* Walch. Lexic. phil.

** *Nunquam ulterius mea cogitatio provecta eſt, quam ut proprias opiniones emendare conarer, atque in fundo, qui totus meus eſt, adificarem.* Diſſert. de Methodo. 2.

*** Ibid.

cultés, mais encore préſuppoſer l'exiſtence propre : car, ou je me trompe fort, ou c'eſt là le point ferme, & immobile, qu'il compare à celui * d'Archimede, & qui doit le remettre ſur la voye du raiſonnement.

Si j'étois digne de faire l'apologie du grand Reſtaurateur des Sciences, que je ne me laſſe point d'admirer, je dirois que jamais en effet il ne douta de ſon exiſtence, bien qu'il ait fait ſes efforts pour en douter, & que ce n'eſt que l'impoſſibilité de ce doute, qu'il a voulu exprimer dans ſa ſeconde Méditation, qui non ſeulement ſouffre ce ſens ſans gêne, mais ſemble même l'autoriſer comme le ſeul raiſonnable, ſurtout lorsqu'on fait attention au paſſage ſuivant : ** „ Tout mû„ rement conſideré il faut en venir icy : que la propoſition : *je ſuis*, „ *j'exiſte*, eſt néceſſairement vraye, autant de fois, qu'on la pro„ nonce, ou qu'on la conçoit dans l'eſprit. „ Ou je me trompe, ou ces paroles dénotent une verité intuïtive, qu'on ne ſauroit même concevoir comme problèmatique, ou ſujette à demonſtration.

Le doute Carteſien, pour répondre au but de ſon inſtitution, a beſoin d'être reſſerré dans ſes bornes ; de peur que la médecine ne tourne en poiſon : le rendre trop univerſel, & y envelopper les verités intuïtives, c'eſt à mon ſens enfiler la grande route du Pyrrhonisme le plus déſeſperé. Des-Cartes a prévû & prédit même l'abus, qu'on feroit de ſa Methode ; c'eſt pourquoi il déconſeille plutôt de la ſuivre, qu'il n'y exhorte, crainte, que *** pluſieurs

* *Nil niſi punctum petebat Archimedes, quod eſſet firmum & immobile, ut integram terram loco dimoveret : magna quoque ſperanda ſunt, ſi vel minimum quid invenero, quod certum ſit, & inconcuſſum.* Medit. 2.

** *Omnibus ſatis ſuperque penſitatis denique ſtatuendum eſt, hoc pronuntiatum : ego ſum : ego exiſto : quoties a me profertur, vel mente percipitur, neceſſario eſſe verum.*

*** *Nempe permulti ſunt, qui cum plus aequo propriis ingeniis confidant, nimis celeriter ſolent judicare, nunquamque ſatis temporis ſibi ſumunt ad rationes omnes circumſpicien-*

ſieurs trop preſſés dans leurs jugemens ne s'éloignaſſent ſi fort du chemin battu, qu'ils n'y pourroient revenir, & ne contractaſſent une incertitude univerſelle pour le reſte de leurs jours. Je crois qu'on peut pouſſer plus loin, & je ne crains point de ſoutenir, quelque étrange que puiſſe paroitre ce ſentiment, que s'il arrivoit à un homme de ſens raſſis de douter pendant un ſeul moment de ſon exiſtence, il continueroit dans un doute univerſel, non ſeulement pendant le tems de ſa vie, mais pendant toute la durée de ſon être.

Il n'y a en effet que deux voyes, qui puiſſent conduire à la certitude, dont la ſeconde eſt fondée ſur la premiére, l'une immédiate, & l'autre médiate; en conteſtant donc les verités de la premiére, on les bouche toutes les deux, & on s'abandonne à l'incertitude univerſelle. Toutes les connoiſſances, que nous pourrons acquérir dans un tel état, ſeront infectées de ce doute originel; & l'eſprit humain reſſemblera à un vaiſſeau démâté, & privé du gouvernail, qui vogue, à la merci des Ouragans, ſur un Océan ſans rivage. Il en eſt de même de la défiance, qu'on nous recommande par rapport à nos facultés, jusqu'à ce que nous ſoyons aſſurés de leur véracité par des démonſtrations déduites d'un principe certain, & infaillible. C'eſt, ce me ſemble, nous renvoyer aux Calendes Grecques; car d'où nous pleuvra ce principe, qui ait plus de certitude & d'evidence, que ces verités primitives, qu'on nous ordonne de revoquer en doute? & comment démontrerons nous, ſi ce n'eſt en déployant ces mêmes facultés, dont nous devons nous défier? Cette pretendue précaution ne ſerviroit donc qu'à nous conduire dans un abime de Pyrhonisme, dont ni miracle ni révélation immediate ne ſauroit nous retirer, vû que les moyens même les plus extraordinaires préſuppoſent l'uſage de ces facultés, que l'on veut rendre

ſpiciendas, & idcirco ſi ſemel auſint opiniones omnes vulgo receptas in dubium revocare, & velut a trita via recedere, non facile illi ſemitæ, quæ rectius ducit, ſemper inſiſtent, ſed vagi potius & incerti in reliquam vitam aberrabunt. Diſſert. de Methodo. 2.

rendre ſujettes à caution. * Le myſtique Poiret ſe plaint amérement de ce funeſte effet du doute Carteſien ; & on ne ſauroit diſconvenir, que pluſieurs des ſectateurs de Descartes ne l'ayent outré en bien des façons. Il leur eſt arrivé ce ** qu'Ovide raconte de Dédale, qui entortilla ſi bien le Labyrinthe de Crete, qu'il eût peine à en retrouver l'iſſûe lui même.

Non ſecus ac liquidus Phrygiis Maandros in arvis
Ludit, & ambiguo lapſu refluitque, fluitque,
Occurrensque ſibi venturas aſpicit undas,
Et nunc ad fontes, nunc in mare verſus apertum,
Incertas exercet aquas: ita Dædalus imples
Innumeras errore vias, vixque ipſe reverti
Ad limen potuit: tanta eſt fallacia tecti.

Je crois avoir mis au jour l'invalidité de l'enthymeme Carteſien, de même, que l'impoſſibilité, & l'inutilité de tout autre argument imaginable, en faveur de ſa propre exiſtence. Si quelqu'un étoit aſſez peu Philoſophe pour vouloir déduire le *conſcium ſui* de la réfléxion, il n'auroit qu'à conſidérer, que quelque définition, qu'on en veuille donner, pour réfléchir il faut un retour ſur ce qui s'eſt paſſé dans l'ame. Si donc la réfléxion m'aprenoit mon exiſtence, elle devroit le faire médiatement, ou immédiatement. Elle ne ſauroit le faire immédiatement, à moins que la perception, ſur laquelle elle ſe replie n'eut été le *conſcium ſui* même; car étant, pour ainſi dire, une apperception rétrograde, elle retourne au point dont elle eſt partie; & aucune penſée deſtituée du *conſcium ſui* ne ſauroit être ſuivie de réfléxion ſur ſa propre exiſtence; & le cas poſé on voit clairement, que la connoiſſance de ſoi-même ſeroit duë, non à la réfléxion, mais à l'apperception primi-

* Vera Meth. inv. vei. P. I. 9. 10.
** Metam. L. VIII. v. 162-168.

primitive, avant-coureuſe de la réfléxion. S'il étoit poſſible que l'ame eût une penſée quelconque *A*, ſans être accompagnée du *conſcium ſui*, l'acte immédiat de réfléxion ne ſeroit rien de plus, que le ſouvenir de cette même penſée exprimée par le ſigne *A*. Si au contraire la formule de l'apperception avoit été: *j'apperçois A*, celle de la réfléxion immédiate ſeroit: *j'ai apperçû A*, l'egoïté contenuë dans la formule de la réfléxion n'étant que la copie de celle, qui eſt contenue dans la formule de l'apperception; en un mot, la réfléxion immédiate n'étant que le ſouvenir de l'objet apperçu. La production médiate du *conſcium ſui*, par le moyen de la réfléxion, n'eſt pas plus poſſible, que l'immédiate; elle ſuppoſeroit toujours l'egoïté dans un certain rapport avec la penſée *A*, que nous avons ſuppoſée détachée du *conſcium ſui*, coupant par là tout paſſage de l'une à l'autre; on peut appliquer ici ce que nous avons obſervé touchant la maniére ſyllogiſtique de prouver ſa propre exiſtence. Il faudroit donc enfin ſe réduire à la faculté d'abſtraire, & prétendre, que c'eſt en qualité de notion abſtraite, que la réfléxion produit le *conſcium ſui*; mais ſe peut-il rien de plus ridicule, que de ſoutenir, que nous connoiſſions nos propres individus comme des abſtractions? & peut-on concevoir quelque choſe dans l'abſtrait, qu'on n'ait conçu auparavant dans le concret? Cela eſt ſi peu pratiquable, qu'on auroit bien plus de raiſon de mettre en queſtion, ſi nous ſommes en état de former aucune idée abſtraite du tout. Le *conſcium ſui* abſtrait ne ſeroit donc que le *conſcium ſui* détaché du concret. Il eſt vray, que la réfléxion nous fait acquérir les notions des facultés de nôtre ame, comme de *l'apperception*, de la mémoire, du jugement; &c. mais ces notions ne réſultent que de la combinaiſon du *conſcium ſui* avec nos autres penſées; & ſi ces penſées exiſtoient ſans la *cöapperception* de l'egoïté, nous n'aurions jamais ces notions, & nous ignorerions éternellement, que ce fut nous, qui voyons, qui entendons, qui nous ſouvenons, qui raiſonnons, & ainſi du reſte.

Nous avons vû jusqu'icy, que la connoiſſance de nôtre être ne nous vient, ni par raiſonnement, ni par réfléxion, ni par aucune voye

médiate, ce qui nous autoriſe à conclure, que nous nous appercevons immédiatement, & intuitivement; on voit encore par là, que l'apperception de ſoi-même eſt le premier acte, & un acte eſſentiel de l'être intelligent entant que tel; vû que toutes les connoiſſances le préſuppoſent, pendant que lui ſeul ne préſuppoſe rien. Quelques réfléxions ſerviront à éclaircir & à juſtifier ce ſentiment.

Faiſant paſſer en revuë toutes les idées que je ſuis en état d'avoir, je n'en trouve aucune ſi eſſentielle à mon intelligence, que je ne puiſſe m'en concevoir privé à jamais; au lieu que la conception d'une intelligence, qui ne s'apperçoit pas ſoi-même, eſt abſurde & contradictoire; ce que je ne crois pas que perſonne me puiſſe conteſter. *Le conſcium ſui* eſt donc préſuppoſé par toute autre connoiſſance, & ne peut être ſubordonné à aucune penſée antérieure; car qu'on me détermine cette penſée, & je prétends faire voir, qu'elle ne ſauroit exiſter ſans la préexiſtence *du conſcium ſui.* On ne pourra pas dire, qu'il faut une penſée quelconque pour le faire éclorre: car on devroit avouër, que toute autre penſée quelconque eſt contingente à l'être intelligent, pendant que la ſeule apperception de ſoi-même lui eſt néceſſaire, & eſſentielle. Or ne ſeroit-il pas plaiſant, que le contingent donnât l'origine au néceſſaire, & fut pour ainſi dire l'eſſence de l'eſſence même; un en mot, je conçois ſans contradiction une intelligence, qui n'apperçoit que ſoi-même, mais je n'en ſaurois concevoir une, qui n'appercevroit p. e. que le Soleil, ſans le *conſcium* ſui: ou bien je puis me figurer, que toute la ſcene de l'Univers diſparoiſſe, que les portes des ſenſations ſe ferment l'une après l'autre, je puis congédier penſée après penſée, faculté après faculté, anéantir la réfléxion, effacer l'imagination, noyer la mémoire dans les ondes de Lethé, enfin, s'il m'eſt permis de m'exprimer ainſi, me rayer entiérement jusqu'à l'apperçeption de Moi-même, ſans ceſſer de ſubſiſter en qualité d'être intelligent. Si au contraire je commence par le *conſcium ſui*, j'emporte d'un ſoufle toute mon intelligence & toute ma perſonalité; ce qui

qui montre évidemment, combien il eſt eſſentiel a l'être intelligent, entant que tel, de s'apperçevoir ſoi-même.

J'ai dit plus haut, que les facultés ne peuvent pas ſe replier ſur elles-mêmes, & qu'on ne s'apperçoit point appercevoir; ce qui m'engage à ſauver une contradiction apparente. J'obſerve donc, que ce que j'y avance, ne doit point ſignifier, qu'on ne puiſſe appercevoir ſoi-même, ou ſa propre exiſtence; parce que cela ne ſuppoſe point la duplication de la ſubſtance appercevante, & qu'on ne s'apperçoit pas entant qu'on apperçoit, mais entant qu'on exiſte. On pourra, peut-être le comprendre de la façon ſuivante. Suppoſez, que j'apperçoive deux choſes 1. Moi-même, 2. Un objet nommé *A*; l'apperception de cet objet ne ſeroit elle pas une troiſième choſe, mais à laquelle je ne penſe pas encore? Ce n'eſt que par un acte réfléchi, & après avoir combiné la conſcience de moi-même avec l'apperception de l'objet, que je ſçai, que c'eſt Moi, qui l'ai apperçu, & cette combinaiſon n'eſt-elle pas poſtérieure du moins dans l'ordre de la nature? L'oeil ne ſe voit pas voir, n'étant pas placé derrière ſoi même; mais même en ne ſe voyant point il ſent ſon exiſtence, (je place le ſentiment dans l'organe, à l'exemple des grands hommes, qui ſe ſervent de cette comparaiſon.) Nous pouvons la tourner encore autrement: ce n'eſt pas en voyant les objets, que nous découvrons la ſtructure & le mécanisme de l'oeil; mais en le conſidérant hors de nous; cependant qu'il ſoit ouvert ou fermé, nous en ſentons l'exiſtence; ou, pour rapprocher la comparaiſon le plus prés qu'il eſt poſſible: la ſubſtance, qui apperçoit les images viſibles, n'apperçoit point d'image de ſa propre apperception, ni de la manière d'appercevoir les images, & néanmoins elle s'apperçoit ſoi-même indépendamment des images viſibles, qu'elle apperçoit, comme hors de ſoi. On conçoit que la même choſe peut avoir lieu en toute ſorte de perception; du reſte ce n'eſt que pour ſubvenir à la diſette des notions ſpirituelles, que nous nous ſervons de la comparaiſon de l'oeil.

C'eſt dans ce ſens que j'entends les paroles de * *Locke*, dés l'entrée de ſon immortel Ouvrage *ſur l'Entendement humain*, ſens qui ſe confirme par le ** Chapitre qui traite *de la connoiſſance que nous avons de notre propre exiſtence.* Nous pouvons regarder, comme en éloignement, toutes les penſées, & en général toutes les opérations de nôtre ame, vû que ce ſont des modifications paſſagéres, que nous imaginons dans le paſſé, en nous en ſouvenant, ou en y réfléchiſſant. Il n'en eſt pas de même de la ſubſtance, qui étant permanente & intime à elle-même ne ſauroit voir ſon exiſtence, ni dans le paſſé, ni dans l'éloignement, ni en un mot choiſir un point de vuë hors d'elle-même : comme en qualité d'être elle exiſte, en qualité d'être penſant, elle s'apperçoit de ſon exiſtence. Dans ce ſens je ſouscris volontiers au ſentiment du grand *Leibnitz*, lorſqu'il dit, *** „ que nous nous ap-
„ percevons immédiatement de la ſubſtance & de l'eſprit, en nous ap-
„ percevant de nous-mêmes, „ & **** „que rien ne nous eſt mieux
„ connu, que l'ame, puisqu'elle nous eſt intime, c'eſt à dire, intime
„ à elle même.„

Lorsque dans le cours de ce Mémoire, je me ſers du terme d'exiſtence, on ne m'entendra pas, j'eſpere, comme ſi je ſoutenois, que la notion abſtraite d'exiſtence ſoit connuë intuitivement. Nous appercevons des individus ; leur reſſemblance nous donne les eſpeces, & par la reſſemblance de celles-ci nous montons aux genres. L'exiſtence eſt un genre ſuperieur, & comme le rendés vous commun des Catégories inferieures ; mais l'apperception ne la regarde pas entant que genre. J'apperçois mon exiſtence individuelle, ou mon propre indi-

* „L'entendement ſemblable à l'oeil nous fait voir & comprendre toutes les autres
„ choſes, mais il ne s'apperçoit pas lui-même ; c'eſt pourquoi il faut de l'art, &
„ des ſoins pour le placer à une certaine diſtance, & faire en ſorte, qu'il devien-
„ ne l'objet de ſes propres contemplations. *Avant-propos* §. 1.

** L. IV. ch. IX. §. 2.

*** Remarques ſur le livre de l'orig. du mal. 4.

**** Theodicée. 59.

individu, & lorsque je l'énonce par la propoſition: *j'exiſte*, je tire du verbe ſubſtantif le même ſervice, qu'on a coutume d'en tirer par rapport à tous nos ſentimens immédiats, qu'on change par ſon moyen en propoſitions; ce ſeroit donc raiſonner trés grammaticalement, que de m'imputer un pareil paradoxe.

Je dois encore conſidérer une objection trés forte contre nos ſentimens, priſe de la nature de l'apperception. * Appercevoir, dit-on, les objets, c'eſt les diſtinguer les uns des autres, & s'apperçevoir ſoi-même, c'eſt ſe diſcerner de quelque autre choſe; de cette façon l'apperception non ſeulement eſt ſubordonnée au diſcernement, mais encore à la ** réfléxion, ſans laquelle il n'y a point de diſcernement, & à la comparaiſon, ſans laquelle il n'y a point de réfléxion. On ſe fonde entiérement ſur l'expérience: *** „ Nous trouvons, dit-on, „ que nous appercevons les choſes en les diſcernant les unes des au„ tres, & plus bas: Lorsque nous n'appercevons pas la difference „ des choſes préſentes, nous n'appercevons pas ce qui tombe ſous nos „ ſens; & un paragraphe plus loin: **** En diſcernant l'ame des „ objets, qu'elle repréſente & diſtingue, nous nous appercevons de „ nous-mêmes; au contraire, lorsque nous ne nous diſcernons point „ des objets de nos penſées, nous ne nous appercevons pas de nous„ mêmes.„ En examinant cette théorie je conſerverai tous les égards dûs aux mérites des hommes illuſtres, qui l'ont miſe en vogue; mérites que je reconnois, & reſpecte, avec tout le monde Philoſophe.

Je conviens d'abord, que pour l'ordinaire nous diſtinguons l'objet de nôtre apperception d'avec d'autres, que nous appercevons alors, ou que nous avons apperçus autrefois, & que la mémoire nous retrace; cela ne ſe peut guères autrement, tandis que les portes des

 ſens

* Wolf. Met. Allem. 729. 730. 734.

** Ibidem 733.

*** Ib. 729.

**** Ib. 730.

ſens ſont ouvertes aux objets, qui les frappent ſans ceſſe, & que la mémoire & l'imagination ont, pour ainſi dire, coudées franches; j'accorde encore volontiers, que nous diſcernons ces objets de nous mêmes; rien de ſi naturel; pour diſcerner les choſes d'entr'elles il n'eſt beſoin que de ſavoir, que l'une n'eſt pas l'autre. Mais je ne ſaurois voir, qu'il s'enſuive, que l'apperception dépend du discernement; il pourroit n'y avoir entre ces deux choſes, qu'un ſimple raport de coëxiſtence dans le même tems; comme, par exemple, entre le mouvement des Planetes, & mes méditations préſentes.

En ſecond lieu, je ne puis m'accorder ſur l'expérience mentionnée avec l'homme illuſtre, dont j'ai rapporté les paroles, & je trouve préciſement le rebours de la ſienne; ſavoir, je ne diſcerne les choſes, qu'après les avoir apperçûes, & chez moi l'apperception devance toujours le diſcernement, du moins dans l'ordre de la nature, & ſouvent même dans l'ordre du tems: comme lorsque me rappellant une idée paſſée je la diſcerne de la préſente, ou qu'ayant p. e. regardé un objet *A*, je tourne la tête, & vois un autre *B*; il eſt même probable, que jamais l'apperception & le diſcernement n'arrivent dans le même tems, quoiqu'à cauſe de l'extrême rapidité, avec laquelle ces deux actes ſe ſuccedent, nous les confondions dans le même inſtant; mais comme je n'ai pas beſoin de prendre parti dans la diſpute ſur la durée, il me ſuffit ici d'une ſucceſſion dans l'ordre de la nature.

En troiſième lieu, il implique, ce me ſemble, qu'on puiſſe diſcerner avant que d'appercevoir; car ſi dans ce cas on demandoit: qu'eſt-ce que vous diſcernez? Je ne crois pas, qu'on y pût jamais donner réponſe; marque claire, qu'on ne diſcerne rien, ou, ce qui revient au même, qu'on ne diſcerne point du tout. Diſcerner *A* de *B* eſt appercevoir, qu' *A* n'eſt pas *B*, & que *B* n'eſt pas *A*; dire donc: j'apperçois, qu' *A* n'eſt pas *B*, & que *B* n'eſt pas *A*, quoique je n'apperçoive ni *A* ni *B*, n'eſt-ce pas ſe contredire dans les termes? & n'avez-vous pas tort de dire, que vous diſcernez, lorsqu' *A* & *B* ſont la même

me choſe à vôtre égard, étant tous deux néant, puisque vous n'appervez ni l'un, ni l'autre.

Dieu pourroit-il créer une intelligence, qui ne fit abſolument que diſcerner, ſans appercevoir les objets de ſon diſcernement? Il le pourroit ſans doute, ſi l'apperception dépendoit du diſcernement, mais il ne le peut pas, ſi le diſcernement dépend de l'apperception; or il faudroit qu'une pareille intelligence n'eût que les notions abſtraites du nombre; en un mot, qu'elle fut toute Arithmetique, & que ſes idées ne fuſſent que des chiffres; mais eſt-il poſſible d'avoir des notions abſtraites de ce qu'on n'a jamais apperçu dans le *concret*? On peut encore demander, ſi dans un retranchement ſucceſſif des facultés de nôtre ame, tel que nous l'avons ſuppoſé plus haut, ce ſeroit la diſcretive, qui ne ſauroit être annihilée ſans entrainer l'intelligence dans le néant: je voudrois qu'on m'en fit voir la néceſſité.

Enfin nôtre illuſtre Philoſophe ſubordonne lui-même le diſcernement à la réfléxion, & celle-cy à la comparaiſon; qui toutes deux préſuppoſent l'apperception, & ainſi ne peuvent la produire, ni directement, ni indirectement; la premiere n'étant qu'une revuë de l'objet, qu'on a déja apperçu, la ſeconde requérant pluſieurs objets préſentés à l'eſprit comme l'un à côté de l'autre, & par conſéquent apperçus.

Il n'y a donc, à bien conſidérer la choſe, point de discernement ſans apperception, mais l'apperception eſt tout à fait indépendante du discernement, & prend le pas ſur lui, comme ſur toute autre faculté intellectuelle. Il eſt aiſé d'appliquer au *conſcium ſui*, ce qui eſt vray de l'apperception en général, & de lever la difficulté. Du reſte les Philoſophes varient conſiderablement d'eux-mêmes ſur ce ſujet. * Mr. *Canz*, dans le même Ouvrage, ſoutient tantôt la ſolidité de l'enthymême Carteſien, tantôt il nomme le *conſcium ſui* le premier acte de l'ame, bientôt il le dérive du diſcernement, & presque au même endroit il avouë, qu'on peut ſe ſentir tout ſeul ſans ſe diſcerner de quoi que

* Confer Pſychol. L. 1. c. 1. §. 7. c. 11. §. 25. §. 31. & not. 5. ibidem.

que ce ſoit: peut-être trouvera-t-on un ſens commode à ces contrarietés, mais je ne laiſſe pas d'en conclure, que la matiere de l'apperception de ſoi même n'eſt point encore approfondie autant qu'on ſe l'imagine, ſoit à cauſe de ſa difficulté, ſoit parce qu'on l'a jugée trop commune & indigne d'arrêter le Metaphyſicien, qui veut s'elever à des ſpéculations plus ſublimes. Platon en juge differemment, croyant, * qu'il ſeroit ridicule de tourner ſes vûes ſur des objets étrangers, tandis qu'on n'a point ſatisfait à l'inſcription de Delphes, qui exhorte à ſe connoitre ſoi-même.

Non content de ſavoir qu'on s'apperçoit immédiatement, on voudroit encore pouvoir définir ce *Moi*, qu'on apperçoit, & connoitre le *comment* de cette opération de l'ame; deux points, ſur lesquels ſuivant toutes les apparences on accumulera recherches ſur recherches, ſans y jamais rien comprendre. ** Il y a en Allemagne des Philoſophes tres renommés, qui prétendent developper & éclaircir la notion de *l'exiſtence* en la définiſſant: *une manifeſtation de ſoi-même*; de ſorte qu'*exiſter* & *ſe manifeſter* ſignifient chés eux la même choſe. En appliquant ceci à notre ſujet: s'apperçevoir exiſter ſeroit: s'appercevoir ſe manifeſter; j'ai taché de mettre cette notion à profit, mais j'y ai trouvé des difficultés trop longues à inſerer dans ce Mémoire. Je ſoupçonne qu'une des principales raiſons de l'incompréhenſibilite de ces choſes, c'eſt qu'on ne peut pas aſſez ſe dégager de notions hetérogenes; de là vient, que les problèmes ſont concus en notions étrangeres au ſujet, & que pendant qu'on forme des queſtions ſur un ſujet, on occupe ſon eſprit des idées d'un autre: ce qui ne peut

* ὃ δυναμαί πω κατὰ τὸ Δελφικὸν γράμμα γνῶναι ἐμαυτὸν, γελοῖον δή μοι φαίνεται τοῦτο ἔτι ἀγνοοῦντα τὰ ἀλλότρια σκοπεῖν. in Phædro.

** *Voyez* Prim. Monadol. capita can 2. dans le Recueil des Pieces ſur les Monades; *item* Diſſ. de Materialismo §. VIII. par M. Ploucquet.

peut aboutir, qu'à s'embrouïller dans un verbiage ſtérile. Ceux qui ont éprouvé ce travers dans leurs méditations, m'entendront aſſez.

Si quelque choſe avoit dû me détourner des recherches, que je viens de faire ſur l'apperception de l'exiſtence propre, ce ne ſeroit ſûrement pas la trivialité, mais ce ſeroit plutot l'importance de ce ſujet, & les difficultés, qui l'environnent, difficultés au reſte, qui ne doivent point faire tort aux vérités ſolidement établies; vû qu'elles ne prouvent que nôtre ignorance ſur certains points, ſans détruire les preuves, que nous avons ſur d'autres; d'ailleurs il ſeroit aiſé de les retorquer contre tout Syſtème, qu'on adopteroit ſur ce ſujet. Enfin bien loin de m'imaginer de l'avoir conduit à un point de préciſion, qui ne laiſſât rien à deſirer, je ſerois ſenſiblement flatté, ſi mon travail méritoit la moindre attention des Connoiſſeurs, & pouvoit donner occaſion à des eſprits plus pénétrans que le mien d'entrer dans la même carriére, & de la parcourir avec plus de ſuccès. Cependant je me conſole avec les plus grands hommes, & les Philoſophes les mieux éclairés, qui loin de ſe repaître de Syſtèmes arbitraires, & de ſe régaler dans des Châteaux bâtis en l'air, reconnoiſſent ingenûment * „ que plus „ les objets ſont intéreſſans pour nous, plus ſont difficiles & incertai„ nes les connoiſſances, que nous en pouvons acquérir. „

* Mr. de MAUPERTUIS, *Diſcours des devoirs de l'Academicien.*

MEMOIRE

SUR L'APPERCEPTION CONSIDERÉE RELATIVEMENT AUX IDÉES, OU, SUR L'EXISTENCE DES IDÉES DANS L'AME.

PAR Mr. MERIAN.

Lorsqu'on a à traitter des matieres abſtraites, on commence par des définitions nominales & arbitraires ; les theoremes, qu'on bâtit ſur ces ſortes de définitions, ne ſont vrais ou faux, qu' idéalement, & ce ſeroit une grande inconſéquence, que de vouloir conclure de l'idée à une exiſtence réelle hors de l'entendement. Les Mathématiques pures ſervent d'exemple à ce que nous venons de dire. La certitude & l'evidence, qu'on y admire, ne ſont duës en effet, qu'à un manque de réalité, & ſi le Géometre eſt moins ſujet à broncher, que le Philoſophe, c'eſt uniquement parce qu'il ne meſure & ne calcule que des idées, leſquelles il détermine & circonſcrit lui même à ſa fantaiſie ; mais après avoir déduit les propriétés d'une figure ou d'un nombre il n'oſeroit en inférer, que cette figure ou ce nombre exiſte quelque part dans l'Univers hors de la ſphére de ſes idées. Toutes les autres Sciences peuvent, ce me ſemble, jouïr du même avantage, entant qu'elles ſe renferment dans les mêmes bornes.

Le manque de diſcernement entre ce qu'il y a de réel, & de purement idéal dans nos connoiſſances, a jetté dans l'erreur les plus grands

grands Philoſophes ; je ſuis porté à croire, que c'eſt lui, qui a enfanté & multiplié les ſyſtèmes, ſurtout lorsque je conſidere, que les limites entre le réel & l'idéal bien poſés deviennent autant d'ecueils, contre lesquels la plûpart d'entr'eux vont échouër. Le Syſtème le plus attaqué, & attaqué en plus de manieres, eſt peut-être celui de Spinoza, marque qu'il doit avoir paru redoutable: ſa forme eſt en effet éblouïſſante, & on n'oſeroit dire, qu'il ait été réfuté par tous ceux qui l'ont combattu. Je ne crois pas qu'on donnât gain de cauſe au Spinoziſme, en lui accordant autant de certitude & d'evidence, qu'il y en a dans les Elémens d'Euclide, & peut-être s'il n'y en a pas autant, le défaut eſt plutôt dans l'opération, que dans les principes. Mais faut-il un grand effort de génie pour s'appercevoir, que la premiere, & la derniere erreur de Spinoza, cette erreur, qui perpetuë le Sophiſme d'un bout de ſon Syſtème à l'autre, conſiſte en quelques propoſitions purement arbitraires, qui ſe masquent inſenſiblement en autant de vérités réelles. Suppoſez par exemple, que je trace le plan d'un Palais ſuivant ma fantaiſie; pour prouver, que ce plan repréſente le Palais de Sans-ſouci, ou tel autre, qu'on voudra, il faudroit ſans doute le vérifier par l'expérience, & il ne ſuffiroit point d'alléguer pour preuve, que le plan eſt conforme aux régles de l'Architecture. Il en eſt de même du Syſtème de Spinoza : accordons, qu'il ſoit bien lié, & qu'il ne manque rien à la forme des démonſtrations, il s'agira encore de réaliſer les propoſitions, qui lui ſervent de baſe ; or c'eſt dans ce paſſage de l'abſtraction à la réalité, que le Spinoziſme trouve ſon terme fatal, & il n'y a qu'à le tenter pour voir s'écrouler de ſoi-même ce Coloſſe, qui ſembloit menacer les Cieux.

Il y a donc une ſcience idéale, & une ſcience réelle ; la premiere ſuit la ſyntheſe, & eſt auſſi arbitraire, que les définitions, ſur leſquelles elle s'établit ; la ſeconde ſuit l'analyſe, & a autant de réalité, qu'en ont les expériences, dont elle part.

Pour appliquer ces remarques au ſujet, ſur lequel j'entreprends quelques réfléxions, il faut obſerver, que nonobſtant qu'elles rou-

lent ſur les idées, & l'apperception, nos recherches ne doivent point s'arrêter à la connoiſſance idéale. Je ne conſidere point ici les idées, comme repréſentatives des objets extérieurs; je les enviſage en elles-mêmes, comme ne répreſentant qu'elles-mêmes, & par raport à cette exiſtence, qui leur appartient dans l'être appercevant: l'apperception eſt une choſe, qui ſe paſſe réellement dans nos ames; ainſi l'unique ſource des découvertes, que nous pouvons eſpérer dans cette matiere, c'eſt l'expérience, & la ſeule methode, qu'il nous ſoit permis de mettre en uſage, c'eſt l'analyſe. Quoique cette route ne nous conduiſe pas fort loin, & ſoit bordée de beaucoup de doutes & d'incertitude, nous préferons néanmoins le peu de connoiſſances réelles quelle nous ouvre, à tous ces ſonges brillans, dont ſe bercent ceux qui ſuivent la methode oppoſée. Si je me permettois dès à préſent de définir le mot d'idée à mon gré, rien ne me ſeroit plus facile, que de donner un ſyſtème complet ſur leur préſence dans l'ame, & ſur l'apperception, que nous en éprouvons; un ſyſtéme, dis-je, qui plairoit peut-être autant par ſa nouveauté, que par ſa régularité; mais quelque définition de l'idée que j'adoptaſſe, ne m'arriveroit-il pas la même choſe qu'à Spinoza, & n'anticiperois-je pas ſur toutes les difficultés à naître, en ſuppoſant d'abord tout ce qui peut entrer en queſtion? Le problème p.e. que j'ai principalement en vûe, ſavoir, *s'il y a des idées qu'on n'apperçoit pas*, ne ſeroit-il point décidé affirmativement ou négativement, ſuivant qu'on définiroit ſelon Leibnitz, ou ſelon Des-Cartes? Et en croyant démontrer ſur de telles definitions, ſeroit-on autre choſe qu'expliquer des propoſitions adoptées gratuitement? On rencontre ce paralogisme dans tant de Syſtèmes, qu'on eſt facilement porté à l'attribuer à l'inadvertance plutôt qu'a l'artifice dans celui de Spinoza même. Renonçons donc à tout ce qui s'apelle Syſtème, & contentons nous de ce peu de vérités auxquelles l'expérience nous conduit.

Or elle m'enſeigne quatre faits, ſur lesquels je fonde tout ce que j'ai à dire ſur mon ſujet, & que par conſéquent il ſera à propos de développ-

velopper, & d'éclaircir par quelques remarques. Le premier eſt la difference de mes idées du ſentiment de moi-même; Le ſecond, la paſſivité de l'ame, à l'égard de ſes perceptions; Le troiſième la difference des perceptions d'entre elles-mêmes, ou leurs differentes manieres d'affecter l'ame; & enfin le dernier, leur préſence ou exiſtence commune dans le même ſujet.

Ayant traitté le premier point dans le Mémoire précedent, je n'ai rien à ajouter dans celui-ci. On y aura pû voir, qu'autre choſe eſt s'apperçevoir ſoi-même, autre choſe avoir des perceptions differentes de ſoi-même, & qu'avoir une idée ne ſignifie point s'apperçevoir ſoi-même ayant une idée, ou s'apperçevoir ſoi-même apperçevant; quoique l'être intelligent, entant que tel, ou l'ame entant qu'intelligente, ne puiſſe point être conçu ceſſant de s'apperçevoir ſoi-même, & que par là même tout ce qu'on apperçoit ſoit accompagné de *l'adapperception*, ou *cöapperception*, de l'exiſtence propre.

La paſſivité de l'ame à l'égard de ſes perceptions eſt un autre fait, que nous expérimentons à tout moment. L'empire de la volonté ne s'étend pas jusqu'à produire des idées, & nous ſentons que leur cauſe productrice eſt quelque choſe d'entierement different de nous-mêmes. Lorsque je tourne mes yeux vers un objet, ce n'eſt pas moi, qui produis l'idée de cet objet dans mon ame; je ne fais que me déterminer à l'action d'une cauſe étrangere; cette cauſe & le principe d'action, qui eſt en moi, ont chacun leur cercle d'activité à part; il eſt vray, que ſouvent la premiere ſemble complaire à la volonté en excitant les perceptions, qu'elle deſire, mais ſouvent auſſi cette cauſe étrangére ne fait point naitre les ſentimens que l'ame deſire, fait naitre ceux qu'elle ne deſire pas, & même ceux, qu'elle deſire de ne point avoir; il n'y a qu'à conſidérer ces cas beaucoup plus fréquens que le premier pour ſe convaincre, que l'ame eſt entiérement paſſive a l'egard de la production de ſes idées. Je renvoye la diſcuſſion ultérieure de ce ſujet à un Mémoire, qui ſuivra celui-ci, comme à ſa place naturelle; c'eſt ici celle d'avertir, que je ne prétends point décider la fameuſe que-

ſtion ſur l'origine des idées, ne les enviſageant que par raport à l'apperception, ou à leur exiſtence dans l'ame ; ſi la liaiſon de ces deux ſujets m'engage à avancer des theſes favorables ou contraires à quelque doctrine ſur le premier, je déclare, que c'eſt uniquement dans la vûe de ſatisfaire à l'objet préſent de mes recherches. Je n'ai ni la préſomption ridicule de renverſer les ſyſtèmes des grands-hommes, ni un reſpect aſſez aveugle pour déguiſer les difficultés que j'y rencontre; deux extrémités, que je crois également eloignées de l'eſprit Académique.

Un troiſième fait d'experience, c'eſt que l'ame eſt affectée differemment de ſes differentes perceptions. Je n'ignore point, que le mot d'idée eſt employé par les Philoſophes dans un ſens plus ou moins étendu. Monſieur *Locke* s'en ſert pour déſigner toute ſorte de perceptions, que l'ame éprouve. Nous lui donnons autant d'étendue, que nôtre ſujet le comporte, y comprenant jusqu'ici toutes les perceptions immédiatement préſentes à l'ame penſante; & pour ne point nous embaraſſer dans des diſtinctions ſuperfluës, nous nous ſervons indifféremment des termes d'idée & de perception; enfin, comme nous n'avons point encore donné de définition abſoluë de ces termes, nous nous réſervons la liberté pléniere d'en étendre ou reſtraindre le ſens, ſuivant que le beſoin l'exigera.

La reſſemblance & la diſſemblance de nos idées eſt ce qui nous les a fait ranger en genres & en eſpeces, dénominations abſtraites inventées pour faciliter les opérations de l'eſprit ; & la communication des penſées. L'imperfection de ce partage ſuffit pour faire connoitre, combien il eſt arbitraire; prenons pour exemple la difference qu'on a coutume de mettre entre les ſens & l'imagination. Le bruit du tambour, & la vûe d'un arbre, n'ont rien de commun, excepté le même nom générique de ſenſation, en vertu duquel ils appartiennent à une même claſſe; la vûe de l'arbre au contraire & l'imagination de l'arbre ſont raportés à deux genres differens, pendant que la ſeconde reſſemble ſi fort à la premiére, qu'elle n'en paroit qu'un affoibliſſement; &

pour

pour deſcendre aux eſpeces, la vûe d'un arbre ne differe-t-elle pas davantage de la vûe d'une montagne couverte de neige, que l'imagination de l'arbre ne differe de ſa vûe? En continuant l'examen on trouveroit la même choſe par rapport aux eſpeces ſubalternes. Pour rendre cecy plus ſenſible prenez deux eſprits, *A*, & *B*, dont le premier ne feroit qu'imaginer, & le ſecond ſeroit abſolument dépourvu du ſens de la vûe. Faites imaginer l'arbre au premier, pendant que le ſecond entend le ſon du tambour. Reprenez l'eſprit *A*, & un autre *C*, qui manqueroit de tous les ingrédiens de l'idée de l'arbre, excepté ceux qui lui ſont communs avec tous les objets viſibles; faites imaginer l'arbre à l'eſprit *A*, & voir à *C* la montagne couverte de neige; n'eſt-il pas aiſé de s'appercevoir, que dans l'un & l'autre cas l'eſprit *A* ſera celui, qui approche le plus de la vûe de l'arbre? Outre que les ſens ne ſe confondront jamais, & que les objets du même ſens ne peuvent être pris l'un pour l'autre, que par un jugement précipité, & encore fort rarement; jamais je ne verrai le ſon du tambour, jamais je n'entendrai l'image d'un arbre, & rarement je confondrai l'arbre & la montagne de neige. Je dis rarement, en comparaiſon des cas, dans leſquels l'imagination ſe confond avec la perception ſenſible; comme dans les ſonges, dans l'illuſion du *Théatre*, dans la *folie*, & dans cette eſpece de folie, qui conſiſte en un Roman, que chacun ſe fait ſur ſa propre perſonne. N'eſt-ce pas l'imagination, qui nous intéreſſe aux ſcenes touchantes, qui anime les fictions des Poëtes, & fait monter, pour parler avec Longin, l'ame d'Euripide ſur le char de Phaëton? N'eſt-ce pas elle, qui ravit le viſionnaire dans l'aſſemblée des Elûs & des Anges, pendant qu'elle transporte le mélancolique ſur les ſombres rivages de l'Enfer? Combien ne fabrique-t-elle pas de Démons, de Monſtres, de Fantomes & de Revenans?

* *Cernere uti videamur eos, audi·eque coram,*
Morte obita quorum tellus amplectitur oſſa.

Les

* Lucret. L. I. v. 135. 136.

Les perceptions que nous éprouvons en differens tems, ſont innombrables; cette obſervation n'eſt point à négliger. Si nôtre mémoire étoit aſſez vaſte pour conſerver toutes les differences de nos perceptions, & que nous puſſions attacher à chaque difference un ſigne particulier, alors, dis-je, les eſpeces des idées ſe ſous-diviſeroient bien d'avantage, qu'elles ne ſont préſentement; peut-être ne s'en trouveroit-il qu'un trés petit nombre de parfaitement reſſemblantes, & la ſomme des eſpeces approcheroit de bien près celle des individus. Mais non ſeulement nous oublions pour la plûpart ces nuances fines, qui ſéparent nos perceptions, mais encore pour diminuer l'embarras nous négligeons bien des differences apperçuës, nous contentant d'une reſſemblance en gros. Le commun des hommes prend les langues, comme il les trouve, & ne demande pas à en ſavoir d'avantage, qu'il ne lui faut pour ſatisfaire à ſes beſoins les plus preſſans; le Philoſophe eſt obligé par une néceſſité fatale à ſe tenir dans de certaines bornes; ſi un eſprit ſe trouvoit aſſez avantagé de la nature pour pouvoir graver dans ſa mémoire, avec autant de caractères diſtinctifs, toutes les differences de ſes perceptions, il ſe feroit une nouvelle langue, & on ne ſauroit douter, que par ce moyen, il ne pût étendre la ſphére de ſes connoiſſances, beaucoup au delà de leurs bornes préſentes.

Les idées, ou perceptions enfin, quelques differentes qu'elles ſoient les unes des autres, ont une choſe de commun, c'eſt leur préſence à l'eſprit, en quoi conſiſte l'apperception. Nous avons vu dans les préliminaires du Mémoire précedent, que l'apperception peut-être immédiate, dans un double ſens; or l'indépendance des idées préſentes à la ſimple vue ſe conſtatant de ſoi même, étant aiſé de les diſcerner des notions que le raiſonnement ou la réfléxion amenent, notions, qui ne réſultent, que de la differente combinaiſon des perceptions primitives; ce ſujet, dis-je, ne ſouffrant aucune difficulté conſidérable, nous nous attachons uniquement à l'autre ſens, ſavoir, à cette préſence dans l'ame, commune à toutes les idées, ſans exception, qui fait l'apperception immédiate dans le ſens le plus étendu, c'eſt celui auquel

quel l'ame voit tout ce qu'elle voit, comme appartenant à ſoi ; ainſi dans le ſyllogisme les idées ſe ſuccedent par leurs rapports mutuels, mais chacune d'elles eſt immédiatement préſente à l'eſprit, qui apperçoit. Il en nait, pour le dire en paſſant, une difficulté des plus fortes, par raport à nôtre exiſtence paſſée, dont il paroit, que nous ſommes auſſi peu aſſurés, que de nôtre exiſtence à venir ; qu'il me ſoit permis de la propoſer dans les paroles d'un Philoſophe du premier ordre : * „Comment connois-je les perceptions paſſées, que par le „ ſouvenir, qui eſt une perception préſente ? Toutes les perceptions „ paſſées ſont-elles autre choſe, que des parties de cette perception „ préſente ? Dans le premier inſtant de mon exiſtence, ne pourrois-„ je pas avoir une perception compoſée de mille autres comme paſ-„ ſées ? Et n'aurois-je pas le même droit, que j'ai, de prononcer ſur „ leur ſucceſſion ? „

Nous avons obſervé dans un autre endroit ſur l'apperception en général, qu'elle eſt indéfiniſſable, & que la maniere, dont elle s'exécute, nous eſt entiérement cachée. Il y a de certaines limites, au delà desquelles on ne peut ni demander ni répondre ; j'entends par demander, former une queſtion, qui ait un ſens diſtinct ; car n'eſt-il pas tout à fait déraiſonnable de prétendre une réponſe diſtincte à une queſtion indiſtincte, une réponſe ſenſée à une queſtion, qui n'a point de ſens, une réponſe formée de notions vrayes à une queſtion formée de notions fauſſes ? Or la plûpart des queſtions, qu'on forme ſur ce ſujet, ſont telles, qu'il faudroit avant toutes choſes faire des contrequeſtions pour avoir une notion explicite de ce qu'on demande ; alors il paroitra, que la queſtion n'avoit point de ſens, & il ſera aiſé de payer en réponſe de même valeur. Ce moyen eſt propre ſurtout à dépayſer certains eſprits fauſſement ſubtils, qui ſe perſuadent, que, pour battre en

* *Réflexions Philoſophiques ſur l'origine des langues & la ſignification des mots*, par M. de MAUPERTUIS.

en ruïne toute certitude, ils n'ont qu'à continuer leurs queſtions à l'infini; ſans prendre garde, que lorsque leur curioſité mal réglée les a emportés au delà de certaines bornes, ils ne s'entendent plus eux-mêmes.

N'étant donc pas en état d'aller auſſi loin, que nous ſouhaiterions dans nos recherches touchant cette matiere, il eſt pourtant de nôtre devoir d'en éloigner, autant qu'il eſt poſſible, les notions fauſſes & défectueuſes. Je ne trouve point ici de plus grand écueil, que les conceptions matérielles, vers leſquelles nous ſommes extrêmement enclins. Nôtre profonde ignorance, jointe à un déſir démeſuré de connoître, nous fait accrocher à tout; & faute de mieux, nous nous payons des analogies les plus foibles, & les plus imparfaites. Les Philoſophes, qui tiennent pour la ſimplicité de l'ame, rejetteront ſans héſiter l'opinion, qui conſidere les idées comme autant de ſubſtances; ils la rejetteront, dis-je, propoſée crûement; mais ſi dans la profondeur de leurs recherches ils vouloient quelquefois y faire attention, peut-être ſeroient-ils ſurpris de voir, combien ils ſe ſont rapprochés de cette même opinion; telle eſt la tyrannie, que les images ſenſibles exercent ſur nos méditations les plus abſtraites. Je me ſouviens d'avoir lû quelque part, (dans Lucien, ſi je ne me trompe,) la comparaiſon de l'ame avec l'araignée au centre de ſa toile, & celle des idées avec les mouches, qui y tombent. Je ſuis faché d'avouër, que c'eſt là ordinairement mon cas, lors même que je m'efforce le plus de détacher l'entendement de toutes les choſes corporelles. Il me reſte toujours un tiſſu ſubtil travaillé par l'imagination, qui ſépare, pour ainſi dire, la réſidence de l'etre apperçevant du lieu des objets, qu'il aperçoit. Je ſçai combien cette notion eſt fauſſe & incompatible avec la ſimplicité des ſubſtances ſpirituelles; cependant toute fauſſe & hetérogene qu'elle eſt, en jettant un coup d'oeil ſur l'Hiſtoire Philoſophique nous verrons, combien elle a été commune dans tous les âges.

Platon eſt le premier, qui ſe ſoit ſervi du mot d'Idée dans un ſens Philoſophique, quoiqu'on trouve déjà ſa doctrine dans les Nombres de

de Pythagore, & même dans les Oracles de Zoroaſtre; à moins que, comme il y a toute apparence, ces Oracles ne ſoient ſuppoſés, ou du moins falſifiés par les Platoniciens de l'Ecole d'Alexandrie, leſquels, comme on ſait, ont fait jouër plus d'une farce à la doctrine de leur Maitre, ſoit en la défigurant pour la rendre raiſonnable, ou pour l'accommoder à leur gôut, ſoit en en faiſant un mélange bizarre avec le Chriſtianisme, ſoit enfin en la fourrant partout pour lui concilier le préjugé de l'antiquité.

Mais pour conſidérer le ſentiment de Platon ſur les Idées, tel que nous le tenons de ſes propres Ecrits, & des témoignages les moins ſuſpects, peut-on penſer, ſans ſurpriſe, au ridicule, que ſa fauſſe notion des Univerſaux y a répandu : ce ſont, ſuivant lui, des ſubſtances éternelles & immuables, ſéparées de l'intelligence divine, quoiqu'emanées d'elle. Ces ſubſtances ſervent de prototype à l'oeuvre de la création, les créatures ſenſibles en ſont autant de copies ; comme le Peintre trace ſon tableau aprés quelque original, Dieu a eu beſoin de regarder ces idées originelles en donnant la forme à l'Univers; c'eſt dans elles ſeules, que réſide la verité, & la lumiere : l'ame humaine déchuë de la nobleſſe de ſon origine, & empriſonnée dans les liens de la matiere ne voit que des idées ombratiles, jusqu'à ce que peu à peu épurée par l'etude, ſurtout par le moyen de la réminiſcence, elle retourne à ſa ſource, ſavoir à la contemplation des réalités mêmes, qui, ſuivant ce Philoſophe, eſt l'unique & le dernier but de la ſcience. On peut voir ce Syſtême réuni ſous un même point de vûe dans l'élegante Allegorie de la ſpelonque, qu'on trouve au commencement du ſeptième livre de la République.

Platon eſt ſans contredit le Philoſophe le plus abſtrait de toute l'antiquité, & l'on obſerve, qu'une des raiſons, qui l'ont porté à ſéparer les idées de l'entendement divin a été la crainte de déroger à la ſimplicité parfaite de cet entendement ; cependant dans ce ſujet nous le voyons prendre tout à rebours ; mépriſant l'unique ſource des connoiſſances réelles il va ſe repaître de fictions, qu'il réaliſe, il ſubſtan-

tifie les notions abſtraites, & même plus elles ſont abſtraites, plus elles lui ſemblent mériter la dignité de Subſtance. Enfin, pour embellir un ſyſtème auſſi chimérique, & pour ſe faire illuſion à ſoi-même & aux autres, il épuiſe tous les charmes de l'Eloquence, & tout le ſel de l'Atticisme.

Ariſtote a eu grande raiſon de rejetter les Idées Platoniciennes; ſa table raſe me paroit un effort vers la bonne Philoſophie, & vers la véritable methode ; cependant entêté de l'exiſtence ſéparée des Univerſaux, c'eſt à dire de la même erreur, qui avoit égaré Platon, il les transplante dans la matiere ſous le nom de forme. Dans toute l'Antiquité on ne trouve que les Stoïciens, qui ayent dit quelque choſe de raiſonnable ſur ce ſujet en réduiſant tout aux notions de l'ame ; car quoiqu' Epicure en ait parlé à certains égards bien plus ſenſément, que Platon & Ariſtote, il s'eſt pourtant perdu dans l'autre extrémité, ſa théorie des idées étant entierement matérielle.

De tous les anciens ſyſtèmes celui d'Ariſtote ſeul a fait fortune: car, bien que les Pères de l'Egliſe ayent donné la préférence a celui de Platon, dans lequel ils croyoient voir de l'analogie avec les dogmes de la Religion Chretienne, l'Ecole pourtant prit enfin le deſſus, & enſévelit ſous ſes ténébres la raiſon & le bon-ſens; c'eſt l'epoque brillante de la forme Ariſtotelique ; féconde en entités, en quiddités, & en qualités occultes, elle ſe reproduiſit, & ſe multiplia presqu'à l'infini. Vers la fin de l'onzième ſiecle il ſ'eleva une Secte, qui eut la hardieſſe de nier l'exiſtence réelle des Univerſaux, les uns allant jusqu'a ſoutenir, qu'ils n'exiſtoient que dans le ſon, & dans le ſouffle de la bouche, les autres les plaçant dans la conſtruction des phraſes, & les plus raiſonnables dans les notions de l'entendement; ceux-ci furent appellés les Conceptualiſtes. Cette nouveauté fit beaucoup de bruit & de pouſſiere dans l'Ecole, & y produiſit le fameux Schisme entre les Nominaux & les Réaliſtes ; cependant on étoit encore tellement prévenu pour la ſubſtantialité des formes, que vers la fin douzième ſiecle, la ſecte des Nominaux ceſſa entierement, & fut enterrée avec Abelard, jusqu'à ce qu'au

qu'au quatorzième Guillaume Occam, ſurnommé le Docteur invincible, vint la relever & lui prêter main forte. La controverſe ſe ranima avec beaucoup de vehémence de part & d'autre, on vint des injures aux coups de poings & jusqu'a enſanglanter les Auditoires, tellement que Louis onze Roi de France fut obligé de condamner, par un Edit public, la ſecte des Nominaux, d'interdire & de confisquer leurs Livres, & de la faire abjurer aux Docteurs & aux Maitres des Univerſités, Enfin qui eſt-ce qui ignore, combien de peine & de ménagement il a falu prendre, & combien de perſécutions Des-Cartes & ſes diſciples ont eu à ſubir, avant que de détruire l'enchantement des formes ſubſtantielles, les Theologiens de tous les partis criant à l'héréſie, tout comme ſi la ruïne de ces chiméres entrainoit non ſeulement celle du Chriſtianisme, mais encore celle de la Religion en général ?

Je rapporte ce morceau hiſtorique, afin de faire voir, que toutes les erreurs, qui ont retardé pendant tant de Siecles les progrés de l'eſprit humain, ont pris naiſſance dans la fauſſe notion des idées ; depuis que la verité à paru au grand jour, & qu'on s'eſt déſabuſé entierement de l'exiſtence réelle des Univerſaux, & de la ſubſtantialité des idées, on a ceſſé en même tems de ſe payer de verbiage en Metaphyſique, & de prendre des mots pour les cauſes des phenoménes dans les ſciences naturelles. Perſonne n'ignore, que les découvertes faites depuis cet heureux tems font evanouïr, & regarder comme zero, tout ce qu'on a debité jusques là depuis l'antiquité la plus reculée.

Cependant cette notion abſurde ſeroit-elle ſi bien effacée de la Philoſophie moderne, qu'il n'en reſteroit aucune trace ? Je n'oſerois le dire, tandis que je vois les Philoſophes enclins à donner, pour ainſi dire, un corps aux idées, réaliſer les abſtractions, ou du moins en faire plus de cas, qu'elles ne méritent ; & en général les idées génériques conſidérées comme principes & fondemens de nos connoiſſances me paroiſſent autant de preuves que cette erreur n'a pas encore perdu toute ſon efficace. Le ſyſtème du * Pere Malebranche en eſt, ſi j'oſe ainſi

 dire,

* Recherche de la vérité, L. III. P. II. chap. 6.

dire, tout infecté. Si l'on eſt ſupris de voir ce grand homme avancer, que l'eſprit a l'idée de l'infini avant celle du fini, & qu'on ne ſauroit avoir celle de quelque choſe en particulier ſans avoir eu auparavant celle de toutes les choſes en général, on l'eſt beaucoup plus en lui voyant débiter une theſe auſſi contraire à toute expérience, comme une vérité, que nous expérimentons chaque jour, & qui eſt généralement reconnuë. Mr. de *Leibnitz*, quoiqu'il nomme les idées affections & modifications de l'ame, ne rejette entierement, ni le ſyſtême de Platon, ni celui du Pere Malebranche, ne dédaignant point de s'enrichir de leurs dépouïlles. Il met la réminiſcence Platonicienne bien au deſſus de la table raſe d'Ariſtote & de *Locke*, & ſoutient l'exiſtence des perceptions dans l'ame indépendamment de l'apperception, analogue à l'exiſtence de la figure d'Hercule dans le marbre crud. Il eſt vrai qu'il tache d'épurer le Platonisme en replaçant le monde intellectuel dans l'entendement de Dieu, & en appliquant à ſes Monades le titre de veritables ſubſtances (ὄντως ὄντα) dont Platon décore ſes Univerſaux.

Les idées n'étant pas des ſubſtances, mais des manieres d'être de l'ame, & l'ame ayant une idée étant l'ame exiſtante d'une certaine façon, il importe à préſent de débattre la queſtion célébre; ſi l'apperception eſt eſſentielle aux idées, ou ſi les idées peuvent exiſter dans l'ame, ſans être appercuës d'elle!

Il s'agit avant tout de bien établir l'état de la queſtion pour éviter les diſputes de mots, & je me flatte d'y avoir frayé le chemin dans mes réfléxions précedentes. On voit préſentement, que je n'ay point eu tort de ne me pas preſſer à définir, puisque c'eſt la définition de l'idée-elle même, ſavoir une définition réelle & finale, qui eſt le grand point à décider. Si le mot d'idée ne ſignifie rien de plus, que l'objet de nôtre apperception, avoir & appercevoir une idée ſera préciſément la même choſe, vû qu'on n'aura que les idées, qu'on apperçoit, & qu'on n'apperçevra que celles qu'on a. Si au contraire le mot d'idée peut ſignifier quelque choſe, qu'on n'apperçoit pas, & qui exiſte

néan-

néanmoins dans l'ame, avoir & apperçevoir les idées ſeront deux choſes differentes, & bien qu'on ait toutes les idées qu'on apperçoit, on n'appercevra pas toutes celles qu'on a ; ainſi dans le ſecond cas la définition réelle de l'idée deviendra plus étenduë que dans le premier, vû que l'apperception, qui ſervoit à la reſtraindre, en ſera retranchée. Le premier ſentiment ne ſuppoſe dans l'ame, que ce que l'expérience nous y découvre, & ce que nous y avons trouvé jusqu'ici ; au lieu que le ſecond prétend y ajouter par le raiſonnement. C'eſt donc ce ſentiment, que nous devons examiner ; & pour bien nous en acquitter, il en faut donner avant tout une courte expoſition.

„ Toutes les perceptions ſont claires ou obſcures, & l'ame n'ap-
„ n'apperçoit que les claires : ainſi il y exiſte des perceptions, qu'elle
„ n'apperçoit point, ſçavoir les obſcures. Pour exprimer la maniere d'e-
„ xiſter dans l'ame, qui convient à toutes les perceptions en général,
„ on ſe ſert du mot de *repréſentation*, en diſant, que l'ame les re-
„ preſénte, ou qu'elles ſont repréſentées dans l'ame ; ainſi la repré-
„ ſentation differe de l'apperception, comme le genre de l'eſpece ;
„ tout ce qui eſt apperçu eſt repréſenté, mais tout ce qui eſt répre-
„ ſenté, n'eſt pas apperçu, l'apperception n'étant que la repréſenta-
„ tion claire. Pour exprimer l'exiſtence des perceptions obſcures en
„ particulier, on ſert du terme d'*involution*, nommant les perceptions
„ obſcures enveloppées dans l'ame ; le paſſage de l'obſcurité à la clar-
„ té eſt apellé l'*evolution*, & les idées, qui l'éprouvent ſont dites ſe
„ développer ; ce qui opere l'évolution, eſt une *force*, ou, *tendance*
„ qui tient le milieu entre l'acte & la faculté, & obtient toujours ſon
„ effet, à moins qu'elle ne trouve un obſtacle, qu'elle ne peut ſurmon-
„ ter, & contre lequel elle lutte continuellement ; cet effet a ſon fon-
„ dement, ou ſa raiſon ſuffiſante, dans les perceptions précédentes, &
„ tout l'état préſent de l'ame eſt toujours fondé ſur tout ſon état paſſé,
„ ou ſur le total de ſes perceptions précedentes, dont les préſentes ſe
„ développent conformément aux loix générales de la Metaphyſique,
„ & aux loix etnico-logiques des appetits ; de là on peut dire, que

„ dans

„ dans l'ame le préſent *eſt gros* de l'avenir, & qu'elle enveloppe dans
„ ſes perceptions le préſent, l'avenir, & le paſſé; enfin, comme tout
„ eſt lié dans le monde, & que l'ame en eſt repréſentative ſuivant ſon
„ point de vûe, on peut dire, qu'elle enveloppe le monde tout entier,
„ ſavoir la cöexiſtence & la ſucceſſion de toutes les choſes, & la nom-
„ mer *un miroir vivant de l'Univers.*„

Voilà, je crois, un précis de la doctrine Leibnitienne ſur les idées & l'apperception, détachée du ſyſtéme plus étendu de l'harmonie univerſelle, dont elle eſt un des arcs-boutans. On peut analyſer un ſyſtéme en deux façons, ſavoir, en luy-même, & par rapport aux preuves, ſur leſquelles on l'établit. Je vai donc propoſer d'abord quelques difficultés contre celui-ci, dans l'unique vûe de répandre autant de jour qu'il m'eſt poſſible, ſur une matiére auſſi épineuſe. J'ai évité de réchauffer des objections uſées; s'il en eſt cependant reſté quelques unes par-ci par-là, ce ſera une marque, qu'elles ſont très naturelles. Pour procéder avec ordre, je conſidérerai avant toutes choſes les idées dans leur involution; de là je paſſerai à l'involution du monde entier, & au changement, qui arrive aux idées encore dans l'enveloppe, & je finirai par l'évolution ou le paſſage de l'obſcurité à la clarté.

D'abord, lors qu'on dit: *il y a dans l'ame des idées, que je n'apperçois pas*, la propoſition me paroit ne préſenter aucun ſens; car voici trois termes, qui ne ſont attachés à aucune notion, 1. Ame. 2. Idée. 3. Exiſter dans l'ame. Jusqu'ici j'ai connu *l'ame* comme un être appercevant, les *idées* comme des objets apperçus, & *exiſter dans l'ame* ont été chez moi des termes ſynonymes avec *être apperçu de l'ame.* A ne procéder donc que ſur mes notions déja formées, la propoſition devroit être paraphraſée ainſi: *l'être appercevant apperçoit des objets d'apperception, qu'il n'apperçoit pas*; ce qui eſt une contradiction formelle. On ne peut rien excepter contre les notions, car elles ſont puiſées dans l'expérience, & les ſeules réelles, qu'il ſoit poſſible d'avoir par ſon moyen. Si on en détache donc les termes, dont je viens de parler, je ne leur connois abſolument plus de ſens déterminé, & il vau-

vaudroit autant dire : *Dans un être je ne ſais quel, exiſte je ne ſais quoi, je ne ſais comment.*

Le mot de repréſentation eſt ſujet aux mêmes inconvéniens, que celui d'idée, auquel on le ſubſtituë ; au moins n'oſera-t-on pas prétendre d'expliquer le ſecond par le premier. En conſidérant l'ame telle que je la connois, ſavoir comme un être apperçevant, rien n'y ſauroit être repréſenté qu'elle n'apperçoive, & cette choſe, qu'elle n'apperçoit pas, ne ſeroit point repréſentée à l'ame que je connois, mais à je ne ſai quel être non-appercevant, que je ne connois pas, & l'acte de repréſentation, qui auroit lieu dans cet être, ne ſeroit rien de ſemblable à celui que j'experimente dans l'ame, que je connois, mais un acte je ne ſçais quel, dont je n'ay aucune notion, & qui arrive dans un ſujet à moi inconnu.

Peut-être me ſuis-je trompé dans l'expreſſion, que l'idée eſt repréſentée à mon ame, & il auroit falu dire, qu'elle eſt repréſentée dans mon ame, ou pour marquer, que les repréſentations coulent de ſon propre fond, que l'ame repréſente ſes perceptions à tel être, qui les apperçoit, ſoit que cet être ſoit l'ame même, comme il arrive dans les perceptions claires, ſoit qu'il exiſte hors d'elle, comme dans les perceptions obſcures ; mais ſaura-t-on mieux de cette façon cequ'il faut entendre par repréſentation ? Il n'y a qu'à voir, à quel point on s'enfonce dans l'obſcurité en pourſuivant cette notion, pour reconnoitre qu'elle n'eſt point intelligible. Ne faudra-t-il pas dire, par exemple, que cet être exiſtant hors de moi, qui apperçoit mes repréſentations obſcures, repréſente mes repréſentations, & qu'il a des repréſentations claires de mes repréſentations obſcures ? ce qui me ſemble contradictoire, à moins qu'on n'adopte l'ancienne erreur de la ſubſtantialité des idées, ſavoir une autre contradiction. Je vais le montrer en me faiſant jour, autant qu'il m'eſt poſſible, dans un ſujet auſſi embrouillé.

Je ſuppoſe une perception obſcure A, exiſtant dans mon ame, que je nomme x, apperçuë par un être hors de moi, que j'apelle y. Nous

aurons donc 1. *A* repréſenté en *x*, 2. *x* repreſenté en *y*, 3. *A* repréſenté en *x* repréſenté en *y*. Or *A* étant une perception obſcure en *x*, je demande, s'il le ſera de même en *y*. Si on l'affirme, je dis, qu'*A* ne ſera point apperçu d'*y* contre l'hypotheſe. Si on poſe qu'*A* eſt repréſenté clairement dans *y*, je dis que cette poſition implique, puisqu'alors ce ne ſera plus la perception *A*, mais une toute differente, qui n'appartiendra point à *x*, mais à *y* tout ſeul. Ce ne ſera point *A* repréſenté en *x*, repréſenté en *y*, encore contre l'hypotheſe. On peut le concevoir auſſi d'une autre maniere.

Si un eſprit fini, ou infini, (car il n'importe,) pouvoit voir ce qui ſe paſſe dans mon ame, & qu'il y vît la perception *A*, il la verroit ſans doute telle qu'elle eſt, & non telle qu'elle n'eſt pas dans mon ame. S'il la voyoit telle qu'elle eſt, il la verroit en ne la voyant pas, car on ne ſauroit jamais appercevoir les perceptions obſcures. Dès qu'il l'apperçevroit, ce ne ſeroit plus la perception *A* appartenant à mon ame ; mais ce ſeroit une perception claire appartenant à l'eſprit en queſtion. Je conſidére les perceptions comme modifications de l'ame, qui n'exiſtent que dans le rapport à leur ſubſtance ; ce ſens admis, on ne peut pas dire, que la repréſentation *A* peut être obſcure à l'egard de mon ame, & claire à l'egard d'un autre eſprit, puisque deux eſprits ne peuvent point participer à la même idée individuelle, (en ce cas ce ne ſeroient pas deux, mais le même eſprit,) & qu'*A* eſt tout ce qu'il eſt rélativement à mon ame, dont il eſt modification ; c'eſt mon ame modifiée en *A* ; tandis qu'un eſprit quelconque verroit en moi quelque choſe qui ne ſeroit pas mon ame modifiée en *A*, il ne verroit point encore la perception *A*. Enfin Dieu même, qui voit tous les changemens, qui arrivent aux eſprits, ne ſauroit voir comme claires les repréſentations obſcures, qui s'y trouvent, & comme dans les obſcures il n'apperçoit rien, n'en pouvons-nous pas conclure, qu'elles ne ſont rien ?

Pour ſauver toutes ces contradictions, je ne vois qu'un ſeul remède, mais qui eſt pire que le mal, c'eſt de trancher le mot, & d'accorder aux perceptions le nom de ſubſtance ; auſſi bien paroit-il qu'a

qu'à cela près on leur en accorde toutes les prérogatives. Si la même perception peut-être apperçue de l'un, pendant qu'elle n'eſt pas apperçue de l'autre, apperçue differemment, en differens tems, & par differens eſprits, paſſer par differens degrés de clarté & d'obſcurité, n'eſt-elle point un ſujet à part, ſubſiſtant indépendamment de tout autre, & le *ſubſtratum* de ſes propres accidens ou modifications. S'il n'en étoit pas ainſi, chaque changement ameneroit une nouvelle perception; puisque donc la même reſte, & que l'obſcurité & la clarté ſont les changemens qu'elle ſubit, il faut néceſſairement, que chaque perception ſoit un ſujet permanent, car „ en tout changement, (c'eſt * Monſieur de *Leibnitz* „ qui parle,) il y a quelque choſe qui dure, & quelque choſe qui paſſe. „

Je ne demande point, qu'on m'aprenne, quel eſt le ſujet qui dure, lorsque l'idée obſcure paroit au jour, ou lorsque la claire ſe replonge dans l'obſcurité: ce ſeroit demander l'impoſſible, puisqu'on n'en a point de notion. Mais qu'on me faſſe le plaiſir de me bien déterminer, ſi c'eſt une ſubſtance ou un mode, ou un être mi-parti. S'il n'eſt qu'un mode, il ne ſauroit être durable, & chaque ſucceſſion l'anéantit. Il eſt la choſe qui paſſe, & non la choſe qui dure; & puis l'obſcurité & la clarté ſeroient les modes de ce mode, & il y auroit des modes modifiés, expreſſion peu Philoſophique, pour ne rien dire de plus; mais ne ſeroit ce pas d'un autre coté le comble de l'abſurdité d'introduire dans l'ame un nombre de ſubſtances égal à celui des perceptions? Il ſeroit injuſte de ſoupçonner ſeulement un Leibnitz d'un pareil travers, & je crains presque de ne pas aſſez ménager les termes en diſant, qu'un amour outré pour le Platonisme pourroit l'avoir conduit dans des ſentimens ſujets à de facheuſes conſéquences. Quoiqu'il en ſoit, on reconnoit la ſource de la mépriſe indiquée plus haut, ſavoir qu'on attribue aux idées une réalité pareille à celle des objets, qu'on croit leur répondre hors de l'ame: cette erreur a enfanté une autre notion tout à fait fauſſe, par raport à l'identité des idées, que nous détruirons plus bas; préſentement nous retournons à conſiderer

* Monadol. §. 13.

le ſens des termes, dont on ſe ſert pour établir les idées non apperçues.

Comme les termes d'*idée*, *perception*, *repréſentation*, *involution*, & pluſieurs autres ne nous préſentent dans leur ſignification propre que des choſes matérielles, leſquelles il faut ſpiritualiſer en les appliquant à l'ame, il s'éleve une queſtion qu'il importe de décider, ſavoir, juſqu'à quel point il eſt permis au Philoſophe d'employer des expreſſions priſes de la matiere & du mouvement, pour déſigner les choſes ſpirituelles.

Je conviens que, par un défaut de toutes les langues, nous ſommes obligés en traittant les choſes ſpirituelles, de nous ſervir de façons de parler tirées des corps & de leurs phénomenes. Cet uſage eſt excuſable par ſa ſeule néceſſité, & pour déſigner les choſes, dont nous ſavons, à n'en point douter, qu'elles exiſtent dans nôtre ame. Je m'imagine que, lorsque les hommes ont commencé à ſe vouloir communiquer mutuellement ce qui ſe paſſoit dans leurs ames, n'étant pas encore fournis d'expreſſions propres à cette fin, ils ſe ſont ſervis de celles qu'ils avoient déja amaſſées pour leurs beſoins corporels ; il n'y a qu'à en étudier les étymologies dans toutes les langues, qui ne ſemblent presque que les traductions les unes des autres, pour voir, ſur quelle analogie groſſiére elles ſont fondées ; c'eſt comme ſi je le tenois de mes mains, aura dit quelqu'un, de là l'apperception ; c'eſt comme une boule qui rebondit du coté dont elle vient, aura dit un autre, c'eſt la réfléxion. Le Philoſophe ne peut donc tout au plus ſe ſervir de ces expreſſions, que pour autant de marques ou de caractères, auxquels il puiſſe reconnoitre les choſes, qu'il a obſervées dans ſon ame ; mais il ne peut point les employer pour y introduire des notions nouvelles, ou qu'il n'a pas encore eûes. Ce ſeroit prendre tout à rebours, que de forger des mots pour y attacher enſuite les notions.

Pourquoi les noms de *mémoire*, *réfléxion*, *concluſion*, &c. portent-ils une notion dans mon ame, & pourquoi y ont-ils un ſens déterminé ?

terminé ? C'eſt uniquement, parce que j'y reconnois ce qui s'eſt paſſé dans mon ame de mon ſçû, parce que je me ſuis ſouvenu, que j'ay réfléchi, & que j'ay tiré des concluſions ; & quoique ces termes dans leur propriété ne ſignifient que des choſes corporelles, je ſai pourtant en les appliquant à l'ame, non ſeulement qu'ils n'y ſignifient rien de corporel, mais j'ay encore des notions de ce qu'ils ſignifient ; ſi je voulois au contraire faire naitre à quelqu'un une notion ſpirituelle, qui n'auroit jamais, de ſon ſçû, exiſté dans ſon ame, il ne ſuffiroit point de prononcer, ou d'écrire le mot, par lequel je déſigne cette notion, & le mot ne porteroit rien de plus dans ſon ame, que la perception ſenſible du ſon, dont il affecte ſes oreilles, ou des lettres, dont il affecte ſa vûe ; ſuppoſé que je n'aye jamais réfléchi, & qu'ainſi je n'aye pas pu convenir avec mes prochains de donner à un certain acte de l'entendement le nom de réflexion, ce nom prononcé m'inſtruiroit preciſément autant ſur cet acte, que celui d'*Abra-Cadabra* ; il me ſeroit ce que celui de couleur eſt à l'aveugle-né.

Tout cecy s'applique très naturellement à nôtre ſujet. Lorsque je dis : il exiſte dans l'ame des repréſentations, qu'on n'apperçoit pas ; croirai-je en effet parler plus intelligiblement, que je ne ferois en diſant : il exiſte dans l'ame des *Abra-Cadabra*, que je n'apperçois point, ou, dans l'ame de l'aveugle-né exiſtent des couleurs inviſibles ?

Ne nous arrêtons donc point à la communauté des noms ; les idées & les couleurs, dont je puis dire avoir une notion, ne ſont que celles que j'apperçois, & que je vois. Lors donc que j'applique ces mêmes noms à déſigner des je ne ſais quoi, que je n'apperçois ni ne vois, n'eſt ce pas ſe jouër des termes en les employant tantôt pour dire quelque choſe, & tantôt pour ne rien dire, afin de faire croire, que ce rien eſt quelque choſe ? Que ſont p. e. les couleurs de l'Arc-en ciel dans l'ame de l'aveugle, ou dans ma propre ame, avant que je les voye, & quel droit ai-je de les appeller dans cet état, (ſuppoſé qu'il exiſte,) repréſentations ou idées, dans lequel il faut du moins convenir, qu'elles n'ont rien de reſſemblant avec les couleurs viſibles ? Les

mots, il eſt vrai, ſont arbitraires dans leur inſtitution, mais lorsqu'une fois le ſens en eſt fixé, il m'eſt auſſi peu permis d'appeller un je ne ſais quoi idée, que d'appeller un arbre éléphant; c'eſt à dire, je ne le puis faire, qu'en brusquant les régles du langage, & les loix du commerce, qui régne entre les hommes.

Il me ſemble donc, que ſi on ne peut pas ſe deſſaiſir des perceptions inapperçues, il leur faudroit du moins trouver des noms, qui ne ſignifieroient aucun des objets apperçus; p. e. ſi on les appelloit *barocco*, on diroit que dans l'ame exiſtent des *barocco*, qu'elle n'apperçoit pas, & que les couleurs de l'Arc-en-ciel ſont *barocco* dans l'ame de l'aveugle. Alors il paroitroit évidemment, que la propoſition n'a point de ſens, que les perceptions obſcures ne ſont rien, que ce n'eſt qu'à la faveur d'un nom commun avec des choſes réelles, qu'elles maintiennent leur exiſtence, & que dépouïllées de cette communauté de nom, elles retombent dans le néant. Je n'ai pas beſoin de repéter, ce que j'ai dit pluſieurs fois ſur l'imperfection des analogies matérielles, qu'on feroit peut-être mieux de bannir entiérement de la Pſychologie, & d'abandonner aux Poëtes & aux Orateurs, mais qui ſont tout à fait hors de ſaiſon, quand il s'agit de donner des notions nouvelles, comme celles dont nous venons de parler.

Tout ce que nous venons de remarquer touchant les perceptions, ſe confirme par l'embarras, dans lequel on ſe trouve, lorsqu'il s'agit de définir; je n'ai jamais pû rencontrer une ſeule définition de l'idée en général, qui ait été diſtincte; je dis de l'idée en général, & qui convienne à ce terme dans toute ſon étenduë. Une pareille définition doit exprimer, ce que l'idée obſcure, & la claire ont de commun, & qui leur donne droit à la même catégorie: or tous les efforts n'aboutiſſent qu'à dire, qu'elles ſont toutes deux repréſentations, & que l'idée eſt ce qui repréſente quelque choſe; c'eſt définir un nom par un autre nom, un terme obſcur par un terme obſcur, ou tout au plus, c'eſt rendre un mot grec en françois. En demandant la définition de l'idée obſcure en particulier, on obtient une réponſe à peu près de même valeur; c'eſt celle que

l'ame

l'ame n'apperçoit pas. Une premiere propoſition vuide de ſens une fois admiſe, en enfante mille autres, que l'on admettra, & qu'on croira comprendre par les mêmes raiſons, ſur leſquelles on a admiſe la premiere comme compréhenſible; tant il eſt néceſſaire en fait de ſpéculation de s'aſſurer de chaque pas.

Pour ne rien paſſer, qui tende à favoriſer les perceptions obſcures, ne les pourroit-on pas enviſager, comme de ſimples rapports, que les perceptions préſentes auroient avec celles qui les précedent & ſuivent, en vertu de ces rapports? Je réponds en peu de mots. 1. que la ſimple poſſibilité d'être apperçu, convient à tout ce qui n'implique point contradiction avec la faculté apperceptive. 2. Les idées qui pourroient être apperçues, ſont ſuppoſées dans l'ame ou hors de l'ame; dans le premier cas, on ſuppoſe ce qui eſt en queſtion, ſavoir que l'idée exiſte avant que d'être apperçuë; hors de l'ame nous accordons volontiers à toutes nos idées préſentes, paſſées, futures & poſſibles, cette exiſtence dans l'entendement divin, dont elles participent avec toutes les poſſibilités. 3. Le ſimple rapport ne peut point cauſer cette ſucceſſion ſi étonnante des idées, dont nous ſommes témoins chaque jour, & je crois, pour le dire en paſſant, qu'on fait de très grands abus de la doctrine des raports, ſur leſquels ce n'eſt pas ici le lieu de m'arrêter. Enfin-je-le repete: la ſimple poſſibilité, qu'une idée, qui n'exiſte pas actuellement dans l'ame, a d'y exiſter, cette poſſibilité, dis-je, n'eſt pas ce que nous combattons.

Je crois avoir ſuffiſamment débattu mon premier point pour pouvoir paſſer au ſecond. Je ne jetterai, pour ainſi dire, qu'un coup d'oeil ſur l'ame, entant qu'elle enveloppe l'Univers, & je ne produirai qu'une ſeule difficulté, qui peut-être même ne ſera regardée que comme un argument à la perſonne, *ad hominem*.

Comme l'ame n'eſt point affectée par dehors, elle a contenu dès-l'inſtant de ſon exiſtence, toutes les perceptions harmoniques aux changemens, qui arrivent par tout l'Univers, & dans toute ſa durée, & qui s'impriment tous ſur ſon corps harmonique, le type de ſes repréſen-

préſentations ; l'ame repréſente donc toujours l'état préſent du monde, & comme cet état eſt fondé dans tous les états paſſés, & gros de tous les états à venir, l'ame enveloppe le tout, préſent, paſſé, & à venir. Monſieur de *Leibnitz* s'exprime très libéralement ſur ce ſujet : ſuivant lui „il n'y a point de choſes individuelles, qui n'expriment „ toutes les autres, de ſorte que l'ame, à l'égard de la variété de ſes „ modifications, doit être comparée avec l'Univers, qu'elle repréſente, & même en quelque façon avec Dieu, dont elle exprime finiment l'infinité. . . . . Les enteléchies ſont toujours des images de „ l'Univers, ce ſont des mondes en racourci à leur mode, des ſimplicités fécondes, - - - virtuellement infinies par la multitude de „ leurs modifications, des centres, qui expriment une circonfe„ rence infinie. - - - Les penſées confuſes enveloppent l'infini &c.„ * Jusqu'ici Monſieur de *Leibnitz*. On diroit qu'en ** quelques endroits Monſieur le Baron de *Wolff* veut mettre des bornes à l'Univerſalité de cette repréſentation ; il dit par exemple, que l'ame ne peut pas repréſenter, à la fois, tout l'état paſſé & à venir du monde, à cauſe que ſa force eſt une force bornée ; peut-être ne le doit-on entendre que des repréſentations claires *** dont il avoit parlé auparavant. **** Monſieur *Bulfinger* ſe relache auſſi ſur la repréſentation du monde entier, ne croyant pas néceſſaire que chaque être ſimple repréſente tout l'Univers *actu ipſo*. On pourroit, penſe-t-il, attribuer à chacun ſa ſphére d'activité déterminée ; & bien que chacun eût la repréſentation potentielle de l'Univers, l'actuelle ſeroit reſtrainte à ce qui ſeroit néceſſaire, pour que les ſenſations naquiſſent de ſon propre fond. Je ne puis pas m'imaginer que ces hommes célébres ſoient tombés ſans ſujet ſur de pareilles reſtrictions, la derniere tendant même en quelque façon au préjudice de l'harmonie univerſelle. La difficulté ſuivante

* Repl. de M. Leibnitz aux réflexions de M. Bayle.

** 809 Met. All.

*** Ib. 783. 784. 785.

**** Dil. de Deo, anima & Mundo. 119.

vante n'auroit-elle point contribué quelque chose à cet adoucissement.

Le monde est un infini reconnu pour tel par M. de *Leibnitz*, non seulement *à cause de la division actuelle de la matiere à l'infini*, point que l'on conteste aujourdhuy; * *mais encore parce qu'il doit s'étendre par toute l'éternité future*, ce dont on tombe généralement d'accord; le monde physique en conséquence doit éprouver un nombre infini de changemens, & l'ame, qui est le monde représentatif, une infinité de perceptions, qui sont enveloppées en elle, depuis le premier instant de son existence; assertion, qui en effet ne convient pas trop bien à ceux qui rejettent la divisibilité de la matiere à l'infini, par la raison que le fini ne peut point contenir l'infini, ni en avoir les propriétés.

Lorsqu'on réfléchit d'un coté sur le nombre infini de perceptions, que nôtre ame enveloppe, & de l'autre sur le petit nombre qu'elle en développe, & qu'on considére, que le but de l'ame est de développer ses perçeptions, il faudra dire, qu'elle s'eloigne continuellement de son but; pendant que je developpe une seule idée, quel nombre prodigieux de changemens ne se passe-t-il point sur le grand théatre de l'Univers, dont chacun devient pour moi un surplus à développer. Plutôt les Danaïdes auroient rempli leur tonne, que l'intelligence finie, qui ne développe que successivement, & peu à la fois, n'aura vuidé la sienne & soit à la partie infinitesime d'une pareille tâche. Mais lorsqu'on considere les raisons de l'impossibilité de ce développement, les mêmes ne subsistent-elles point pour celle de l'enveloppement? Elles reviennent à cette raison générale; que le monde est un infini, & la puissance de développer finie; mais celle d'envelopper est-elle donc sans bornes, ou ne répugneroit il point à un esprit fini d'envelopper l'infini, & cela toujours & sans succession?

S'il est réellement impossible, que l'ame enveloppe l'infini, on ne pourra point s'echapper, sous prétexte que les perceptions enveloppées

* Theodicée L. II. 196.

loppées ſont obſcures ; car ce ne ſeroit que dire en d'autres termes, qu'elles ſont enveloppées, ce qui ne fait rien à l'affaire, l'impoſſibilité ne venant que du nombre infini des enveloppées.

Les reſtrictions de Meſſieurs *de Wolff* & *de Bilfinger* ne les ſauveront pas d'avantage de cette conſéquence. Car reſtant vray chez tous les deux, que l'ame dure éternellement, & qu'elle repréſente auſſi longtems, qu'elle dure, il faut toujours qu'elle trouve dans ſes propres fonds des reſſources pour entretenir ſes repréſentations pendant toute l'éternité, & qu'ainſi elle enveloppe l'infini.

En vain tenteroit-on, enfin, d'expliquer l'involution de l'Univers par les rapports des idées préſentes, qui vont à l'infini & forment la chaine d'une infinité d'idées. Car, ou cette chaine & les rapports qui la forment, exiſtent dans l'ame, ou hors d'elle. Si dans l'ame, non ſeulement il y a une infinité d'idées, mais encore une infinité de rapports, qui dans l'ame ne peuvent être que des perceptions ; j'en appelle à un paſſage formel de la Monadologie de M. de *Leibnitz*. * Si au contraire ces idées, avec leurs rapports exiſtent hors de l'ame, elles ne peuvent exiſter, que dans la région des poſſibles, ou dans l'entendement infini, qui y voit le paſſé & l'avenir. Mais ſuffira-t-il, que Dieu conſidere le rapport de mes perceptions préſentes, avec celles qui leur doivent ſucceder, pour que celles-ci naiſſent du fond de l'ame, où elles ne préexiſtent point. On voit que la ſucceſſion des idées ne pourroit ſe maintenir dans cette hypotheſe, ſans une intervention immédiate de Dieu, c'eſt à dire, qu'il faudroit quitter *Leibnitz* pour Des-Cartes.

Avant que de paſſer à l'évolution, je vais conſidérer un autre changement, que les idées ſubiſſent encore dans leur enveloppe. Il faut néceſſairement, que dans leur état d'obſcurité même, elles changent ſelon l'harmonie de leurs corps : & de l'Univers harmonique à leurs

* *In ſubſtantia ſimplici datur quædam pluralitas affectionum, & relationum, quamvis partibus careat. Status tranſiens, qui involvit ac repreſentat multitudinem in unitate ſeu ſubſtantia ſimplici, non eſt niſi iſtud, quod perceptionem appellamus.* Leibn. Monadol. 13. 14.

leurs corps. A meſure que la ſcéne change dans le monde corporel, elle change de même dans tous les mondes repréſentatifs. Toute transpoſition dans le premier altére l'ordre des perceptions dans le ſecond; la pouſſiére qui tombe dérange toutes les pouſſieres idéales, & pendant que la terre tourne ſur ſon axe, & autour du Soleil, une infinité de terres repréſentatives font le même tour dans leurs microcosmes, *ſolemque ſuum, ſua ſidera norunt.* Ce changement du reſte prépare à un plus grand, en rendant les idées plus ou moins obſcures, & en leur donnant un droit plus ou moins proche à la clarté.

Or ces degrés qu'on met dans l'obſcurité, ne me paroiſſent pas ſeulement inconcevables, mais tout à fait contradictoires. Si la perception obſcure n'eſt autre choſe, que celle, où l'ame n'apperçoit rien, il eſt, ce me ſemble, tout démontré, que ſi l'ame n'apperçoit ni A. ni B. ni C. ni D. &c. A. B. C. D. ſont également obſcurs. J'eſpére qu'on conviendra avec moi, que l'obſcurité n'étant rien en elle-même, n'exiſte que dans la rélation à l'ame; & pour s'en convaincre, il n'y a qu'à réfléchir, que par raport à Dieu toutes nos perceptions obſcures, ou ne ſont rien, ou ſont claires & à découvert. Le paſſage de l'obſcurité à la clarté paroit encore exclurre ces nuances, qu'on ſuppoſe dans l'obſcurité. Suppoſé que je touche préſentement à la ſolution d'un problème d'Algebre; mais que tout d'un coup j'entende la décharge de l'Artillerie, qui me détourne du problème & introduit dans mon ame une ſuite de penſées tout à fait differentes, je demande, ſi deux minutes avant cette décharge le bruit du canon m'étoit moins obſcur, que deux heures auparavant. Je dois mieux ſavoir le contraire que tout autre. Je demande encore, ſi la derniere équation du probléme algébraïque étoit plus obſcure dans mon ame que le bruit du canon, & avoit moins de droit à la clarté, lorsque j'étois ſur le point de l'atteindre, & dans l'ordre des penſées qui y conduiſent, pendant que je ne ſongeois pas ſeulement au bruit, qui m'eſt venu interrompre. J'aurai occaſion de revenir à ce ſujet, & peut-être ſerai-je aſſez heureux, que

de le rendre plus intelligible, qu'il n'a été jusqu'ici. Je paſſe à préſent à l'évolution qui eſt mon dernier point.

Pour opérer cette évolution, on nous donne 1. Des idées obſcures, qui contiennent la raiſon des claires, qui leur ſuccedent. 2. Une force & tendance (*conatus*) qui agit, dès que les obſtacles ſont levés, conformément aux loix Metaphyſiques générales, & aux loix Ethicologiques des appétits. J'ai dit mon ſentiment ſur les idées obſcures en général, & je m'attache ici uniquement à l'origine de la lumiére dans l'ame. Je regarderai premiérement l'idée claire, comme ayant ſon fondement dans l'obſcure précedente; & enſuite je ſuivrai cette même idée dans ſon paſſage de l'obſcurité à la clarté.

Si la repréſentation claire *B* eſt fondée dans l'obſcure *a*, on ne pourra pas dire que la clarté de *B* ſoit fondée dans *a*, ou que *B* entant que claire ait ſa raiſon ſuffiſante dans *a*, (pour me ſervir des termes uſités.) Je m'en raporte à la définition de la raiſon ſuffiſante. * *B* ſeroit donc fondé dans *a* par l'hypothéſe, & n'y ſeroit point fondé par ce qui vient d'être démontré, c'eſt à dire qu'il implique, que *B* ſoit fondé dans *a*.

Ce ne ſeroit donc qu'après avoir détaché la clarté de *B* que nous pourrions dire, qu'il eſt fondé ſur *a*, en quel état nous pouvons l'appeller *b*, (ce n'eſt que par complaiſance, que nous agiſſons ainſi, car nous avons déja vu, & verrons encore, qu'une pareille abſtraction de la clarté eſt impraticable & anéantit la perception *B*.) Or dans cette ſuppoſition nous aurions *b* fondé en *a*, c'eſt à dire, une idée obſcure fondée dans une idée obſcure, mais ce n'eſt pas ce que nous cherchions; nous cherchions *B* fondé en *a*, une choſe que nous trouvons impoſſible en tout ſens. J'en conclus, que jamais la claire ne peut être fondée dans l'obſcure, qu'ainſi la premiere ſuppoſition eſt contradictoire, & que l'idée

* *Ratio eſt id, ex quo intelligi poteſt, quare alterum ſit: vel eſt id quod reſponſionem præbet intelligibilem ad quæſtionem, quare res ſit, potius, quàm non ſit, ſit hoc modo, non alio. Sufficiens illa eſt quousque nihil eſt in re, quod non ex ea ratione intelligi poſſit, quare ſit.* Bilfinger. Dilucid. de Deo, anima & Mundo, §. 70.

dée claire, qui ſuccede immediatement à l'obſcure, n'a ſa raiſon ſuffiſante aucune part.

Pour conſidérer maintenant le développement de l'idée, il nous faudra un peu analyſer cette force, ou cette tendance, par laquelle on tâche de l'expliquer, qui tient, dit-on, le milieu entre l'acte & la puiſſance, & ſemblable au reſſort bandé fait des efforts continuels pour vaincre les obſtacles, qui s'oppoſent à ſon action. Le mot de Force m'a toujours paru un de ceux, dont on peut tout faire, & qui ſert ſouvent moins à expliquer, qu'a n'être pas réduit au ſilence. Je ne crois pas, que l'on pût prétendre avec raiſon avoir donné une notion intelligible du développement des idées par le moyen de cette force, dont nous venons de parler, & qui prend encore ſa ſource dans une conception toute matérielle; & je ſuis faché de dire, que je n'y trouve rien de plus que dans les qualités occultes de l'Ecole, ou dans les Natures plaſtiques de Cudworth. On eſt de nos jours ſi revenu des forces, que l'attraction même du Chevalier Newton n'oſe ſe montrer, que ſous le nom de phénomene. Je ne veux pas dire, qu'on ne puiſſe conclurre des effets aux forces, mais uniquement, qu'il n'eſt pas permis d'aller en cela plus loin, que l'expérience, ni de prétendre avoir expliqué ce à quoi on n'a fait que donner un nom.

On n'a coutume d'attribuer à l'ame qu'une ſeule force, ſavoir celle de repréſenter l'Univers; mais il me paroit que ce ſeroit un très grand abus, ſi pour le même nom, qu'on donne aux principes d'effets eſſentiellement differens, on les prenoit pour les mêmes; or la repréſentation & l'apperception n'ayant rien de commun, que le nom, comme je l'ai déja montré, pour les conſerver toutes deux, ne faudra-t-il point deux forces, l'une de repréſenter, l'autre d'appercevoir; ou ſi on aime mieux appeller l'apperception, repréſentation claire, l'une de repréſenter clairement, l'autre de repréſenter obſcurément; puisque malgré la communauté de nom il y a entre ces deux effets une difference eſſentielle, & la même, qu'entre quelque choſe & rien.

Rien ne confirme d'avantage mon aſſertion, que la difference eſſentielle, que les Leibnitiens mettent entre les claſſes de leurs Monades. * Les eſpeces des perceptions, à entendre ces Philoſophes, ſont ſi éloignées l'une de l'autre, que toute proportion ceſſe. Si une Monade élémentaire croiſſoit à l'infini, elle ne pourroit jamais atteindre la claſſe des ames des Inſectes du dernier degré; & Leibnitz fait grande difficulté d'admettre un pareil paſſage ſans une eſpece *de transcréation*, nommant la raiſon, ** *un degré eſſentiel plus ſublime*, que la ſenſation, & les animaux, ſoit vivans, ſoit ſeminaux, eſſentiellement differens de l'homme. Ces Philoſophes conviennent encore, que le durable ou la ſubſtance des eſprits differe eſſentiellement de celle des animaux & des ſimples élémentaires. Or la ſubſtance & la force n'étant chez eux *** qu'une même choſe, il faudra que la difference des forces coïncide avec celle des ſubſtances, & que la derniere étant eſſentielle, la premiere le ſoit auſſi.

Voici l'uſage, que j'en fais: je demande ſi la même force peut produire les effets renfermés dans la premiere, & dans la ſeconde claſſe des Monades: on doit néceſſairement le nier, puiſqu'autrement

* *Quamvis natura cujusque Monadis ponatur in perceptione, ſciendum tamen eſt, perceptionis plures dari ſpecies tam longe, imo longius a ſe invicem diſtantes, quàm quascunque alias ſpecies rerum à Philoſophis ſtabilitas. Si e. g. monas, cui finis præſtitutus eſt, ut pars ſit earum, quæ regularitates virium & phænomenorum in corporibus repræſentant, creſcat in infinitum, nunquam tamen ad eam perfectionem perveniet, & illam claſſem attinget, in qua conſtitutæ ſunt e. g. animæ inſectorum infimi gradus; adeoque ſi proportio concipitur inter ea, quorum unum aliquoties repetitum, vel diminutum, poteſt fieri id quod eſt alterum; nulla datur proportio inter perfectionem monadis talis & perfectionem animæ bruti, & per conſequens ſunt heterogenea. Eodem modo res ſe habet ab anima bruti ad animam hominis, & quis novit, quot ſint ſpecies intermediæ, quas ignoramus?* Prim. Monadol. Cap. c. II. § 63 Piéce onzieme de celles qui ont concouru pour le prix des Monades.

** Theod. 91. Cauſa Dei aſſ. 81.

*** Wolf. Metaph. 755. 756.

ment il y auroit un paſſage naturel de l'une à l'autre, & qu'il n'y auroit point de difference eſſentielle entre les ſubſtances, qui peuplent ces deux claſſes. Or l'ame humaine & même l'ame brute, réünit les opérations de l'une & l'autre de ces claſſes; elle a donc deux forces eſſentiellement differentes, l'une de repréſenter, l'autre d'appercevoir.

Soit donc *b* une idée obſcure, & *B* la même idée elevée à la clarté, (je ſuppoſe encore l'impoſſible,) je dis, que la force, qui change *b* en *B* eſt eſſentiellement differente de celle, qui fait ſucceder *b* à *a*, que je ſuppoſe une perception obſcure; cette dernïere ne fait que changer l'ordre des perceptions, & eſt une de celles, qu'on a coutume d'apeller naturelles, au lieu que la premiere ajoute quelque choſe à la perception, qui n'y a point de raiſon ſuffiſante; elle tire, pour ainſi dire, la lumiere des ténébres, & prononce un *fiat lux* ſur cette perception. Puisque donc *B* contient quelque choſe, qui ne peut point être expliqué par *a*, la force qui intervient, doit être ſurnaturelle & miraculeuſe.

Dira-t-on peut être, qu'il exiſte toujours dans l'ame une portion finie de lumiere tendante à éclairer toutes les perceptions, mais qui à cauſe de ſa finitude ne peut éclairer que quelques unes à la fois, & que par cette raiſon les unes ſont placées dans un plus grand jour que les autres, tandis que la plupart reſtent condamnées à d'eternelles ténébres. Tout ceci ſe fonde ſur la ſuppoſition fauſſe, que la clarté puiſſe exiſter ſéparément des idées. On ſe figure dans l'ame une eſpece de flambeau, qui voyage d'une idée à l'autre pour les illuminer; ou on conçoit la clarté comme un Soleil, autour duquel les idées tournent pour en recevoir leur aurore, leur midi, & leur crépuſcule. Mais, qu'on me diſe un peu, où la clarté ſe réfugie, lorsque l'ame n'a que des repréſentations obſcures, comme p. e. dans un ſommeil profond, ou dans un accès léthargique, & ſi la clarté pour lors ceſſe d'exiſter, comment eſt-ce qu'elle ſe rallume aprés avoir été entierement éteinte?

On

On dit, que cette tendance paſſe en effet auſſi-tôt que les obſtacles ſont enlevés; mais s'il eſt vrai, comme je l'ai montré, que l'obſcurité n'a point de degrés, & qu'on ne ſait ce qu'on dit en en parlant, ces obſtacles ne ſeront jamais levés, & la tendance reſtera toujours tendance.

On voit auſſi par la même raiſon, que le paſſage de l'obſcurité à la clarté eſt brusque, & n'a point de nuances; ce n'eſt pas même une chûte par cataractes, c'eſt plus qu'une *μετάβασις εἰς ἄλλο γένος*; car clair & obſcur different comme rien & quelque choſe, & il n'y a qu'une force ſurnaturelle, qui puiſſe franchir un ſi grand intervalle.

N'y a-t-il pas enfin de quoi s'étonner, de ce que des tendances & des appétits ſi preſſans exiſtent dans mon ame à ſon inſçû, & ſur tout qu'il y exiſte ſouvent des tendances contraires? Pour ramener l'exemple, dont je me ſuis ſervi plus haut, eſt-il croyable, que pendant que tous mes deſirs ſemblent tendre à la réſolution du problème, & que j'y applique cette unique force, que je me connois, ſavoir mon libre arbitre, eſt-il croyable, dis-je, qu'en même tems, mon ame ait une tendance, ou un appetit de ſe contrarier ſoi-même, & de brouiller ſes conceptions, par le bruit du Canon? Et ces deux tendances ſi oppoſées pourroient-elles partir du même principe? Ne ſeroit-ce pas comme ſi le même reſſort s'efforçoit à la fois de ſe débander en deux ſens oppoſés?

Aprés avoir dit mon ſentiment ſur la doctrine, qui donne à l'ame des idées qu'elle n'apperçoit pas, je devrois préſentement faire l'examen des démonſtrations prétenduës en faveur de l'exiſtence de ces idées. Nous pouvons d'abord remarquer en général, que tout argument, qui a des propoſitions, dont on ne comprend point le ſens, ne peut rien prouver. C'eſt ici le cas; car qu'eſt-ce que ce dont on nous veut démontrer l'exiſtence? Lorsqu'on aura répondu par une définition ſuffiſante, nous écouterons ces preuves; jusques là pour les détruire toutes, il n'eſt beſoin que de ſubſtituer toûjours la définition

au

au lieu du défini, car les démonſtrations ne ſauroient être plus claires, que leurs ingrédiens, ſavoir les propoſitions & les termes.

Ces preuves d'ailleurs ſont fondées ſur des ſyſtèmes, qui, malgré leur ſublimité & leur éclat, ne ſont point encore parvenus à la dignité de Theorémes. Mon deſſein n'eſt point icy, comme je l'ai déjà dit, d'attaquer la doctrine des Monades, ni l'Harmonie préétablie; je ne fais que propoſer quelques difficultés, que je rencontre dans une branche de cette ingénieuſe hypotheſe, & je ſerois fâché de m'être écarté le moins du monde du reſpect du à ceux qui l'ont inventée & miſe en vogue. Si cependant on veut me permettre de faire une réfléxion touchant l'hypotheſe même, je ferai la ſuivante.

On rejette l'influence Ariſtotelique non ſeulement à cauſe des contradictions, qu'on y rencontre, mais encore à cauſe de l'obſcurité des termes, & des êtres gratuits, qui y fonctionnent. L'hypotheſe Carteſienne demande, dit-on, un miracle perpétuel, & les denouëmens en Philoſophie ne doivent pas reſſembler à ceux de l'Opéra. Mais les miracles du Carteſianiſme, & l'obſcurité du Péripatetiſme ſont peut-être balancés par la force, & la repréſentation, qui entrent dans l'automate ſpirituel de Leibnitz. Du moins dois-je avoüer, que le denouëment ne me paroit pas plus intelligible dans l'harmonie préétablie que dans les deux autres hypotheſes, & même moins intelligible, que dans celle de Des-Cartes, n'y eut-il que les perceptions, que l'ame n'apperçoit pas.

* .... *Obſcuro gradientes aëre texit,*
Et multo nebulæ circum Dea fudit amictu,
Cernere ne quis eas, *neu quis contingere poſſet,*
Molirive moram, aut veniendi poſcere cauſas.

M'arrêterai-je encore à une façon de prouver les idées obſcures, que je trouve fort prônée des Philoſophes? Sa force conſiſte en ceci: Dans chaque repréſentation claire nous appercevons une idée totale,

* Virg. Æneid. L. 1.

qui

qui eſt le réſultat d'une infinité d'idées partielles, dont chacune affecte l'ame, ſans qu'elle en ait la moindre connoiſſance; ainſi il y a nombre d'idées dans l'ame qu'elle n'apperçoit pas; on en peut voir quantité d'exemples rapportés dans l'élégante Diſſertation de M. de *Bilfinger* ſur l'harmonie préétablie. Ces exemples ſont tirés de tous les ſens, & ſurtout de la vûe; la théorie de Newton, par exemple, portant, que dans la lumiere exiſtent toutes les couleurs primitives, on en veut induire, que nous avons des idées de ces couleurs en voyant la lumiere, quoique nous ne les voyions pas, chacune à part, avant que de faire uſage du Priſme, ou d'un autre moyen de les ſéparer.

Je réponds à cet exemple, & à tous les autres ſemblables, qu'ils ſuppoſent tous ce qui eſt en queſtion; ſavoir, que l'idée ſoit compoſée d'autres parties, que de celles qu'on y apperçoit. Il n'y a aucune obſervation, qui puiſſe le prouver, l'obſervation ne s'étendant pas au delà de ce qu'on obſerve. L'apperception la meſure & la circonſcrit. Si vos recherches vous conduiſent à des idées, que vous n'aviez point encore apperçuës dans l'idée totale, c'eſt apparemment, parce qu'elles n'y avoient point exiſté. Je ſais ce que j'apperçois en voyant la lumiere; mais j'ignore ce que c'eſt alors dans mon ame que ces couleurs inviſibles, dont on me parle. Les découvertes que vous faites ſur la génération de la lumiére & des couleurs, ſont un ſurcroit à vos connoiſſances & autant de nouvelles idées, dont vous enrichiſſez vôtre ame; mais vous n'en ſauriez conclure leur préexiſtence ſans commettre un cercle vicieux. Remarquons encore, que dans d'autres cas, par l'habitude de voir ſouvent les mêmes objets, nous oublions preſque auſſitôt que nous les avons vûs; mais de là il ne ſuit point, que nous ne les ayons pas apperçus. Enfin tous les ſens, le *ſenſorium commune*, ſi on veut, & toutes les facultés de l'ame, ſont d'une capacité ou receptivité finie. Il n'eſt donc pas décidé, ni que les premiers puiſſent recevoir des impreſſions en nombre quelconque, ni que les ſecondes ſe pourroient prêter à un nombre quelconque de perceptions, la force

de

de repréſenter étant finie & limitée, auſſi bien que celle d'appercevoir. Je cite ici un paſſage M. le Baron de *Wolf*, par lequel il paroit qu'il eſt du même ſentiment. *

M'étant déclaré dans tout ce Mémoire pour le coté de l'expérience, je le finirai par le plan d'une théorie des idées, telle que je la conçois uniquement fondée ſur elle; je dis un plan, ne voulant pas allonger d'avantage cette Diſſertation, qui n'eſt déjà que trop longue.

Je poſe donc d'abord en fait, qu'il n'y a d'autres idées, que celles qu'on apperçoit; du moins ce ſont les ſeules, qui puiſſent trouver place dans une ſpéculation, qui ſuit le fil de l'expérience.

J'obſerve enſuite, que chaque idée eſt diſtincte de l'autre, & que l'identité prétenduë des idées n'eſt qu'un abus du langage, & ne vient que d'un manque d'exactitude; jamais deux idées ne ſont la même, duſſent-elles ſe rapporter au même objet; auſſi peu le ſont-elles, que les images, qui ſe peignent ſur les rétines de dix perſonnes, qui voyent le même arbre, ſont la même image. Suppoſé même, que deux idées ſe reſſemblaſſent parfaitement, il reſteroit toujours une difference numérique entr'elles.

Nous comparons nos idées à un certain Archetype, & cet Archetype eſt lui-même une idée. Je conçois que nous le formons à peu près de la maniere ſuivante.

E'prouvant, à diverſes repriſes, des perceptions, que nous ne diſtinguons pas les unes des autres, ſoit que nous ayons oublié leurs caractères diſtinctifs, ſoit qu'en effet elles ſe reſſemblent parfaitement, nous les retenons dans la mémoire, & les y imprimons ſi bien, que

 nous

* *Si quid fibrillis nerveis motum imprimere non poſſit, planè non percipitur. Etenim ſi vis ſenſibilis non ſufficit ad motum fibrillis nerveis imprimendum, nulla in organo ſenſorio ab ejus in idem actione oritur mutatio, conſequenter nec in mente oriri poteſt perceptio.* (1/2. Pſychol. rat. 24. Pſychol. Emp.) *Objectum igitur plane non percipitur.* Wolf. Pſychol. ration. §. 129.

nous ne nous tromperons plus guères à reconnoitre & à leur aſſocier leurs nouvelles reſſemblances, qui ſeront excitées dans l'ame. De là cet Archetype, qui, quoique fort changeant & variable en lui-même, eſt pourtant auſſi fixe & déterminé, que nos beſoins l'exigent.

Toutes les penſées ſont également claires en elles-mêmes, & les degrés de clarté, qu'on leur ſuppoſe, ne leur ſont point eſſentiels, mais viennent uniquement de la comparaiſon. Un aveugle-né, qui ouvriroit les yeux pour voir un objet, & les refermeroit tout de ſuite après l'avoir vu, n'imagineroit point de degrés dans la clarté de cette idée ; & ſi quelqu'un n'avoit que deux ſortes d'idées, toutes deux confuſes, mais l'une plus & l'autre moins, il nommeroit les moins confuſes diſtinctes ; nos idées confuſes ſont peut être les idées diſtinctes des bêtes, & nos idées diſtinctes les idées confuſes des Anges. Enfin voici tout le myſtere. Après qu'un certain Archetype s'eſt formé dans l'ame, les idées reſſemblantes ſe rangent ſuivant leur plus ou moins de reſſemblance à cet Archetype, & ſont en conſéquence appellées plus ou moins claires.

L'ame compare quelquefois Archetype à Archetype, & cette comparaiſon donne les differentes claſſes, dans lesquelles nos idées ſont partagées.

L'idée obſcure enfin n'eſt rien du tout. Ce qu'on apelle penſée obſcure, dans le total de laquelle on ſuppoſe, qu'il entre des idées partielles obſcures, conſiſte en ces trois choſes, 1. en idées claires. 2, dans le ſentiment d'un manque d'idées ultérieures. 3. dans une conjecture compoſée d'idées claires, par le moyen de laquelle on tâche de ſuppléer à ce manque d'idées. L'exemple ſuivant ſervira à eclaircir ce que j'avance. Je vois dans l'éloignement quelque choſe de blanc : voilà une idée claire ; j'ignore ce que c'eſt, c'eſt a dire, je ſai, que je n'ai pas des idées, que je pourrois avoir ; car ayant vu autrefois la blancheur jointe

te au corps, je juge par analogie, qu'elle l'eſt encore cette fois, & raſſemblant tous les corps blancs, que j'ai eu occaſion de voir, & plu' eurs circonſtances, ſous leſquelles je les ai vus, je porte enfin un jugement vrai ou faux ſur le ſujet de la blancheur, qui frappe ma vue, décidant pour celui auquel il me paroit reſſembler davantage; ce jugement eſt accompagné d'incertitude, ſavoir de la penſée claire, que je pourrois m'être trompé. En tout cela je ne vois aucune néceſſité d'admettre des idées obſcures. Cela eſt ſi vrai, que l'aveugle, qui ouvriroit les yeux pour la premiere fois, ne penſeroit peut-être pas ſeulement au ſujet de la blancheur, n'ayant pas encore eu occaſion de faire les expériences propres à lui apprendre, que la blancheur ait un ſujet.

Enfin, pour raſſembler tout en peu de mots, on voit, que dans mon plan le propre de l'idée eſt d'être claire, vu qu'elle eſt une modification de l'ame intelligente, que l'obſcurité eſt entierement proſcrite de la région des idées, & que les differens degrés de clarté, qu'on ſuppoſe fauſſement dans la même idée, ne ſont que differentes idées comparées a un même Archetype.

RE'FLE'XIONS
SUR L'ORIGINE DU PLAISIR,
OU' L'ON TACHE DE PROUVER L'IDÉE DE DES-CARTES: QU'IL NAIT TOUJOURS DU SENTIMENT DE LA PERFECTION DE NOUS-MEMES.

PAR Mr. KAESTNER.

Je ne ſaurois décider, ſi Des-Cartes a été le premier à dire que le plaiſir conſiſte dans le ſentiment de quelqu'une de nos perfections *. J'avouë pourtant que je n'ai jamais trouvé dans les Diſſertations, quelquefois aſſés ennuyeuſes, & très ſouvent peu inſtructives, des Philoſophes anciens, ſur la nature & l'uſage du plaiſir, & ſur la queſtion: ſi c'eſt dans le plaiſir que conſiſte le ſouverain bien? une définition de ce mot, qui donne occaſion à tant de controverſes. C'eſt à cauſe de cela, que je ſuis porté à attribuër la découverte de cette définition à ce grand Génie, qui le premier a changé la Métaphyſique, d'un Dictionaire embrouïllé & d'un amas confus de controverſes inintelligibles qu'elle étoit auparavant, en une ſcience inſtructive & ſolide de Dieu & de l'Ame.

Mon-

* *Tota autem noſtra voluptas poſita tantum eſt in perfectionis alicujus noſtræ conſcientia.* Cartes. Ep. ad Eliſab. Princip. Ep. VI.

Monſieur le Baron de *Wolf*, en adoptant la plus grande partie de cette définition, croit pourtant qu'on ne doit pas borner tout plaiſir à la connoiſſance d'une perfection qui appartient à nous-mêmes: & qu'il y a des perfections tout-à-fait étrangéres à nous, qui nous cauſent également du plaiſir. Il m'a paru qu'on pourroit maintenir encore le ſentiment de Des-Cartes, & montrer, que tout le plaiſir qui doit naître d'une perfection étrangere, peut auſſi ſe rapporter à une perfection qui appartient à nous-mémes. C'eſt ce que je tâcherai de prouver dans la ſuite. J'eſpere qu'on me pardonnera d'entrer dans une controverſe où *Wolf* combat contre *Des-Cartes*. Quelle eſt la controverſe dans laquelle on pourroit s'engager ſans avoir de grands génies contre ſoi, & ſans être obligé de dire :

Mulciber in Trojam, pro Troja pugnat Apollo.

Pour faire des recherches ſur ce que nous appellons *plaiſir*, il faut conſidérer les cas où nous connoiſſons diſtinctement ce qui ſe paſſe en nous. Suppoſé que nous découvrions quelque choſe, qui ſoit l'origine du plaiſir dans ces cas-là, il ſera raiſonnable de croire que la même choſe ſera l'origine du plaiſir dans d'autres cas, où nous n'appercevons que confuſément les changements qui ſe font dans notre ame.

C'eſt pour cela qu' après les plaiſirs qui ne le ſont que pour l'eſprit, après les extaſes telles que l'ἕυρηκα d'Archiméde, il faut choiſir parmi les plaiſirs ſenſuels, ceux qui dépendent de la vuë & de l'ouïe. Comme nous devons la plus grande partie de nos idées, au moins de nos idées diſtinctes à ces ſens-là, nous connoiſſons auſſi plus diſtinctement ce qui ſe paſſe en nous, quand ils nous donnent quelque plaiſir. Nous ſavons que dans tout ce qui réjouït l'oeil ou l'oreille, il y a de l'ordre, de la ſymmetrie, une juſte proportion des parties, c'eſt à dire, que nous pouvons remarquer certaines régles obſervées dans l'arrangement ou dans la ſuite des choſes, que nous pouvons comparer des extrémités ſemblables, entre elles, & avec un milieu qui ne leur

res-

reſſemble pas, que nous pouvons compter les parties d'une colomne, les vibrations d'un ton : meſurer leur grandeur ou leur viteſſe : en un mot, que nôtre ame peut agir, qu'elle peut exercer ſes facultés. Or comme elle ne peut pas exercer ſes facultés ſans apperçevoir qu'elle les poſſéde, ſans avoir un ſentiment intime de ſa perfection, (car je crois pouvoir ſuppoſer ſans preuve, que ces facultés ſont des perfections, & qu'elles ſont reconnuës pour telles par l'ame,) je ne trouve aucun plaiſir, où l'ame n'ait un ſentiment de ſa perfection, & je ne découvre d'autre origine du plaiſir, que ce ſentiment.

En vérité, peut-on expliquer comment des choſes dont l'exiſtence ne nous rend d'ailleurs ni plus ni moins heureux, nous intéreſſent par leur beauté ſeule? Qu'un Voyageur parcoure une Ville pour y regarder des Palais magnifiques, quand il loge peut-être dans une cabane des plus miſérables, qu'il grimpe ſur le ſommet d'une montagne pour profiter d'une belle vuë, peut-on, dis-je, expliquer cela, ſans ſuppoſer qu'il y ait là quelque choſe qui ſe rapporte à nous-mêmes ? Prétendroit-on que nous nous ſoumettions à des fatigues, que nous nous engagions même dans des dangers, ſeulement pour ſentir une perfection étrangére ?

On dit communément, que la même choſe nous donne plus de plaiſir, à meſure que nous ſommes plus en état d'en connoitre toute l excellence, On diroit avec autant de raiſon que le plaiſir augmente, à meſure que nous ſentons nous-mêmes combien nous avons de perfection, pour pouvoir connoitre exactement celle de nôtre objet. Qu'un Connoiſſeur reſſent plus de plaiſir en voyant un Tableau, en entendant un Concert, c'eſt préciſement parce qu'il ſent qu'il faut être connoiſſeur, pour s'appercevoir de toutes les beautés dont il s'apperçoit. Pour preuve de cela, il ſuffit d'alléguer un exemple, où de deux hommes qui regardent la même choſe, celui qui la regarde avec le plus de plaiſir, n'y voit aſſurément pas plus de perfection que l'autre.

Croi-

Croira-t-on que le Ciel plein d'Etoiles nous paroiſſe plus parfait, parce que nous en connoiſſons tous les Aſterismes ; parce que nous ſavons que Pégaſe va ſe coucher, que cet Aſterisme le plus brillant de tous qui paſſe par le Méridien c'eſt Orion, que la Vierge monte au deſſus de l'Horiſon ? Je ne comprens pas que nous trouvions plus d'ordre, plus de perfection, dans les Etoiles parce que nous les conſidérons ſous ces arrangemens tout-à-fait arbitraires, où il n'y a rien de propre aux Etoiles elles-mêmes, où toutes les diviſions, toutes les images dépendent de nous, & ſeroient tout-à-fait différentes, s'il avoit plu aux Anciens. Pourra-t-on pourtant nier, que celui qui connoit les Aſterismes, ne regarde le Ciel avec infiniment plus de plaiſir que l'autre ? Ce n'eſt pas ſans doute parce qu'il voit plus d'ordre dans le Ciel même, mais parce qu'il ſe plait à poſſéder une methode de compter toute cette armée celeſte, que l'autre ne regarde que comme un amas confus de flambeaux innombrables.

Pour les plaiſirs de l'eſprit ſeul, il me ſemble qu'il n'y en a point qui ne naiſſent entiérement du ſentiment de nôtre perfection. Ces transports que le Philoſophe ſouffre, après avoir percé les voiles qui cachoient la verité à ſes yeux, que ſont-ils, ſinon des ſentiments intimes & raviſſants de la force de ſon génie ?

Ajoutons un mot ſur le plaiſir qu'on ſent à travailler à des choſes difficiles. Ce qui engage le plus efficacement le Philoſophe à l'examen des queſtions épineuſes, le Géometre à des recherches profondes, le Poëte à des recherches ſublimes, le Mechaniſte même à des chefs-d'œuvre de ſon-art, ce n'eſt aſſurément que le plaiſir qu'ils ſentent à pouvoir produire quelque choſe qui marque l'excellence de leur génie & de leur induſtrie. La gloire elle-même ; ce reſſort l'un des puiſſants des grandes actions, eſt-ce autre choſe que la conviction qu'on connoitra nos perfections ?

Je viens aux exemples que Monſieur de Baron *de Wolf* produit pour juſtifier ſon idée du plaiſir, *. Le premier, c'eſt le plaiſir que nous donne la reſſemblance d'un portrait avec l'original. Ce plaiſir ſelon lui eſt le ſentiment de la perfection du portrait. Ne pourroit-il pas être auſſi, ſelon Des-Cartes, un ſentiment de la perfection de nous-mêmes, qui connoiſſons l'original, qui nous plaiſons à nous ſouvenir de tous ſes traits, & à les comparer avec l'imitation du Peintre ?

Monſieur *de Wolf* donne pour un autre exemple, le plaiſir qui nous cauſe une montre réglée & juſte. Je ne vois que deux ſortes de ce plaiſir, qui toutes les deux naiſſent du ſentiment & de l'amour des perfections qui appartiennent à nous-mêmes: premièrement l'uſage que nous ferons de cette montre: ſecondement, le ſentiment des connoiſſances que nous poſſédons, ſuppoſé que nous ſoyons capables d'en comprendre tout l'artifice. Monſieur *de Wolf* ajoute le plaiſir avec lequel nous regardons un bel Edifice ; j'en ai déjà parlé, & j'en dirai encore quelque choſe dans la ſuite.

Il donne pour exemple d'un plaiſir qui n'eſt qu'apparent, ce bonheur que quelques gens croyent ſe procurer en ſe livrant aux débauches. On ne ſauroit nier que ces gens ne rapportent à eux-mêmes la fauſſe apparence de perfection qu'ils trouvent dans leurs égaremens.

Dans d'autres endroits ** Monſieur *de Wolf* parle du plaiſir que nous donne la connoiſſance de la vérité; tant de celle que la raiſon nous découvre, que des vérités revélées, comme auſſi du plaiſir que nous procure une vie vertueuſe. Il eſt vif, vû que tous ſes plaiſirs ſont liés avec des perfections qui appartiennent à nous-mêmes.

En conſidérant que la même choſe peut occuper plus d'une de nos

* *Pſychologia Empirica* § 511. *& ſeqq.*

** *Horæ ſubſecivæ Marburgenſes.* Trim. æſt. 1729. Trim. Aut. 1729. Trim. Brum. 1730.

nos facultés, c'eſt à dire, qu'elle nous fait ſentir plus d'une eſpece de perfections, on comprendra ce que c'eſt que *le plaiſir compoſé*, & comment il différe du *ſimple*.

Après avoir donné tant d'exemples, où il me paroit clair que le plaiſir ne nait que du ſentiment de nôtre perfection, on me diſpenſera de montrer que cela a lieu encore dans toute ſorte de plaiſirs, même dans ceux où nous ne ſentons que confuſément. C'eſt juſtement parce que dans ces cas-là, nos idées ne ſont capables d'aucune analyſe, & que nous ne ſaurions expliquer d'où naiſſent ces plaiſirs. Tout ce que nous pouvons faire ſe réduit à ſuppoſer, que ce que nous voyons arriver en plein jour, ſe fait auſſi dans l'obſcurité ; que la roſe qui préſente tant d'ordre & tant de ſymmetrie à nos yeux, occupe auſſi notre ame, à appercevoir, quoique confuſément, des ſuites réglées dans ſes exhalaiſons. N'en déplaiſe à Meſſieurs les Philoſophes, nous ne ſavons de nôtre Ame, qu'autant que l'expérience, & les concluſions tirées de l'expérience & de l'analogie, nous en apprennent. Mais ces concluſions, tout incroyables quelles paroiſſent quelquefois, n'en ſont pas moins certaines. Qu'une fille qui ne ſait pas peut-être que ſept fois neuf ſont 63, ſache la Muſique: voila une choſe où le commun des hommes ne trouve rien de merveilleux. Que ce fait nous frappe pourtant, dès que nous ſavons combien de calculs l'ame de cette fille fait à ſon inſçu !

Pour prouver mieux ce que j'ai dit de l'origine du plaiſir, je tacherai d'en expliquer un phénomene, qui, à ce qu'il me ſemble, ne s'explique pas aſſés bien dans l'autre hypotheſe. Ce qui plait, ne plait pas également à tous les hommes. La Muſique des Barbares nous ennuye par ſa monotonie ; la nôtre fatigue ces peuples en demandant une attention, dont ils ne ſont pas capables ; c'eſt une Remarque que M. *Euler* a fait dans ſa *Theoria Muſices*. Il eſt donc viſible que le plaiſir que la Muſique nous cauſe, ne dépend pas de l'or-

dre abſolu des tons, mais de nôtre maniere de ſentir cet ordre. S'il eſt trop ſimple pour nous, c'eſt alors que nous le trouvons ennuyeux; parce qu'il ne nous donne pas l'occaſion d'employer nos facultés, & de nous découvrir notre perfection à nous-mêmes. Il nous déplaira s'il eſt trop compoſé, parce qu'en nous fatiguant, il nous fera ſentir la foibleſſe de notre eſprit. On ſait que cette remarque n'eſt pas bornée à la Muſique, mais qu'en général il ne faut pour nous plaire, ni des choſes trop ſimples, ni de trop compoſées. Ce qui ſe préſente trop facilement, n'a rien qui nous attire; ce qu'il faut rechercher trop, nous rebute.

Nec bis cincta Diana placet, nec nuda Cythere.
Martial.

Il faut donc dans tous nos plaiſirs que nous puiſſions employer nos facultés, & que nous ne les employions pas vainement, c'eſt-à-dire, que nous ſentions leurs perfections ſans ſentir leurs bornes.

Qu'on ne m'objecte pas ce plaiſir, dont les Philoſophes, & les Philoſophes ſeuls ſont capables, de voir combien nos connoiſſances ſont bornées. Ce qui cauſe du plaiſir au Philoſophe, ce n'eſt pas préciſément de voir que ſes connoiſſances ſont bornées, c'eſt de voir qu'il eſt arrivé à ces bornes; qu'il a autant de connoiſſances qu'un homme en peut avoir.

La perfection des objets ne nous cauſera donc du plaiſir, qu'autant qu'elle nous fait ſentir la perfection que nous poſſédons nous-mêmes. Cela eſt ſi vrai, que même des objets imparfaits nous font plaiſir, dès qu'ils ſe rapportent à ce but; c'eſt ainſi que le malheur d'un autre a dequoi nous réjouïr.

Suave mari in magno, turbantibus æquora ventis,
E terra alterius magnum ſpectare laborem:
Non quia vexari quemquam eſt jucunda voluptas;
Sed quibus ipſe malis careas, quia carere ſuave eſt.
Lucret.

Il

Il ſemble pourtant aſſés raiſonnable, que nous paroiſſions plus parfaits à nous-mêmes, en nous voyant en état de connoître tout ce qu'il y a de plus beau dans un objet excellent, qu'en nous trouvant quelque légere préférence ſur un objet méprisable : c'eſt à cauſe de cela que la vuë d'un objet parfait nous donne plus de plaiſir, que la comparaiſon que nous faiſons entre nous-mêmes & un objet imparfait. Aſſurément, il faut, ou que les biens de la vie à venir ſoient fort médiocres, ou que les eſprits bien-heureux ſoient aſſés ſtupides, ſi pour leur rehauſſer le goût de leur bonheur, il faut leur préſenter éternellement un objet malheureux, tourmenté ſans fin, pour leur faire comprendre combien ils ſont heureux, de ne pas ſouffrir ces tourments : comme ſe l'eſt imaginé un Auteur Allemand, qui a eu la témérité de vouloir enchérir ſur la *Theodicée de Leibnitz*.

A ce que je crois il eſt conſtant, que nous rions, parce que nous découvrons quelque abſurdité, quelque imperfection très ſenſible, dans un objet. Il eſt également certain que le rire eſt accompagné d'un plaiſir. Comment concilier ces deux faits ? Comment déduire un plaiſir du ſentiment d'une imperfection, dans la ſuppoſition que c'eſt une perfection étrangere qui nous cauſe du déplaiſir. Ceſt au contraire une conſéquence aſſés naturelle de l'idée de Des-Cartes, qu'on reſſent un plaiſir en ſe comparant à cette choſe imparfaite, ou en ſe trouvant en état de voir combien elle eſt défectueuſe. J'ai remarqué déjà dans un cas ſemblable, que pour un homme qui réfléchit, ce plaiſir doit être aſſés médiocre. Auſſi ceux qui aiment à réfléchir ne ſont pas les plus grands rieurs.

Ceux qui conſidérent le plaiſir comme le ſentiment d'une perfection étrangere, trouveront, à ce qu'il me ſemble, des difficultés à expliquer toujours ce que c'eſt que cette perfection. Qu'eſt-ce qu'il y a de plus parfait dans une maiſon, où la ſymmétrie eſt bien obſervée, que dans une autre où on l'a négligée ? Une eſpece d'ordre qui pourroit manquer, ſans que la commodité ou la ſolidité en ſouffriſſent. Un édifice ſans ſymmétrie n'aura donc d'autre imperfection, (au moins il

ne ſera pas néceſſaire qu'il en ait d'autres,) que celle de ne donner pas à ceux qui le regardent une occaſion d'exercer l'Arithmétique & la Géometrie naturelle de leurs ames. Eſt-ce donc une perfection qui lui manque? Ou n'eſt-ce pas plutôt un certain rapport avec ceux qui le regardent, qui leur donneroit occaſion de déployer leurs propres perfections?

Qu'on nomme perfection l'harmonie de pluſieurs choſes qui tendent toujours au même but, ou de quelque autre maniere qu'on définiſſe ce mot, il eſt certain, que ce qui s'appele perfection d'une choſe, doit être une qualité interne, & indépendante du rapport de cette choſe à des objets extérieurs; au moins autant que la deſtination de cette choſe n'eſt pas d'être en liaiſon avec des objets extérieurs. Or l'ordre & la ſymmétrie ne ſont très ſouvent que des qualités rélatives à celui qui les regarde. Qu'une choſe montre ces qualités, ou qu'elle ne les montre pas, cela paroit être aſſés indifférent à la choſe même. Un Auteur Anglois, qui a écrit fort ingénieuſement ſur l'origine de nos idées du beau, remarque, que parmi les figures Géometriques, celles qui ont plus de cotés nous plaiſent davantage, mais que cela ne continuë que jusqu'à un certain nombre de cotés. C'eſt ſans doute, parceque nous ſentons trop nôtre foibleſſe en entreprenant de compter un trop grand nombre de cotés & d'angles, & en tachant de les comparer: parce qu'il nous eſt plus aiſé de voir l'égalité des cotés de l'héxagone avec le rayon du cercle qui le contiendroit, que nous ne voyons la raiſon du coté de l'heptagone à ce rayon. Quelle autre raiſon auroit-on d'appeler moins parfait l'heptagone, qui ſans doute nous plait moins? C'eſt pourtant cette imperfection de l'heptagone, & de toutes les figures qui ne ſe trouvent pas Géometriquement, *quarum latera ſciri non poſſunt*, comme s'explique *Képler*, qui a porté Dieu, ſi on en veut croire ce précepteur de *Newton*, à donner l'excluſion à toutes ces figures dans l'ordonnance des Corps céleſtes.

Cette pierre informe nous déplait: Nous en faiſons une colomne. La voilà bien perfectionnée! Qu'eſt-ce qu'il y a de meilleur, de plus

plus parfait, dans la colomne que dans la pierre? Une figure, un ordre, propres à occuper les facultés de nôtre ame. Peut-on nier que ſi la colomne eſt appellée plûs parfaite que la pierre, ce n'eſt que parce qu'elle nous donne plus d'occaſion de compter, de meſurer, même à nôtre inſçu; c'eſt-à-dire, à exercer nos facultés, à connoitre nos perfection.

Ce qu'on appelle dépravation du goût, me paroit un peu difficile à expliquer dans l'hypotheſe, que c'eſt la perfection interne, la beauté naturelle des choſes, qui nous fait du plaiſir. On dira que c'eſt parce qu'un homme, une Nation, un Siécle, peuvent prendre pour perfection ce qui ne l'eſt pas. Mais la maniére dont ſe fait cette mépriſe, ſe concevra-t-elle plus aiſément, qu'en ſuppoſant que ce qui plait aux gens d'un gout dépravé, leur fait ſentir qu'ils ont certaines qualités, qui leur paroiſſent des perfections fort grandes.

Ceſt de cette maniére que ſe trompent les admirateurs des Anagrammes, des Jeux de mots, & de toutes ces bagatelles, qu'on traitte encore avec trop peu de rigueur en ne les nommant que des bagatelles. Ils ſuppoſent qu'il faut poſſéder infinement d'eſprit pour comprendre qu'*Ariſtote* veut dire, *Iſte erat Sol*, ou pour voir la grande liaiſon qu'il y a entre un *Maréchal de France*, & un *Marechal Ferrant*. En réfléchiſſant ſur ces reſtes de la barbarie de nos Ancétres, j'ai cru trouver vérifiée partout une obſervation qui me paroit s'accorder aſſés avec l'hypotheſe de Des-Cartes ſur l'origine du plaiſir. Dans ces Siécles d'ignorance, l'eſprit & la Philoſophie des Cloitres, auſſi gothiques que leur Architecture, me ſemblent montrer des gens fort laborieux, mais deſtitués de génie; ou dont le génie ſuccombe ſous le poids des fadaiſes dont ils le ſurchargent. Une choſe qui leur fournit à travailler ſans demander du génie, voila ce qui leur paroit beau. Incapables de comprendre le plan d'une Iliade, même s'ils en avoient ſçu la langue, ils s'occupoient à admirer la conſtruction bizarre & puérile d'un vers Léonin. Neſt-ce pas parceque ce vers leur donnoit occaſion d'exercer des facultés de leur ame, qu'ils prenoient pour de grandes perfections?

On

On dit qu'un Géometre, & je crois que c'eſt Newton, en liſant l'Enéide, s'eſt amuſé à tracer ſur la Carte la route que le Heros a ſuivie. Ceſt ſans doute un plaiſir que peu de gens iront chercher dans une Epopée. Qu'on juge pourtant ſi ce n'en peut pas être un pour un Eſprit géométre, & ſi cette occupation marque moins de goût, que celle de pluſieurs ſavants ſoi-diſants Critiques, qui ne liſent les Anciens, que pour apprendre des mots, ou tout-au-plus des faits, qui ne ſont rien moins qu'intereſſants pour nôtre Siécle ? Ceſt pourtant un plaiſir pour eux, puiſque cela remplit leur mémoire, celle de leurs facultés, qui leur paroit la plus excellente.

Tout ce qu'on appele divertiſſement, ſe réduit auſſi à une occupation, qui ſert à nous faire ſentir nos forces, ſans nous accabler. Pour ſe délaſſer, Newton étudioit la Chronologie ancienne. Il faut aſſurément être Newton, pour choiſir un tel délaſſement. Le jeu des Echecs ſeroit de l'Algébre pour beaucoup d'eſprits médiocres.

Je l'ai dit au commencement de ce Diſcours ; il me ſeroit aſſés difficile de montrer dans beaucoup de cas, où nous ne ſentons du plaiſir que confuſément, ce que c'eſt alors que ce ſentiment de notre perfection qui le cauſe. Mais je défie ceux qui en voudroient tirer parti contre moi, de me montrer dans ces mêmes cas, quelles ſont les perfections étrangeres qui nous donnent ces plaiſirs ? Il me ſemble donc que l'explication de l'origine du plaiſir donnée par Des-Cartes, ne ſe trouve jamais en défaut, que là, où toute autre hypotheſe s'y trouveroit auſſi, c'eſt-à-dire, dans les cas où nous ne ſaurions rien expliquer. Au contraire j'ai produit des cas qui me ſemblent venir aſſés naturellement ſe lier à cette hypothéſe, ſans qu'il paroiſſe également aiſé de les réduire à l'autre.

* * *
* * *

MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

CLASSE DE BELLES LETTRES.

* * *

DISSERTATION

SUR UN PASSAGE DES COMMENTAIRES DE JULES CESAR DE BELLO GALLICO,

Livre VI. chap. 21.

PAR M. PELLOUTIER.

Mieux j'apprends à connoitre les anciens habitans de l'Europe, & plus j'ai occaſion de me convaincre, que leurs Coutumes ne differoient point de celles des peuples ſauvages, que l'on trouve encore aujourdhui en Amérique. J'avouë qu'il y a une certaine conformité entre des peuples ſauvages, qui ne doit point ſurprendre, parce qu'elle eſt une ſuite naturelle de l'ancienne ſimplicité, ou ſi l'on veut de l'ancienne barbarie, dont les uns ſont ſortis plutôt, & les autres plus tard. Que les barbares de l'Europe comme ceux de l'Amérique allaſſent tout nuds, même dans le plus grand froid; qu'ils ne connuſſent point d'autre bain que le courant des riviéres; qu'ils n'euſſent ni maiſons, ni demeures fixes; qu'ils ne cultivaſſent point la terre; qu'ils fuſſent toujours en guerre, tantôt avec leurs voiſins, tantôt avec leurs propres compatriotes; tout cela ne me frappe pas plus, que de voir les enfans de tout païs, ſauter, danſer, & s'amuſer à des bagatelles. On trouve la raiſon de cette uniformité, ſoit dans l'ignorance & dans la ſtupidité des hommes, qui ont ignoré plus ou moins longtems les moyens de ſe

garentir des injures de l'air, & de la rigueur des saisons, de se procurer ce que nous appellons les commodités de la vie, aussi bien que les avantages qu'ils pouvoient tirer de l'agriculture ; soit dans l'humeur féroce & brutale des hommes, qui ne cultivant point leur raison, & n'ayant encore ni maitre, ni loi, se livrent entièrement à leurs appétits, & vuident toutes leurs quérelles par la force, au lieu de les décider par la raison & par la justice.

Mais quand on voit les peuples des deux Continents se ressembler parfaitement par rapport à certaines coutumes, aussi extravagantes qu'elles sont incommodes, on ne peut guéres se refuser à la conjecture qu'ils ont tiré ces usages d'une même source.

Hist des Celtes, Livre II. chap 6 p. 390.

J'ai prouvé par exemple, que dans les tems les plus reculés, & avant que l'usage des habits fut introduit, les habitans de la Grande Bretagne, les Thraces, les Daces, les Illyriens, les Istriens, & plusieurs autres peuples qui demeuroient le long du Danube, traçoient sur leur corps, avec une aiguille de fer, trempée dans le jus de Pastel, des figures de toute sorte d'animaux Ces figures servoient à distinguer les conditions & les familles. Les esclaves n'étoient point marqués, ou ne l'étoient qu'au front. On reconnoissoit la noblesse à de grandes figures, qui couvroient non seulement le visage, & les mains, mais encore les bras, les cuisses, le dos & la poitrine. Les roturiers au contraire portoient sur leur corps de petites figures éloignées les unes des autres. On lit avec surprise dans les Voyageurs, que la plupart des peuples sauvages de l'Amérique pratiquent la même chose, & selon les apparences dans les mêmes vuës. Ceux qui voudront s'en convaincre pourront consulter la Description de l'Amérique par Jean de Laet, * qui a ramassé avec beaucoup de soin & de fidélité, tout ce que les Historiens & les Voyageurs les plus célébres, tant Espagnols, que François, Anglois & Hollandois, ont écrit des peuples de ce vaste Continent. J'y trouve par exemple que c'étoit une coutume

* *Joannis de Laët Americæ utriusque descriptio.* Lugd. Batav. 1633.

me générale parmi les Sauvages * de l'Amérique Septentrionale & Méridionale, de peindre leur corps, & de l'enluminer de diverſes couleurs, avec cette difference que les uns preféroient la couleur rouge, & les autres la noire. ** Ceux de Terreneuve employoient le poinçon & le feu pour tracer ſur leur viſage des lignes, & des figures, qui paſſoient pour des traits de beauté. Dans la Virginie les femmes des Barbares *** avoient les cuiſſes, les mains, la poitrine, & le viſage même, couverts de marques noires, & de figures de ſerpens ou d'autres animaux. Ceux qui voudront en ſavoir davantage, pourront recourir aux endroits que j'indique en marge; ils prouvent qu'il régnoit ſur cet article une parfaite uniformité entre les peuples de l'Amérique. Ils avoient tous la coutume de peindre leur corps, & de le graver, ſi j'oſe m'exprimer ainſi. Je ſoupçonne que les differentes couleurs diſtinguoient les peuples, comme les differentes figures ſervoient à diſtinguer les conditions. Ce n'eſt cependant qu'une conjecture, & j'avouë qu'il n'eſt gueres poſſible de la bien juſtifier, parce qu'il ne paroit pas que les Voyageurs ayent fait aucune recherche ſur ce ſujet. Ils ſe contentent d'indiquer l'uſage général d'une Nation, & ne ſe ſont pas informés au reſte pourquoi certaines perſonnes de la Nation étoient marquées d'une maniere, & les autres d'une maniere differente.

* *Caribes nudi agunt, totum corpus rubrica quadam tinctî.* Lib. I. cap. 17. p. 25. *Plerique* (Attigovautani) *facies pungunt nigro aut rubro colore.* Lib II cap. 13. p 49. Voyez auſſi Lib II. cap. 2 & 19 Lib. III. cap 18. VI 2. X. 29. XIII. 5. 12 14. XV. 2. 4. XVI. 16. XVII. 11. La Hontan Dialogue p. 64. 65.

** *Faciem notis quibusdam inurebant & veluti lineis perſignabant.* Lib. II. cap. 2. p 14. *Quidam* (Barbarorum novæ Franciæ) *notis quibusdam & puncturis autem pingunt, ut formoſiores appareant.* J. de Laet. L. II. cap. 12. p. 47.

*** *Crura, manus, ubera atque ipſam faciem nigris notis, variisque ferarum & ſerpentum figuris diſpungunt* Idem L. II. cap 18 p 83 Voyez auſſi Lib. III. cap. 23. IV 14. IV. 14 18. 19 XIII. 14. XV. 2. 4. XVI. 16. XVII. 11.

Quoiqu'il en ſoit, je vais indiquer un autre uſage qui n'eſt pas moins extraordinaire, & qui étant commun juſqu'a ce jour à tous les Sauvages d'Amérique, étoit auſſi généralement reçû parmi tous les Peuples Celtes de l'Europe. On dit que les habitans naturels de l'Amérique ſont tous impubères, & qu'a la reſerve de la tête & des ſourcils, * *il ne leur paroit ni poil, ni barbe, en nul endroit du corps.* Le Baron de la Hontan qui ne perd aucune occaſion d'attaquer la Révélation, inſiſte beaucoup ſur cette remarque, & y revient ſouvent, ** parce qu'elle prouve ſelon lui qu'il y a ſur la terre des hommes de differentes eſpeces, & que nos Livres ſacrés, qui font deſcendre tout le genre humain d'un ſeul homme, ne méritent aucune créance ſur cet article. Mais aſſurement la Hontan & ceux qui l'ont ſuivi, ſe ſont un peu précipités, & ils auroient été d'un autre ſentiment s'ils avoient pris la peine de bien examiner la choſe. Pour parler exactement, il faloit dire que les Sauvages de l'Amérique veulent être impubères, & qu'ils s'en font un honneur, puisque les Voyageurs qui ont fait d'exactes recherches ſur cet article, ont reconnû que les barbares ſe faiſoient le poil, & que ceux qui négligeoient cette opération avoient du poil & de la barbe comme les autre hommes. Jean de Laet remarque à la verité fort ſouvent, que les habitans de l'Amerique ſont ſans barbe, (*imberbes*,) mais il n'a garde de prendre le change comme l'a fait la Hontan, ni de regarder comme un préſent de la nature, ce qui n'etoit pas plus naturel aux Amériquains que les couleurs dont ils ſe peignoient, & les figures d'animaux qu'ils tracoient ſur leur corps. *** *Les Chefs des Souriquois, peuple de l'Acadie*, dit cet Hiſtorien, *ſont les ſeuls qui laiſſent croitre leur barbe : tous les autres l'arrachent juſqu'à la ra-*

* La Hontan, Voyage dans l'Amérique Septentrionale. T. II. p. 93. Edit. de la Haye 1703.

** La Hontan T. I. p. 249. Dialogue p. 67. 78. 82.

*** *Barbam nonniſi primoris alunt, cæteri radicitus evellunt.* Lib. II. cap. 16. p. 52.

racine. Le même Auteur dit * *que les habitans du Breſil n'ont des cheveux que ſur la tête, & qu'ils en raſent même une partie; mais qu'au reſte ils arrachent à la racine tout le poil qui leur vient ſur le reſte du corps.* Il fait la même remarque par rapport aux Motayes, ** ajoutant *qu'ils s'arrachent juſqu'au poil des ſourcils.* Les Toupinambous auſſi *** *ſe raſoient le devant de la tête, & ne gardoient que les cheveux qui couvrent le derriere de la tête; mais ils exterminoient tout le poil qui paroiſſoit ſur leur corps.* Les habitans encore du païs de **** Comen ne faiſoient aucun quartier à leur barbe, qu'ils avoient ſoin d'arracher poil par poil. Ces remarques ſont confirmées par le Pere Lafiteau, qui parlant des peuples de l'Amérique que la Hontan a connus, dit expreſſément: ***** *Les ſauvages, à l'exception des cheveux & des ſourcils, que quelques uns même ont ſoin d'arracher, n'ont pas un poil ſur le corps, & s'il leur en vient quelcun, ils en ôtent de bonne heure juſqu'a la racine.* Il ne faut donc pas être ſurpris que des peuples qui alloient à la chaſſe d'un poil, comme on iroit à la pourſuite d'un ennemi ou d'une bête feroce, pour les exterminer avec le fer & le feu, ayent trouvé le ſecret de ſe rendre impubères, & de paroitre tels aux yeux des étrangers. J'ai tort cependant de parler ici du fer. Les Américains n'en connoiſſoient point l'uſage. Mais

* *Capillum capitis ſolummodo alunt, reliquo corpore radicitus evellunt pilos; viri quidem diverſis modis ſe tondent, nunc in coronam, nunc in aliam formam, idque tanta varietate ut gentes inter ſe tonſuræ forma diſtinguantur.* Lib XV. cap. 2. p. 544.

** *Motayes demittunt capillos capitis paululum infra aures, tam fœmina quam mares; ubi longius excreverint, tam decenter in orbem deurunt, ac ſi tonſilibus præciſi fuiſſent; reliquis corporis partibus ita evellunt crines, ut ne quidem in ſupercilibus tolerent* Lib. XV. cap 4. p 550.

*** *Capillum quidem capitis alunt, ceteros autem pilos univerſo corpore evellunt; mares attondunt cæſariem ſupra frontem.* Lib. XVI cap. 16. p. 620.

**** *Pilos barbæ penitus evellebant,* Lib. XVIII. 4 p. 672.

***** Tom. I. p. 104.

Mais ils ſuppléoient à ce défaut par le moyen de certaines coquilles de mer fort trenchantes, qui leur tenoient lieu de raſoirs & de pincettes. Croiroit-on après cela qu'un uſage ſi gênant, & ſi incommode étoit commun autrefois à tous les peuples Celtes. Quoique je ne ſache pas qu'aucun des modernes, qui ont parlé des anciens habitans de l'Eſpagne, des Gaules, & de la Germanie, en ait fait la remarque, la choſe n'en eſt pas moins certaine. Jules Ceſar l'aſſure bien formellement des peuples de l'Angleterre. ** *Ils portent une longue chevelure, & ſe font raſer tout le corps, à la reſerve de la tête & de la mouſtache.* Le Scholiaſte d'Ariſtophane, & Suidas diſent la même choſe des Thraces, qui étoient le peuple Celte le plus voiſin de la Grece. Le premier expliquant le mot d'ἀποτέθρακεν employé par ſon Poëte, dit *** *Thraces lævigabant, & vellebant pudendas corporis partes, & nudatas habebant.* „ Lævigabant ſcilicet pice vel pumice, & vellebant „ forcipe, ſicut Britanni radebant novacula. „ Suidas fait la même remarque. Parlant des Odomantes, qui étoient un peuple Thrace **** il

* *Mares* (in Virginia) *dimidiam capillitii partem ſibi a fœminis conchis quibusdam abradi curant, alteram autem promittunt; fœmina pro ætatis diſcrimine varie tondentur.* J. de Laet. Lib. III. cap. 18. p. 83.

** *Britanni capillo ſunt promiſſo, atque omni parte corporis raſa præter caput & labrum ſuperius.* Cæſar. V. 13.

*** ἀποτέθρακεν, ἀνέτιλε, ἐλειαίνοντο δὲ καὶ ἀπετίλοντο οἱ θρᾷκες τὰ αἰδοῖα: καὶ ἀποσεσυρμένα εἶχον αὐτά. Scholiaſt. Ariſtoph. p. 195. Edit. Junt. Florent 1525.

**** ἐλειαίνοντο καὶ ἀπετίλλοντο οἱ θρᾷκες τὰ αἰδοῖα, καὶ ἀποσεσυρμένα εἶχον αὐτά. Φασὶ δὲ αὐτοὺς Ιουδαίους εἶναι. Suid. in ἀποτεθριακεν. T. I. p. 298. L'Auteur de l'*Etymologicon magnum* a lu ici ἀπέτυλον, ce qui l'a jetté dans un faux ſens; ἀπέτυλον, ἀπέσυρον τὸ αἰδοιῶν. καὶ ἀποτυλῶσαι, τὸ ἐπάραι τὸ αἰδοῖον, τῦλος γὰρ τὸ αἰδοιῶν. p. 125.

il dit; *Thraces, pudenda lavigare & vellere ſolebant, & nudata habebant, quos Judæos eſſe ajunt.* Enfin Athénée aſſure que cet uſage étoit commun à tous les peuples barbares de l'Occident. * *Omnes qui ad Occidentem habitant barbari picantur, & corpora radunt.* Ces remarques peuvent ſervir à expliquer un paſſage de Jules Ceſar, qu'aucun des Commentateurs que j'ai eu occaſion de conſulter, n'a touché. ** *C'eſt un grand honneur aux jeunes gens parmi les Germains d'être longtems impubères. On croit que par là ils deviennent d'une taille plus avantageuſe, & qu'ils acquierent plus de force & de vigueur. Ils regardent comme une grande infamie d'avoir eu la compagnie d'une femme avant l'age de vingt ans; la choſe ne peut ſe cacher, parce qu'ils ſe lavent les uns parmi les autres dans les fleuves, & ne ſe couvrent que de peaux, ou de petites couvertes de renne, qui laiſſent la plus grande partie du corps découvert.* Au premier abord on a de la peine à deviner ce que Jules Ceſar vouloit dire. Les Germains tenoient à deshonneur de connoitre une femme avant l'age de vingt ans; & ils ne pouvoient cacher ce commerce, parce qu'ils ſe baignoient pêle-mêle dans les fleuves, & que leurs habits laiſſoient la plus grande partie du corps découvert. Ne diroit-on pas que les jeunes gens qui s'etoient deshonorés par un commerce prématuré avec les femmes, portoient ſur leur corps des marques viſibles de l'infamie qu'ils avoient contractée. Aſſurément ce n'eſt pas là ce que l'Hiſtorien vouloit inſinuër. Pour entrer dans ſa penſée, il faut remarquer que ces paroles, *cujus rei nulla*

* Πάντες δὲ ὁι πρὸς ἑσπέραν οἰκοῦντες βάρβαροι πιττοῦνται, καὶ ξυροῦνται τὰ σώματα. Athen. Lib. XII. cap. 3.

** *Qui diutiſſime impuberes manſerunt, maximam inter ſuos ferunt laudem; hoc ali ſtaturam, ali hoc vires, nervosque confirmari putant. Intra annum vero vigeſimum fœmina notitiam habuiſſe, in turpiſſimis habent rebus; cujus rei nulla eſt occultatio, quod & promiſcue in fluminibus perluuntur, & pellibus aut parvis rhenonum tegumentis utuntur, magna parte corporis nuda.* Cæſar. VI. 21.

nulla eſt occultatio, ne ſe rapportent pas à celles qui précédent immédiatement, ſavoir *fœmina notitiam habuiſſe*, mais à ce qui avoit été dit un peu plus haut, *qui diutiſſime impuberes manſerunt, maximam inter ſuos ferunt laudem.* Ce que de jeunes gens que l'on voyoit tous les jours nuds, ou habillés à demi, ne pouvoient cacher, n'étoit pas la perte de leur virginité ; mais ils ne pouvoient pas empecher qu'on ne vit s'ils étoient pubères ou impubères ; & c'eſt là préciſément ce que Jules Ceſar vouloit dire. Les Germains comme les autres peuples Celtes, ſe raſoient tout le corps à la reſerve de la tête & de la mouſtache ; mais c'étoit un honneur pour les jeunes gens d'être longtems exemts de cette ſujettion. On s'imaginoit qu'un jeune homme qui étoit obligé de ſe faire raſer ou de s'arracher le poil de bonne heure, ne grandiſſoit plus, & ne devenoit jamais auſſi vigoureux qu'un autre qui demeuroit longtems impubère, & que l'on regardoit par cette raiſon comme un autre Samſon. *Hoc ali ſtaturam, ali hoc vires, nervoſque confirmari putant.* Il faut avouër que les idées & le goût ont bien changé à cet égard. Je remarque cependant que les Gaulois avoient ſur cet article les mêmes idées que les Germains. Ils regardoient comme un honneur, & comme un trait de beauté, dans les jeunes gens qu'ils fuſſent longtems impubères. Pline remarque * que les Marchands qui faiſoient trafic d'eſclaves, les frottoient avec du vin doux, dans lequel ils avoient fait infuſer de la racine d'iris, ou de glayeul, parce que c'étoit un moyen pour empêcher que le poil ne pouſſât.

J'avouë que ces recherches ſont d'une très petite importance. Auſſi ne me ſerois-je pas arrêté à ces bagatelles, ſi en expliquant un paſſage de Jules Ceſar, & en montrant combien le Baron de *la Hontan* s'eſt précipité & mépris, elles ne ſervoient encore à confirmer la conjecture, que l'Amérique a été peuplée par des barbares venus de l'Europe

* *Hyacinthus in Gallia maxime provenit Hoc ibi ſuco Hyſginum tingitur. Radix eſt bulbacea, mangonicis venalitius pulcre nota, quæ e dulci vino illita pubertatem coercet & non patitur erumpere.* Plin. H. N. L. XXI. Cap. 26. p. 165.

rope ou de l'Aſie. J'ignore abſolument, ni dans quel tems, ni de quelle maniere, ni par quel chemin, ils ont paſſé d'un Continent à l'autre. Tout ce que je ſai, c'eſt qu'ils n'ont pu faire le trajet par mer. Les plus anciens habitans de l'Europe n'avoient que de petites barques, faites de quelques cuirs de boeuf ſecs qu'ils couſoient enſemble, & qu'ils ſoutenoient en dedans, au * moyen de quelques branches de ſaule. On comprend bien que ces nacelles qui pouvoient être de quelque uſage à des pêcheurs, ou à des pirates qui rangeoient les côtes, ne pouvoient ſervir à faire des courſes & des voyages en pleine mer. Je ſoupçonne donc qu'il y a au Nord de l'Europe ou de l'Aſie quelque langue de terre, ou quelque détroit, par lequel les peuples Scythes ont paſſé d'Europe en Amérique. C'eſt ce que les Voyageurs éclairciront peut-être quelque jour. Cette conjecture recevroit un nouveau degré de probabilité, s'il étoit vrai comme le Pére Lafiteau le prétend, que la langue des Sauvages de l'Amérique eut une grande conformité, avec les anciennes langues de l'Europe & de l'Aſie ; mais j'avouë que les preuves qu'il en donne, au lieu de me convaincre, m'ont paru n'avoir pas jusqu'au moindre degré de vraiſemblance. Je me crois même obligé de déclarer qu'ayant examiné avec attention un très grand nombre de mots des Langues ** de l'Amérique Septentrionale que l'on trouve dans J. de Laët, dans la Hontan, & dans d'autres Voyageurs, je n'ai pas remarqué qu'ils euſſent aucun rapport, ni avec le Latin, le Grec, l'Hebreu, & le Sarmate, ni en particulier avec les Langues que je crois dérivées de l'ancienne Langue des peuples Scythes & Celtes, telles que ſont l'Allemand, le Bas-Breton & le

* Luſitani coriaceis utebantur navigiis. Strabo III. 155. *Navigant* (in mari Britannico) *vimineis alveis, quos circumdant ambitiosæ tergorum bubalorum.* Solin cap. 22. p. 30 *Etiam nunc in Britannico Oceano vitilia cano circumſuta ſunt.* Plin. l. VII. cap. 56. p. 104. V. auſſi IV. cap. 16. p. 482. XXXIV. cap. 17. p. 151.

** M. le Docteur Heinius m'a averti, qu'il avoit trouvé une grande conformité entre la Langue Hébraique, & celle des habitans du Perou, qu'il croit deſcendus des Carthaginois.

Galois. Je n'ai pas touché quelques autres traits de conformité que j'ai remarqués entre les anciens Scythes, & les Sauvages de l'Amérique, ſoit parce qu'ils ne m'ont pas paru auſſi frappans, ſoit parce que la choſe demanderoit un détail qui n'eſt pas de ce lieu. Le Baron de la Hontan aſſure, par exemple, que les Sauvages qu'il a connus brulent leurs morts ; qu'ils ne ſe marient qu'à l'age de trente ans ; qu'ils ont des Cantiques dans leſquels ils célébrent les exploits de leurs ayeux, qu'ils en ont ſur toute ſorte de ſujets, que chaque Cantique a ſon air & ſa Danſe particuliere ; qu'un brave, ou un Chef de guerre, qui déclare une expédition qu'il médite, eſt ſuivi par une foule de jeunes gens qui s'enrôlent pour acquérir de la gloire ; qu'un criminel, ou un priſonnier, à qui on a prononcé l'arrêt de ſon ſupplice, entonne ſur le champ la chanſon de mort, & continuë ce Cantique funébre juſqu'à ſon dernier ſoupir, de ſorte qu'on les voit mourir ordinairement en chantant. J'ai prouvé que tout cela s'obſervoit de la même maniere parmi les peuples Celtes, & peut-être trouverai-je un jour l'occaſion d'étendre & de mieux juſtifier ce Parallèle.

T. II. p. 152.
T. II p. 130.
T. II. 101.
T. II. 179.
T. I. t. II. 179. 183. 233.

DISSER-

DISSERTATION
SUR L'ORIGINE DU PEUPLE PRUSSIEN,
PAR M. DE FRANCHEVILLE.

Le nom des PRUSSIENS eſt ſi célébre qu'on ne ſauroit avoir de l'indifférence pour tout ce qui peut ſervir à illuſtrer l'Origine de cette Nation. Je n'ai point deſſein de parler des différens Peuples qui ſont ſoumis à la Souveraineté du Roi, mais ſeulement des Habitans de la Pruſſe.

Pour traiter cette matière avec un peu d'ordre, je la partagerai en trois Parties.

Dans la premiére, j'indiquerai des caractères propres & invariables, par le moien deſquels on peut parvenir à démêler la Pruſſe dans les Ecrits des Anciens, ſous quelque nom qu'elle y ait été déſignée; & a trouver en même tems ceux des diverſes Nations qui l'ont habitée, l'une après l'autre.

Dans la ſeconde, j'expliquerai les ſucceſſions de ces anciens Peuples, & je donnerai un petit abrégé de leur Hiſtoire.

Enfin dans la troiſiéme, j'examinerai d'où la Pruſſe a tiré ſon nom; & après avoir montré les différentes opinions qu'on a eu là deſſus, j'en propoſerai une nouvelle, dans laquelle je tâcherai de donner aux Pruſſiens une Origine plus vrai-ſemblable, & dont perſonne ne s'eſt encore aviſé.

PREMIERE PARTIE.

Des Caractères propres à faire démêler la Pruſſe dans les Ecrits des Anciens, & trouver les noms des Nations qui l'habitoient.

I. Si les fréquentes émigrations des anciens Peuples rendent la recherche de leurs Succeſſions extrémement pénible, il n'eſt pas moins difficile de démêler toujours les différentes contrées où ils ſe ſont ſucceſſivement établis. C'eſt ce qui eſt vrai ſurtout à l'égard de celles qui ſont du côté du Nord, qui, pour me ſervir des expreſſions de Jornandès, a été * comme le magazin des Nations, & l'étui d'où elles ſont ſorties, étant pouſſées les unes par les autres, comme les flots de la mer, pour aller inonder enſuite tout le reſte de l'Europe.

* *Quaſi officina gentium, aut certè velut vagina nationum.*

Les Forêts, les Montagnes & les Rivieres, qui ſervent communément de guides à ceux qui travaillent ſur l'ancienne Géographie, peuvent très ſouvent les induire en erreur. Ces ſortes d'indices ſont communs à chaque païs, & non ſeulement de nouveaux habitans en ont pu changer les noms, mais même il eſt arrivé quelquefois qu'ils leur ont ſubſtitué, ou ceux de leur Nation & de leur Patrie originelle, ou ceux des Forêts, des Montagnes & des Rivieres, qu'ils y avoient abandonnées.

Il en eſt tout autrement des Païs que la Nature a caractériſés par certaines productions rares & précieuſes, qui leur ſont particulieres. Si ces productions y ſont auſſi anciennes que le Monde, ſi elles ne ſont point duës à l'induſtrie humaine, voilà l'indice infaillible, & le vrai fil d'Ariadne à la faveur duquel on doit dans tous les tems, s'il eſt poſſible, reconnoître de tels Païs, ſous quelque nom que l'Hiſtoire en faſſe mention ; développer leurs anciennes révolutions, & conſtater enfin l'origine des Peuples qui les habitent aujourd'hui.

II. Rien de plus aiſé que de faire l'application de ce principe à la Pruſſe. De toutes les productions dont la Nature l'a avantagée, la plus précieuſe, la plus rare, eſt l'Ambre jaune qu'on pêche ſur ſes Côtes.

tes. On a cru longtems, & c'eſt encore l'opinion de quelques Modernes, que c'étoit une eſpece de réſine, qui ſe forme ſur les côtes de Suéde, quoiqu'on ne la pêche que ſur celles de Pruſſe : ce qui provient, dit-on, de ce que la Pruſſe a des rivages plus bas ſur leſquels la Mer Baltique répand ſes flots, quand les tempêtes les agitent ; au lieu que la Suéde a pour Côtes, de hautes falaiſes, ou des terres élevées & ſoutenuës, de ſorte que comme ces terres ſont bordées de grandes forêts remplies de Peupliers & de Sapins, qui jettent en Eté quantité de gomme, une partie en demeure attachée aux branches des arbres ; les neiges la couvrent pendant l'hiver ; les froids l'endurciſſent & la rendent caſſante ; enſuite les vents impétueux qui ſecoüent ces branches, l'en détachent & l'emportent dans la mer ; enfin les flots venant a s'agiter, & les vents les pouſſant des Côtes de Suéde vers celles de Pruſſe, l'Ambre ſuit ce mouvement, & vient tomber entre les mains des Pêcheurs. D'autres, ſans recourir à la Suéde pour la production de cette gomme, ont dit qu'elle étoit formée du côté de la Pruſſe par des Chênes & des Sapins, qui croiſſent ſur des montagnes de ſable blanc, près des Côtes du Cercle de Samland ; que c'eſt une matière d'abord visqueuſe & gluante, à peu près comme de la pâte, & qui étant expoſée à l'air, ſe durcit & forme l'Ambre jaune. Mais on eſt revenu de ces opinions, depuis qu'il a été reconnu que l'Ambre a la même origine que le Jaïet, qui n'eſt autre choſe qu'un bitume mêlé de parties métalliques, & durci comme une pierre : c'eſt à dire, depuis qu'on a remarqué dans l'un & dans l'autre la même odeur & la même électricité ; & que d'habiles Pruſſiens ont aſſûré, qu'on n'alloit pas ſeulement chercher l'Ambre dans les flots de la Mer le long de cette côte, où il eſt porté par la violence des tempêtes du bout des lits d'où il s'écoule ; mais qu'on le trouvoit même dans le ſein de la terre en pluſieurs endroits de la Pruſſe, ordinairement couché parmi des matieres vitrioliques & bitumineuſes, qui ſont poſées par lits, les unes ſur les autres, comme différentes feuilles minces, qu'on prendroit au premier aſpect pour du bois. Après tout, comme le mécha-

Denys, Diſſertation ſur l'Ambre, 1672.

Diſſertation de M. Hartman, dans l'Abregé des Tranſ. Philoſ. par Lowthorp. T. IV. p. 473.

méchanisme de ſa formation ne fait point ici mon objet, je me bornerai à ce qui eſt inconteſtable, ſavoir, que l'Ambre a tous les caractères que j'ai ſuppoſés plus haut. C'eſt une production naturelle auſſi ancienne que la Pruſſe. Cette production a été connuë & recherchée dans les Siécles les plus reculés. Et comme les Pruſſiens, qui en font la Pêche, ne partagent point cet avantage avec les autres Peuples de l'Europe, il s'enſuit qu'on ne peut entendre que des Pruſſiens ſeuls & de leurs Côtes, tout ce que les Anciens ont dit des rivages où l'on recueilloit l'Ambre. Les anciens Allemands le nommoient *gleſs*, à cauſe de ſa transparence ; les Latins, *ſuccinum*, parce qu'ils le regardoient comme un ſuc d'arbre ; & les Grecs, ἤλεκτρον, par rapport à ſa qualité attractive. Ils donnoient auſſi le même nom à un métal compoſé de quatre parties d'or & d'une d'argent; peut-être à cauſe qu'il étoit de la même couleur que l'Ambre.

III. Pline le Naturaliſte a raſſemblé dans le XXXVII. Livre de ſon Hiſtoire, les Fables que les anciens Grecs avoient inventées ſur l'origine de l'Ambre. Je ne ferai que traduire ici ce paſſage qui me ſera de quelque utilité dans la ſuite. Après le Cryſtal, dit il, vient l'Ambre, qui ne ſert encore qu'à la parure des femmes : mais il y a lieu de s'étonner qu'on en faſſe autant & plus de cas que des pierres précieuſes ; vû que ceux-même qui l'eſtiment le plus, n'en ſavent point la raiſon. Pour moi je croi que la folle curioſité des Grecs nous a inſpiré ce goût aveugle. Je demande pardon au Lecteur, ſi je vais être un peu long à rapporter ce que diſent les Ecrivains de cette Nation ſur l'origine de l'Ambre : car il eſt bon de ſavoir ce qu'ils en ont penſé. En premier lieu, ils ont écrit que les ſoeurs de Phaëton pleurant la mort miſérable de leur frere, qui avoit été foudroyé, furent métamorphoſées en peupliers, & leurs larmes converties en Ambre, que ces arbres rendoient tous les ans le long de l'*Eridan*, que nous nommons le Pô ; & que l'Ambre avoit pris le nom d'*Electrum*, à cauſe que le Soleil s'appelloit *Elector*. * Telle a été l'opinion de pluſieurs Poëtes Grecs, dont les premiers, à ce que je croi, ſont Eſchyle, Philoxéne,

* Ou, comme portent d'anciens Exemplaires, *Helios*.

loxéne, Nicandre, Euripide & Satyrus. Mais c'eſt une pure fable, démentie par le témoignage de toute l'Italie. Les plus modeſtes d'entre eux ont dit, que dans la mer Adriatique, vers les embouchures du Pô, étoient les Isles Electrides, ainſi nommées parce qu'on y trouve l'Ambre. Mais il eſt ſûr qu'il n'y a là aucune Isle de ce nom, & qu'il n'y en a point où le Pô puiſſe apporter rien dans tout ſon cours. A l'égard de ce qu' Eſchyle ajoûte au ſujet de l'*Eridan*, qu'il place dans l'Ibérie, c'eſt à dire en Eſpagne, & qu'il dit être appellé *Rhodanus*, c'eſt encore une erreur qui n'eſt pas moins groſſière que celle qu'ont fait Euripide & Apollonius, en diſant que le *Rhodanus* & le Pô ſe rendoient enſemble dans la Mer Adriatique. Mais il ne faut pas faire un crime à des gens qui connoiſſoient ſi peu la Géographie, d'avoir ignoré l'origine de l'Ambre. D'autres n'ont pas moins erré, lorsqu'ils ſe ſont contentés d'écrire, qu'aux extrémités de la Mer Adriatique, ſur des rochers inacceſſibles, il y avoit des Arbres qui rendoient cette gomme au lever de la Canicule. Théophraſte dit, qu'on la tire de terre dans la Ligurie. Charès rapporte, que Phaëton mourut dans l'Ethiopie d'Hammon; que par cette raiſon il y a là un temple & un oracle, & que l'Ambre s'y engendre. Philémon a prétendu, que c'étoit un foſſile, & qu'en deux endroits de la Scythie on en tiroit de deux ſortes, qu'on nommoit indifféremment *Lictrum*, quoique l'un fût blanc & l'autre jaune comme de la Cire; mais qu'on en trouvoit dans un troiſiéme endroit du roux qui s'appelloit *Subalternicum*. Démoſtratus donne à l'Ambre le nom de *Lyncurion*, & dit qu'il ſe forme de l'urine des Lynx, avec cette différence, que l'Ambre, qui provient des mâles, eſt roux ou ardent, & que celui qui vient des femelles, comme moins parfait, eſt plus faible en couleur, & même tout blanc. D'autres l'ont nommé *Langurium*, & l'ont regardé comme une production de certains animaux d'Italie appellés *Languries*: Zenothemis les appelle *Langes*, & aſſure qu'ils vivent le long du Pô. Sudinès attribue l'Ambre à un arbre qui le produit dans la Ligurie. C'eſt auſſi le ſentiment de Metrodorus. Celui de Sotacus eſt, qu'il diſtille, dans les Isles Britanniques,

de certains rochers qu'on appelle par cette raiſon *Electrides*. L'opinion de Pytheas eſt que les Guttons, peuple de Germanie, habitent ſur une des * Barres de l'Ocean nommé *Mentonomon*, qui a ſix-mille Stades d'étendue ; qu'à une journée de mer au delà, eſt l'Isle † *Baſilie*, où les flots apportent l'Ambre, qui eſt un excrément que jette la mer, dont les eaux ſe condenſent, & que les habitans ne s'en ſervent que pour le brûler au lieu de bois, ou pour le vendre aux Teutons de leur voiſinage. Timée a cru la même choſe, mais il a donné à cette Isle le nom de *Baltie*. Philemon a dit, que l'Ambre rendoit de la flamme. Nicias veut, que cette matiere ſoit un ſuc des raions du Soleil, lesquels, à ce qu'il croit, étant dardés ſur la terre avec plus de véhémence au coucher de cet Aſtre, laiſſent dans cette partie de l'Océan une ſueur graſſe, que les Marées jettent ſur les rivages des Germains; que l'Ambre croît ainſi non ſeulement en Egypte, où l'on le nomme *Sacal*, mais auſſi dans l'Inde, où il eſt plus eſtimé que l'encens ; Que même dans la Syrie les femmes en font des peſons à leurs fuſeaux pour leur donner de la peſanteur & les faire mieux tourner ; & qu'enfin l'Ambre y eſt appellé *Harpax*, à cauſe qu'il enléve les feuilles d'arbre, la paille & les franges des robes. Théochreſte penſe que le flux de l'Océan l'apporte aux promontoires des Pyrenées : ce qui eſt auſſi l'opinion de Xenocrate, qui a écrit derniérement ſur ce ſujet. Aſarubas qui vit encore, raconte que joignant la Mer Atlantique, il y a le lac Cephiſis, que les Maures appellent *Electride*, lequel étant échauffé par le Soleil produit de ſon limon l'Ambre qui y flotte ſur l'eau. Mnaſeas dit qu'il y a en Afrique le lac Sicyon, d'où ſort le fleuve Crathis, qui ſe jette dans l'Océan, & qui nourrit divers * Oiſeaux aquatiques ; & que l'Ambre y naît, de la même qu'au Lac Electride dont il a été parlé ci-deſſus. Theomènes rapporte qu'auprès de la grande Syrte, où eſt le jardin des Heſpérides, l'Ambre, qui en ſort, tombe dans un étang, où les jeunes filles du païs le vont ramaſſer. Cteſias dit, qu'un fleuve des Indes appellé *Hypobarus*, (ce qui ſignifie porteur de bonnes choſes,) coule du Nord dans l'Océan oriental, au pied d'une montagne couverte de bois, dont les Arbres

* *Aeſtuarium.*

† Le texte porte *Abalus*; mais c'eſt une erreur; car Pline dit ailleurs, que Pytheas appelle cette Isle *Baſilie.*

* *Meleagrides & Penelopes.*

Arbres qui produiſent l'Ambre, ſont appellés *Sipnachores*, c'eſt à dire, *douceur exquiſe*. Mithridate aſſûre, qu'aux Côtes de Germanie il y a une Isle appellée *Oserieta*, toute remplie de Cédres, d'où l'Ambre coule ſur les pierres. Xenocrate prétend qu'en Italie on ne le nomme pas ſeulement *Succinum*, mais encore *Thyon*, & même *Sacrium* chez les Scythes, où il reconnoît qu'il prend naiſſance, quoique d'autres aient penſé qu'il croiſſoit en Numidie. Sophocle, Poëte tragique, a renchéri ſur eux tous; & c'eſt ce que je ne ſaurois pardonner à un grand homme comme lui, qui indépendamment de ſa qualité d'Auteur ſérieux, étoit un Perſonnage célébre par ſes actions, né d'une des premiéres maiſons d'Athénes, appellé au gouvernement de l'Etat, & à qui même l'on confia la conduite d'une Armée. Un ſi grand homme n'a pas eu honte d'écrire, que l'Ambre étoit produit au delà des Indes par les larmes des Pintades pleurans la mort de Méléagre. Qui ne s'étonnera qu'un Sophocle ait cru de pareilles fables, ou eſpéré de pouvoir les perſuadèr à d'autres ? S'imaginoit-il qu'il y eût des enfans aſſez privés de ſens commun, pour croire que des Oiſeaux pleuraſſent ainſi réguliérement chaque année ? qu'il ſortît de leurs yeux des larmes d'un ſi gros volume ? & qu'ils ſe trouvaſſent aux Indes pour y pleurer Méléagre qui mourut dans la Grèce ? Que conclure de là ? ſinon que les Poëtes ne gardent pas même la vraiſemblance dans leurs fictions.

Pline, aiant ainſi rapporté les opinions des Grecs qu'il regardoit comme fabuleuſes, ajoûte immédiatement après ce qu'il ſavoit lui-même de l'origine de l'Ambre. Mais s'il mérite qu'on lui tienne compte du ſoin qu'il a pris de nous indiquer des opinions auſſi anciennes, dont la plûpart aiant péri avec les ouvrages d'où il les a tirées, nous ſeroient inconnues ſans lui ; d'un autre côté il y a lieu de s'étonner qu'il n'ait rien dit en cet endroit des plus célébres Hiſtoriens qui avoient également écrit avant lui & dont les Ouvrages ont heureuſement paſſé jusqu'à nous.

Hérodote, qui vivoit dans le même Siècle qu' Eſchyle, Sophocle, Euripide & Métrodore, les plus anciens de ces Poëtes fabuleux, ne doutoit pas que l'Ambre ne fût une production des Climats du Nord ; mais il ne pouvoit concevoir comment il y étoit produit par un fleuve qui avoit un nom Grec. Voici ce qu'il en dit au III. Livre de ſon Hiſtoire. A l'égard des extrémités de l'Europe je n'en puis rien dire de fort aſſuré. Car je ne ſuis point perſuadé qu'il y ait un certain fleuve appellé par les Barbares, *Eridan*, qui aille ſe rendre dans la Mer qui regarde le Septentrion, d'où l'on dit que vient l'Ambre. En effet cela eſt contredit par le nom d'*Eridan*, qui étant un mot Grec & non barbare, a été inventé par quelqu'un de nos Poëtes. Mais quoique je m'en ſois informé ſoigneuſement, je n'ai pû trouver perſonne, qui ait vû comment la Mer baigne cette partie de l'Europe. Toujours eſt-il certain, que c'eſt des régions éloignées que viennent chez nous l'Etain & l'Ambre.

Pag 234. de l'edit de Londres.

Un certain Héraclide, ou Héraclite, Auteur d'un traité des choſes incroiables, a mis en ce rang tout ce qu'on diſoit de ſon tems ſur l'origine de l'Ambre en Italie.

Diodore de Sicile a auſſi réfuté cette fable plus de cent ans avant Pline. Du côté de la Scythie, (dit il au V. Livre de ſon Hiſtoire,) il y a dans l'Océan une Isle que l'on nomme *Baſileia*, contre laquelle l'Ambre eſt jetté par les flots avec abondance : on n'en trouve nulle part ailleurs dans tout le monde. Il racohte en cet endroit la chûte fabuleuſe de Phaëton dans l'Eridan ou le Pô ; puis il ajoute : Mais comme tous ceux qui ont inventé cette fable, ſe ſont éloignés de la vérité, & que l'événement a montré aux Siécles ſuivans ce qui en étoit, il en faut plutôt croire de fidèles hiſtoriens, qui nous ont appris, que l'Ambre eſt recueilli dans une Isle dont nous avons déjà fait mention, & que les habitans l'apportent au Continent, qui eſt vis-à-vis, par où on le tranſporte enſuite jusqu'en ces pays-ci.

C'eſt ici le lieu de parler d'Ovide, qui a employé le ſecond Livre de ſes Métamorphoſes à chanter l'aventure de Phaëton. Il remarque

que

que l'Eridan, dans lequel Phaëton fut précipité, étoit fort éloigné de ſa Patrie, & pour ainſi dire dans un monde différent : *Quem procul à patria diverſo maximus orbe excipit Eridanus.* Circonſtance que le Poëte touche encore dans la ſuite, en parlant du corps de Phaëton, que Clymene ſa mère alla chercher, & qu'elle trouva inhumé ſur un rivage étranger : *mox oſſa requirens, repperit oſſa tamen peregrinâ condita ripâ.* Cependant Phaëton étoit parent & intime ami de Cycnus Roi de Ligurie, dont les Etats s'étendoient jusqu'au Pô : *Cycnus, qui tibi materno quamvis à ſanguine junctus, mente tamen, Phaëton, propior fuit. . . . Nam Ligurum populos & magnas rexerat urbes.* Comment concilier tout cela en ſuppoſant que le Pô fût l'Eridan ?

Pline qui n'a écrit ſon Hiſtoire Naturelle que depuis Ovide, parle de l'origine de l'Ambre pour la première fois au XIII. Chapitre du IV. Livre. Après avoir, dit-il, paſſé les monts Riphées, on tient à gauche le bord de l'Océan Septentrional jusqu'au détroit de Gadés. On trouve ſur cette route pluſieurs Isles qui n'ont pas de nom. Timée rapporte que devant la Scythie, il y en a une, que l'on appelle *Baltie :* qu'elle eſt à une journée de la *Scythie*, & que c'eſt en cette Isle que les flots jettent l'Ambre au Printems. Les autres Côtes ne ſont pas ſi connuës. Hecatée appelle l'Océan ſeptentrional *Amalchius*, depuis le fleuve Paropamiſe du côté duquel cette Mer baigne la Scythie ; ſon nom Amalchius dans la langue du pays ſignifie *glacé*. Philémon dit que jusqu'au promontoire *Rubeas* elle eſt appellée par les Cimbres *Morimaruza*, c'eſt à dire Mer morte, & partout au delà *Cronium*. Xenophon de Lampſaque dit qu'à trois journées de navigation de la côte des *Scythes*, on trouve l'Isle *Baltie* qui eſt d'une immenſe étenduë. Pytheas la nomme *Baſilie*, &c.

Un peu plus bas dans le même Chapitre, Pline parle de l'Isle *Gleſſaria*, nommée ainſi par les Soldats Romains qui y ramaſſérent de l'Ambre, & par les gens du pays *Auſtrania*. Et au XVI. Chapitre du même Livre, il parle encore d'autres Isles Gleſſaires éparſes dans la Mer Germanique, que les Grecs modernes ont, dit-il, appellé *Electri-*

des, parcequ'il y naiſſoit de l'Ambre. Enfin dans le III. Chapitre du XXXVII. Livre, il a raſſemblé tout ce qu'on ſavoit de ſon tems ſur cette matiere. Il eſt certain, dit-il, que l'Ambre ſe forme dans les Isles de l'Océan Septentrional, & que les Germains l'appellent *Glæſs*. C'eſt pourquoi nos Romains donnérent le nom de *Gleſſaria* à une Isle que les Barbares appellent *Auſtraviâ*, où Cefar Germanicus parvint avec ſa flote. Or l'Ambre naît d'une moëlle, qui coule d'une ſorte de Pins, comme la gomme des Cerifiers & la réſine des Pins ordinaires. L'humeur en ſort d'elle-même par ſon abondance : elle ſe condenſe au froid, ou dans la chaleur de l'Automne : les hautes marées l'emportent hors des Isles, & la jettent ſur les Côtes, avec tant d'agitation qu'elle eſt tantôt ſuſpenduë ſur les vagues, & tantôt fixée ſur le ſable. Nos ancêtres l'ont appellée *ſuccinum*, ne doutant point que ce ne fût le ſuc d'un arbre. En effet on y reconnoît l'odeur du pin, ſoit qu'on le frote ou qu'on le brûle. Les Germains diſent que c'eſt la principale choſe qui a fait rechercher leur pais, & que c'eſt de-là qu'on a vu venir d'abord ce que les Grecs appelloient * *Macatos*. La réputation de l'Ambre s'eſt accrue par la proximité des Pannonies, qui le recevoient aux environs de la Mer Adriatique ; & c'eſt ce qui a donné lieu à la fable du Pô .... La Côte de Germanie d'où on l'apporte, eſt éloignée de près de 600 mille pas de Carnutum en Pannonie. Nous avons eu depuis peu cette connoiſſance de l'Ambre ſur le rapport d'un Chevalier Romain, qui a obſervé ſoigneuſement & les Côtes où on le recueille, & le commerce qu'on en fait ; ayant été envoyé ſur les lieux pour en acheter, à la ſollicitation de Julianus, qui avoit l'intendance des Gladiateurs pour le Prince Neron ; & il en apporta une ſi grande quantité que tous les noeuds des réſeaux que l'on met devant les loges, pour empêcher les bêtes de l'Amphithéatre d'en approcher, étoient garnis d'ambre, auſſi bien que les armes, les lits de mort des Gladiateurs, & tout ce qui ſervit à la décoration du ſeul jour que dura cette fête. La plus grande pièce d'ambre qu'on vit, parmi celles qu'il apporta, étoit du poids de treize livres. Il eſt ſûr qu'il y en a auſſi dans l'Inde.

* Terme dont on ne ſait point la ſignification.

Arche-

Archelaus, qui régna dans la Cappadoce, dit qu'on en apporte de-là, qui eſt encore tout brut, attaché même à des écorces de pin ; & qu'on le polit en le faiſant cuire dans la graiſſe d'un cochon de lait. Il ne faut pas douter que l'ambre, en diſtillant, ne ſoit liquide, puisqu'on y voit au dedans des corps étrangers comme des fourmis, des moucherons & des Lezards, qui s'y étant pris, lorsque la liqueur étoit encore récente, ſe ſont trouvés empriſonnés lorsqu'elle a été condenſée. Il y a pluſieurs eſpeces d'Ambre : le blanc a une odeur incomparable ; mais il n'eſt pas le plus précieux, non plus que celui qui eſt de couleur de cire. Le roux leur eſt préferé, à proportion de ſa transparence, pourvû qu'il ne ſoit pas d'un jaune trop ardent. Il ne faut pas qu'on y voïe la vivacité du feu, mais quelque choſe de plus doux. C'eſt pourquoi le plus eſtimé de tous eſt celui que l'on nomme *Falerne*, à cauſe qu'il a la couleur du vin de ce nom, c'eſt à dire legère & délicate : mais il y en a d'autre en qui l'on trouve avec plaiſir celle du Miel cuit. Je ne rapporterai point le reſte du paſſage, parce qu'il ne contient plus rien d'intéreſſant.

Après Pline, l'Auteur dont on peut tirer des lumières ſur l'origine de l'Ambre, eſt Tacite, qui, ſur la fin de ſon Traité *de Moribus Germanorum*, s'exprime ainſi là deſſus. Au delà des Suions, il y a une autre mer lente & presque immobile qui, à ce que l'on croit, environne le globe de la terre, parce que les derniers rayons du Soleil couchant y conſervent jusqu'au matin une ſi grande clarté qu'elle obſcurcit les étoiles. D'ailleurs on ſe perſuade que l'on y entend le bruit que fait le Soleil en ſortant de l'Océan ; qu'on y voit même les viſages des Divinités & les rayons de leur tête. On dit que là eſt l'extrémité de la nature ; & cela eſt vrai. Or, ſur la rive droite de la mer *Suevique*, habitent les nations des *Aeſtiens*..... Ils ſont les ſeuls qui ramaſſent l'Ambre qu'ils appellent *Gles*, ſoit dans les bas fonds, ſoit ſur le rivage même : & Barbares, comme ils ſont, ils ignorent, & ne ſe ſont jamais embarraſſés de ſavoir de quelle nature il eſt, ni comment il ſe forme. Bien plus il a été fort longtems négligé parmi d'autres

d'autres choſes que la Mer a coûtume de jetter ſur ſes bords : mais enfin notre luxe l'a mis en vogue. Pour eux ils n'en ſont aucun uſage. Ils le recueillent brut. On l'enléve de leurs mains en ce même état ; & ils en reçoivent le prix avec étonnement. Vous ſaurez cependant que c'eſt un ſuc d'arbres ; puisqu'il eſt ordinaire d'y voir intérieurement quelques animaux terreſtres, même de ceux qui volent, lesquels étant ſaiſis par cette liqueur, y reſtent enfermés, lorsqu'elle vient à s'endurcir. Comme donc il y a en quelques lieux particuliers de l'Orient des forêts & des bois fertiles qui ſuent l'encens & le baume ; de même je croirois que dans les Isles & les terres de l'Occident, il y a des arbres, dont les ſucs étant attirés par les rayons du Soleil qui en eſt proche, tombent encore liquides dans la mer voiſine, d'où par l'agitation des vagues ils ſont jettés ſur les côtes oppoſées. Si vous éprouvez l'ambre au feu, il brûle comme une torche de vieux pin, & il rend une flamme graſſe qui ſent fort, & s'épaiſſit d'abord en forme de poix ou de réſine.

Philoſtrate, Littérateur Grec plus moderne que Tacite, n'a fait, au livre II. de ſon Traité des Images, que raconter la fable de Phaëton précipité dans l'Eridan en Italie ; cependant, ſur la fin de ſon récit, il ajoûte, au ſujet de l'Ambre, que cette eſpéce de ratiſſure des peupliers eſt portée par les eaux de ce fleuve aux Barbares qui habitent l'*Ocean*.

Le dernier des Anciens qui a parlé de l'origine de l'Ambre, avant que la Pruſſe fût connuë ſous ce nom, eſt Theodoric Roi des Goths d'Italie : C'eſt dans une dépêche de ce Prince, que Caſſiodore ſon Secretaire d'Etat nous a conſervée. Elle eſt adreſſée aux *Hæſtes* : *Hæſtis Theodoricus Rex* : & ces Hæſtes ſont manifeſtement les mêmes que les Æſtiens de Tacite. Voici donc le contenu de cette Lettre, fidelement traduite ſur le latin. LE ROI THE'ODORIC AUX HAESTES. Vos Ambaſſadeurs, qui ſont arrivés ici, Nous ont témoigné l'extrême empreſſement que Vous avez de nous connoître, afin que des bords de l'Océan, où Vous êtes établis, Vous entreteniez avec

avec nous une étroite liaiſon d'amitié. Une demande ſi agréable n'a pu que nous flatter infiniment, voiant que notre réputation vous eſt parvenue, ſans que nous ayons pris le ſoin de vous en prévenir. Maintenant que je vous ſuis connu, aimez-moi, vous qui avez tant fait pour me connoître. Car ce n'étoit point pour votre déſir un obſtacle facile à ſurmonter, que d'avoir un paſſage à s'ouvrir au milieu de tant de Nations, pour arriver jusqu'à nous. Après donc vous avoir ſalués à notre tour avec affection, nous vous faiſons ſavoir que nous avons reçû avec plaiſir le préſent d'Ambre jaune que nous ont remis de votre part ceux qui vous portent cette Lettre. Ils nous ont conté que les eaux de l'Océan qui deſcendent ſur votre Côte, vous amènent cette ſubſtance, qui eſt en effet très legére. Mais ils diſent que vous ignorez d'où elle vient, & que comme elle ſe trouve dans votre Païs plus qu'ailleurs, vous êtes auſſi les premiers qui l'aiez recüeillie On lit dans les écrits d'un certain *Cornelius* *, qu'elle vient des Isles de l'Océan, & qu'étant un ſuc qui coule d'un arbre, ce qui l'a fait nommer en latin *Succinum*, il eſt épaiſſi peu à peu par l'ardeur du Soleil, & devient une eſpece de métal ſuant, tendre, transparent, tantôt de la couleur du Safran, & tantôt de celle de la flamme ; lequel tombant dans la mer voiſine ſe purifie par l'agitation des flots, & en cet état eſt jetté ſur vos côtes. C'eſt ce que nous avons cru devoir vous expliquer pour vous faire entendre que nous avons quelque connoiſſance d'un ſecret qu'on dit que vous ignorez. Au reſte donnez-nous ſouvent de vos nouvelles par la route que votre amitié pour nous, vous a fait ſi heureuſement trouver.

IV. Pour venir aux concluſions que j'ai deſſein de tirer de cette ſuite de Témoignages anciens ſur l'origine de l'Ambre : quoiqu'il ſoit ſenſible qu'ils ne ſont appliquables qu'à l'Ambre de Pruſſe ; cependant il eſt à propos, pour ne laiſſer aucun lieu de doute, d'éclaircir ici ce que ces mêmes Témoignages peuvent avoir d'obſcur ou d'équivoque.

Je

* C'eſt ſans doute Corneille Tacite, & non pas Cornelius Nepos, comme le P. Hardouin le dit dans ſes Notes ſur Pline Tom. V. p. 370.

Je pourrois, s'il en étoit beſoin, écarter d'abord comme indignes d'un éxamen ſérieux, tous ceux qui n'ont eu pour objet que la fable de Phaëton. Mais comme il eſt certain que les anciennes fictions ne ſont que des emblêmes, & pour ainſi dire, le masque de quelques vérités; il faut eſſayer de développer celles qui peuvent être mêlées dans cette fable, qui, comme on l'a vû, a été célébrée par les plus anciens Ecrivains de la Grece. Ils ſe ſont tous accordés à dire, que Phaëton fut précipité dans l'*Eridan*, ſur le bord duquel les larmes de ſes ſoeurs furent changées en ambre. Quelques uns ont auſſi nommé ce fleuve, *Rhodanus*, le ſuppoſant en Eſpagne. D'autres l'ont été chercher en Italie, le confondant avec le Pô. Toutes fauſſetés que Pline a démenties. Enfin nul d'eux n'a ſu dire où étoit ce fleuve. Cependant, s'il y avoit quelque choſe de vrai dans leur récit, il eſt manifeſte que l'Eridan ne pouvoit être ailleurs que dans la Pruſſe, mais que ſon nom pouvoit avoir été corrompu par les Grecs qui le prononçoient ſans le connoître. Or la Pruſſe a aujourdhui, comme elle avoit dès-lors, une riviere qui ſortant d'un lac ſitué à vingt cinq mille pas au deſſus de la ville de Danzic, entre le Monaſtère de Suckow & celui de Carthaus, vient baigner d'abord les murailles du premier, d'où il ſe rend au village de Pruuſt, & enfin traverſant Dantzig, mêle ſes eaux à celles de la Viſtule ſous les murs mêmes de cette Ville. On nomme vulgairement cette rivière *die Rodaune*, & en quelques autres dialectes *die Raddaune*, *die Raddune*, & *die Reddune*. Cela prouve donc que ce fut l'Ambre de Pruſſe qui occaſionna la fable de Phaëton, & qu'il eſt le ſeul duquel on puiſſe entendre les Témoignages anciens que j'ai rapportés.

De là il eſt aiſé de voir, que tout ce que les Grecs ont dit de la Mer Adriatique où l'on trouvoit l'Ambre, à ce qu'ils prétendoient, doit être entendu de la Mer Baltique qu'ils ne connoiſſoient pas. Qu'ainſi quand Euripide & Apollonius ont dit que le *Rhodanus* & le Pô ſe ren-

rendoient enſemble dans la première de ces deux Mers, ils ont voulu parler de la *Rodaune* qui jointe à la Viſtule ſe rend dans la Baltique; Que c'eſt ce qui réſulte du récit d'Hérodote le plus ancien des Hiſtoriens Grecs, puiſqu'il dit, que de ſon tems on étoit perſuadé qu'aux extrémités de l'Europe il y avoit un certain fleuve appellé par les gens du païs *Eridan*, qui alloit ſe rendre dans la Mer oppoſée au Septentrion; que c'étoit de-là que venoit l'Ambre; mais que pour lui il n'étoit point perſuadé, qu'il y eût chez des Barbares un fleuve dont le nom fût Grec; prévention qu'il n'auroit pas eüe aſſurément, s'il eût ſû que c'étoit un nom originairement barbare, pour me ſervir de ſes termes, mais que les Grecs depuis longtems avoient corrompu & accommodé à leur langue; Qu'en effet ceux de ſa Nation qui ont écrit après lui, comme Philemon, Pytheas, Timée, Nicias, Mithridate, Diodore de Sicile, Xenocrate, Xenophon de Lampſaque & Philoſtrate, ne ſe ſont point arrêtés à cette prévention, & ſans mêler dans leur récit le fleuve Eridan qu'ils regardoient comme fabuleux, ils ont parlé du moins de l'origine de l'Ambre aſſez clairement, pour nous faire comprendre qu'ils n'en ont point connu d'autre que celui de Pruſſe.

Il eſt vrai que j'ai cité trois paſſages de Pline, qui prouvent que l'on en recüeilloit auſſi dans quelques Iſles de la Mer d'Allemagne, nommément dans celle d'Auſtranie, aujourdhui Strand, vers l'embouchure de l'Elbe. Non ſeulement cela pouvoit être au tems de Pline, mais même je ne diſconviens pas que cela n'arrive encore de nos jours. Cependant comme cet Ambre eſt fort inférieur en beauté à celui de Pruſſe; que d'ailleurs il n'eſt jamais qu'en petite quantité & en ſi petits morceaux qu'il eſt rare qu'on puiſſe le tailler, il eſt toujours vrai de dire que les Pruſſiens doivent être regardés comme ſeuls en Europe qui poſſedent la Mine de l'Ambre. Ainſi c'eſt manifeſtement de la Pruſſe que Diodore a eu raiſon de dire, que l'Ambre y étoit jetté par

les flots en grande abondance, & qu'on n'en trouvoit nulle part ailleurs dans tout le monde C'eſt de la Pruſſe que les Germains, au rapport de Pline, pouvoient dire que l'Ambre étoit la principale choſe qui avoit fait rechercher ce païs-là. En un mot, c'eſt aux ſeuls Pruſſiens que Tacite a pû attribuer l'avantage d'être les ſeuls qui ramaſſoient l'Ambre, & le Roi Theodoric, celui d'avoir été les premiers mortels qui l'avoient recueilli.

Une petite difficulté ſe préſente ici, par rapport à ces Isles Electrides dont les Anciens ont parlé, & qui devoient être néceſſairement aux environs de la Pruſſe. J'en dirai mon avis. Il faut remarquer d'abord que les premiers qui en ont prétendu donner la connoiſſance, étoient des Poëtes qui ne les connoiſſoient pas plus que l'Eridan à l'embouchure duquel il les plaçoient. Ainſi je croi qu'en rabattant quelque choſe de leur exagération, on peut fort bien réduire cette pluralité d'Isles à une ſeule que je nommerai *Baſilia* ou *Baſilcia* avec Pytheas & Diodore; *Baltia* avec Timée & Xenophon, & *Oſericta* avec Mithridate. Si l'on ſe rappelle, en premier lieu, ce que tous ces Auteurs ont dit: Savoir que c'eſt en cette Isle que les flots apportent l'Ambre; & ſecondement ce que Diodore ajoute, que l'on n'en trouve nulle part ailleurs: il s'enſuivra que cette Isle n'eſt rien autre choſe que la Pruſſe. Or Adam de Bréme, Ecrivain bien plus récent que tous ces Grecs, & qui étoit plus à portée qu'eux de connoître les Isles de la Mer Baltique, dit formellement qu'on en reconnoiſſoit trois de ſon tems, *Fimbria*, Femeren; *Rugia*, Rugen; & *Sambia*, Samland. Cette derniere eſt préciſement la Province où les Pruſſiens recueillent l'Ambre. Ainſi les Grecs ont été également fondés à donner le nom d'Isle à ce païs-là, qui peut en effet paſſer pour telle, étant détaché du reſte de la Pruſſe, par le Pregel & la Deime, dans les endroits où la mer ne l'environne pas.

Après

Après ces éclairciſſemens, peut-être aura-t-on peine encore à concevoir, comment l'Ambre, étant pêché ſur la côte du Samland, a pu paſſer pour une production des rives de l'Eridan, c'eſt à dire de la Rodaune, qui en eſt éloignée d'une vingtaine de milles. Pour ſatisfaire à cela, il n'y a qu'a ſuppoſer qu'à l'endroit où eſt la ville de Dantzig, il pouvoit y avoir déjà les commencemens de cette Ville, je veux dire, une bourgade, ou un ſimple hameau, dans lequel les Pruſſiens de Samland venoient au Printems apporter leur Ambre comme dans une eſpece de foire pour l'y vendre publiquement, ſoit aux Teutons de leur voiſinage, ſoit aux Marchands de Pannonie, ſoit enfin à ceux d'Italie & de Grece, que l'appaſt du gain pouvoit engager à entreprendre un ſi long voyage. Cette ſuppoſition eſt d'autant plus vraiſemblable qu'elle paroit juſtifiée ; premiérement par l'ancienneté de la ville de Dantzic, qui tire ſon nom de ſon Golfe, connu dans l'antiquité ſous le nom de *Sinus Codanus*, à cauſe que dans la langue du païs il étoit appellé *Gdanz* : Secondement, par Pytheas, qui dit que le peuple qui recüeilloit l'Ambre le vendoit aux Teutons de leur voiſinage. Troiſiémement, par Diodore de Sicile, qui aſſure que l'Ambre étant recüeilli dans l'Isle Baltie, qui étoit le Samland, comme je l'ai fait voir, les habitans l'apportoient au Continent, par où on le tranſportoit enſuite jusqu'en Grece. Quatriémement, par Pline, qui aſſure qu'un Chevalier Romain, aiant été envoié ſur les lieux pour en acheter, avoit obſervé le commerce qui s'y en faiſoit ; & que c'étoit la principale choſe qui avoit fait rechercher ce païs-là par les Etrangers. Il eſt vrai que le même Pline dit auſſi, que la réputation de l'Ambre s'étoit accruë par la proximité des Pannoniens, qui le recevoient aux environs de la Mer Adriatique, & que c'eſt ce qui avoit donné lieu à la fable du Pô. Mais comme j'ai montré plus haut que tout ce que les Anciens avoient dit de l'Eridan ou du Pô, devoit être entendu de la Rodaune, il s'enſuit que c'étoit en Pruſſe que les Pannoniens recevoient l'Ambre. Cinquiémement enfin ajoutons auſſi l'autorité, de Tacite qui obſerve

que l'Ambre avoit été fort longtems négligé chez les Pruſſiens ; que de ſon tems le luxe des Latins l'avoit mis en vogue ; mais qu'on l'enlevoit tout brut de la main des premiers, & qu'ils en recevoient le prix avec étonnement. Toutes circonſtances, ſi l'on y prend garde, qui font voir que les Etrangers alloient acheter l'Ambre dans la Pruſſe : & comme ce commerce ſe faiſoit ſur les rives de la Rodaune, quoique l'Ambre y fut apporté de l'Isle de Samland, ce fut ce qui donna lieu aux uns de feindre qu'il naiſſoit ſur les bords de l'Eridan ; & à d'autres, de croire que les Isles Electrides, où on le recueilloit, étoient ſituées à l'embouchure de ce fleuve.

Concluons donc de tout cela, que la Pruſſe, s'étant fait connoître aux Grecs par le moien de ſon Ambre avant Eſchyle, devoit être habitée dès ce tems là, & peut-être même dès le tems de Phaëton, ſuppoſant qu'il fut un perſonage réel, &, à ce qu'on dit, un Aſtrologue, qui mourut l'an du monde 2530, ſuivant le Calcul d'Euſebe. Il s'agit maintenant de voir quels ſont les peuples qui ont ſucceſſivement occupé la Pruſſe depuis tant de Siécles ; & c'eſt ce qu'on ne peut reconnoître encore, qu'en tirant des mêmes ſources la connoiſſance de ceux qui s'occupoient à recueillir l'Ambre ſur leurs côtes.

Il n'en eſt rien dit avant Hérodote ; & lui-même ne déſigne ces peuples que par le nom de *Barbares*, que les Grecs donnoient a tous ceux qui n'étoient pas de leur Nation, & qui ne parloient pas la langue Grecque.

Philemon, Timée, Xenophon de Lampſaque, Diodore de Sicile & Xenocrate, dans un eſpace de 400 ans depuis l'année 346. avant J. C. ont dit que les Peuples qui ramaſſoient l'Ambre, étoient des *Scythes*.

Dans

Dans ce même intervalle, Pytheas paroît faire entendre que ces Peuples étoient des *Gutrons* : & après lui, toujours dans le même intervalle, Nicias & Mithridate ont dit ſimplement que c'étoient des *Germains*.

Deux Siecles après Mithridate, Pline a dit auſſi la même choſe.

Enfin depuis Tacite, qui vivoit peu d'années après Pline, juſqu'au VI. Siecle, dans lequel Théodoric regnoit en Italie, ces Peuples étoient les *Æſtiens*, ou *Haſtes*.

Voilà les vrais Peuples anciens de la Pruſſe, dont il s'agit d'expliquer les ſucceſſions, en conciliant, s'il eſt poſſible, ce que les différentes opinions de ces Auteurs paroiſſent avoir de contraire ou d'équivoque. Ce ſera la matiére de la ſeconde Partie, & d'une autre Lecture que je ferai à l'Academie.

TABLE.

TABLE.

CLASSE de Philoſophie Expérimentale.

Recherches *ſur la fertilité de la Terre en général par* M. ELLER. pag. 3

Nouvelle maniere *de rendre l'argent très fin par l'acide du ſel commun, ou moyen de faire la réduction de l'argent cornu ſans perte, par* M. MARGGRAF. p. 16.

Expérience *concernant la génération des Champignons, par* M. GLEDITSCH. p. 26

Maniere *de conſtruire une Echelle de Baromètre, qui indique directement la véritable preſſion de l'air, & qui corrige les défauts cauſés par les altérations que la chaleur de l'air fait éprouver au Mercure, par* M. C. F. LUDOLFF. p. 33.

Obſervations *ſur l'Huile qu'on peut exprimer des Fourmis, avec quelques Eſſais ſur l'acide des mêmes Inſectes, par* M. MARGGRAF. p. 38.

Rélation *concernant un Eſſain prodigieux de Fourmis, qui reſſembloit à une Aurore Boréale, par* M. GLEDITSCH. p. 46.

Mémoire *concernant certaines pierres, qui par la ſtratification avec les Charbons & la calcination, parviennent à un état, & acquiérent une force, par laquelle étant expoſées un peu de tems à la lumiere, elles brillent enſuite dans un lieu obſcur, par* M. MARGGRAF. p. 56.

Mémoire *ſur l'art de couver les oeufs ouverts, par* M. BEGUELIN. p. 71.

Obſer-

Obſervation Anatomique *ſur un Noeud, ou* Ganglion, *du ſecond rameau de la cinquieme paire des nerfs du cerveau, nouvellement découvert ; avec l'*Examen Phyſiologique *du veritable uſage des noeuds, ou* Ganglions, *des nerfs, par* M. MECKEL. pag. 84.

Eſſai *d'une Fécondation artificielle, fait ſur l'eſpece de Palmier qu'on nomme,* Palma dactylifera folio ſlabelliformi, *par* M. GLEDITSCH. p. 103.

Syſtème *des Plantes, fondé ſur la ſituation & la liaiſon des Etamines, par* M. GLEDITSCH. p. 109.

CLASSE de Mathematique.

De la Controverſe entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli, *ſur les Logarithmes des nombres négatifs & imaginaires, par* M. EULER. p. 139.

Mémoire *ſur la véritable raiſon du défaut de la Régle de* Cardan *dans le cas irréductible des équations du* III. *dgré, & de ſa bonté dans les autres, par* M. KOENIG. p. 180.

Rapport *de quelques Obſervations celeſtes, faites à l'Obſervatoire Royal, par* M. KIES. p. 193.

Sur le point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece de M. le Marquis de l'Hopital, *par* M. EULER. p. 203.

Recherches *ſur les racines imaginaires des Equations par* M. EULER. p. 222.

Recherches *ſur la préceſſion des Equinoxes & ſur la nutation de l'Axe de la Terre, par* M. EULER. p. 289.

De la Parallaxe de la Lune, tant par rapport à ſa hauteur qu'a ſon Azimuth, dans l'Hypotheſe de la Terre ſpheroïdique, par M. EULER. p. 326.

De la ſituation la plus avantageuſe des Planetes, pour découvrir les irrégularités de leurs mouvemens, par M. KIES. p. 339.

Sur les Eclipſes des Etoileo fixes par la Lune, par M. KIES. pag. 351.
Mémoire, *dans lequel on examine, ſi l'on peut eſpérer la même préciſion dans la détermination des Longitudes, des Obſervations des occultations des Etoiles fixes par la Lune, ou des diſtances de cette Planete aux Etoiles fixes, que des Eclipſes des Satellites de Jupiter, par* M. CASSINI de THURY. p. 358.
Deſcription *d'un Inſtrument, qui ſe trouve à l'Obſervatoire de Berlin.* p. 370.
Extrait *d'une Lettre de* M. d'ALEMBERT *à* M. *de* MAUPERTUIS. p. 372.

CLASSE de Philoſophie ſpéculative.

Diſſertation *ſur les raiſons d'établir ou d'abroger les Loix.* p. 375.
Examen *de l'Uſure ſuivant les Principes du Droit Naturel, par* M. FORMEY. p. 401.
Mémoire *ſur l'apperception de ſa propre exiſtence, par* M. MERIAN. p. 416.
Mémoire *ſur l'apperception conſidérée rélativement aux idées, ou, ſur l'exiſtence des idées dans l'Ame, par* M. MERIAN. p. 442.
Réfléxions *ſur l'origine du Plaiſir, où l'on tâche de prouver l'idée de* Des-Cartes ; *Qu'il naît toujours du ſentiment de la perfection de nous-mêmes, par* M. KAESTNER. p. 478.

CLASSE de Belles-Lettres.

Diſſertation *ſur un paſſage des Commentaires de Jules Ceſar,* de Bello Gallico, *Liv.* VI *Ch.* 21. *par* M. PELLOUTIER. p. 491.
Diſſertation *ſur l'origine du Peuple Pruſſien, par* M. de FRANCHEVILLE. p. 501.

* * *

ERRATA.

Pag. 35. l. 4 *à fine*, 31. liſez 13.
p. 36. l. 2. *le dilatant*, ajoutez, *encore*.
ibid. l. 22. C. E, liſez B E.
p. 56. l. 2. & 3. *de la préparation de laquelle*, liſez, *de laquelle auſſi bien que de ſa préparation*
p. 59. l. 5. *fourmeaux*, liſez *fourneaux*.
p. 61. l. 4 §. V. liſez §. VI.
ibid. l. 24. *treib-ſcheiben*, liſez *treib-ſcherben*.
p. 65 l. 22 *Spremberg*, liſez *Speremberg*.
p. 70 l 22 il y a une * qui répond à une citation omiſe. C'eſt Mentzel, *de Lapid. Bonon* p. 8.
p. 73 l 3 *du*, liſez *au*.
p. 84. l. 2 *ou*, liſez *on*.
p 87. l. 18. otez le mot *double*.
p. 89. l. 13. *forment l'apophyſe*, liſez *formé dans l'apophyſe*.
p. 142 l. dern. *multipliée*, liſez *multiplié*.
p. 146. l. 2. au lieu de du $= \frac{dy}{yn}$ liſez dx $= \frac{dy}{yn}$.
p. 157 l. 4 au lieu de $x\frac{1}{4}$ *trois*, liſez $x\frac{1}{3}$ trois.
ibid. l. 5. au lieu de $x\frac{1}{2}$ *quatre*, liſez x $\frac{1}{4}$ quatre.
p. 203. l. penult. *evaluation*, liſez *évolution*.
p. 213. l. 15. au lieu de $y = xx^{k} +$ liſez $y = \alpha x^{k}$
p. 214. l 9. au lieu de $y = \alpha x \quad \beta x + \gamma xx\sqrt{x}$, liſez $y = \alpha x - \beta xx + \gamma xx\sqrt{}$.
p. 341. l. 25. *Que l'axe de la Terre*, liſez, *Que l'axe de l'orbite de la Terre*.
p. 363 l. 21. *ſuppoſe*, liſez *ſuppoſe*.
ibid. l 22 *pieds de roi*, liſez *pieds de rayon*.
p. 420. l. 4. *immediate*, liſez *immediat*.
p. 425. l. 1. *Sceptiqui*, *liſez Sceptique*.
ibid. not. * $\grave{O}V$, liſez $\grave{O}U$.
p 427. not. ** l. 2. D h. liſez D. L.
p. 432 l. 18 *conſiedrez*, liſez *conſiderez*.
p 434. l. 21 *un en mot*, liſez *en un mot*.
p. 443. l. 3 *poſes*, liſez *poſees*.
p. 452 l 31. *fin douzieme*, liſez *fin du douzieme*.
p. 455. l. 21. *on ſert*, liſez *on ſe ſert*.
p. 475. l. 2. *un paſſage M. le Baron de Wolf*, liſez *un paſſage de M. le Baron de Wolf*.

*** *** ***